Su alcuni aspetti delle curve funicolari

Corrado Brogi

1

Premessa

Lo studio della configurazione delle grandi opere di architettura, sia dal punto di vista del rilevamento, sia dal punto di vista statico, ha impegnato generazioni di architetti e di ingegneri. In questi ultimi tempi assistiamo ad un rinnovato interesse per il problema. Con l'ausilio di nuovi metodi matematici e di modernissimi mezzi tecnologici, sono ripresi con fervore gli studi, non disgiunti dalle appassionanti dispute degli scienziati.

Poiché riteniamo che l'armonia geometrica di un'opera sia intimamente connessa alla sua funzione statica, presentiamo in questo primo articolo uno studio sulle curve funicolari in generale e sulla catenaria in particolare. Si sono ricavate formule che correlazionano solo gli elementi geometrici della catenaria indipendentemente dal peso e dalla tensione.

Anticipiamo le fotografie [1] di catenarie sovrapposte ad un disegno [2] della cupola del Duomo di Firenze, evidenziando una spinta laterale proprio nella zone ove si verificano la lesioni della cupola stessa. La catenaria a campo gravitazionale deviato di circa 45^0 rispetto all'asse della cupola sovrappone l'intera linea del disegno [3].

Comunque lo studio particolare delle applicazioni della catenaria e di altre curve formerà oggetto di successivi articoli in corso di elaborazione.

Curve funicolari

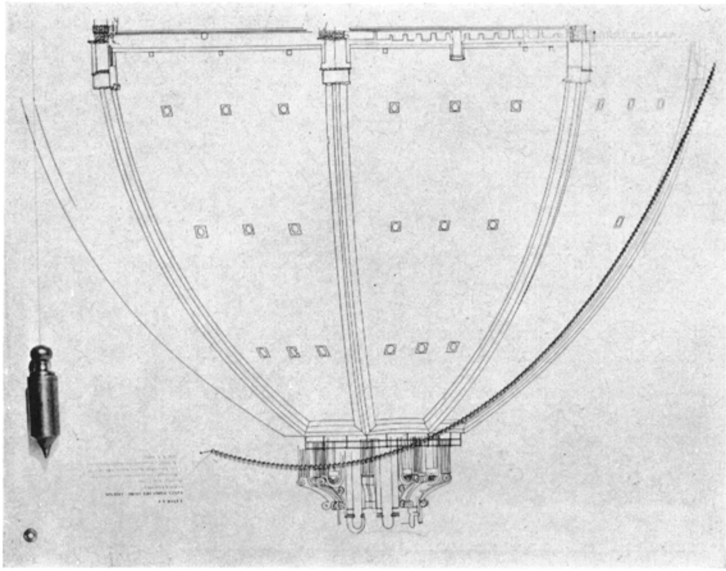
Consideriamo una sequenza lineare di elementi infinitesimi la cui caratteristica sia quella di restare costantemente a contatto pur permettendo lo scorrimento relativo di ciascun elemento rispetto ai suoi adiacenti. Possiamo, come modello di comodo, visualizzare la sequenza pensando ad una fila di sferette infinitesime a contatto per mutua attrazione. Comunemente si pensa ad una fune perfettamente flessibile ed inestendibile soggetta a forze distribuite lungo la fune stessa. Però questo secondo modello differisce dal nostro, infatti mentre la fune è capace di resistere, oltre che allo sforzo normale di trazione, anche allo sforzo di taglio, la sequenza di sferette non può reagire allo sforzo tagliante, ma solo allo sforzo normale di trazione. Sia la fune che le sferette presentano instabilità all'equilibrio se compresse.

---

[1] Le fotografie sono state eseguite dal Dott. Arch. P. F. Tramonti.

[2] Il disegno è stato tratto da: W. Ferri, M. Fondelli, P. Franchi, F. Greco, *Il rilevamento fotogrammetrico della cupola di Santa Maria del Fiore in Firenze*, I.G.M.

[3] Mediante la formula (21) è facilmente calcolabile il rapporto H/q della catenaria in funzione dei dati geometrici del rilevamento.

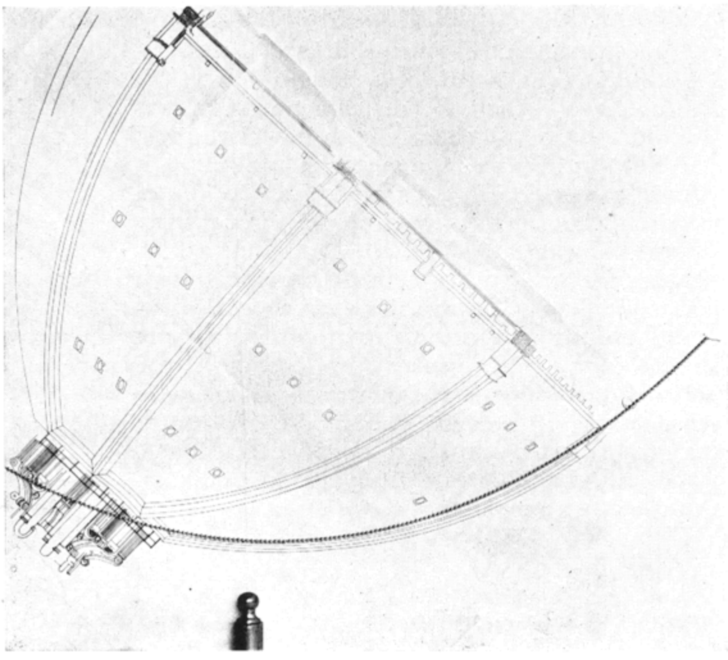


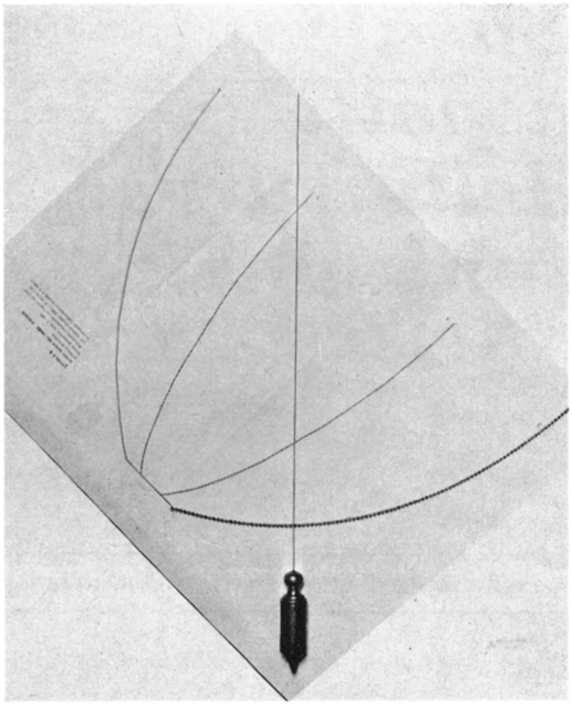
1

Catenaria di peso uniformemente distribuito avente l'asse circa coincidente con l'asse della cupola confrontata con la proiezione di un costolone esterno.

Catenaria di peso uniformemente distribuito con asse spostato di circa 45° rispetto all'asse della cupola confrontata con la proiezione di un costolone esterno.

2



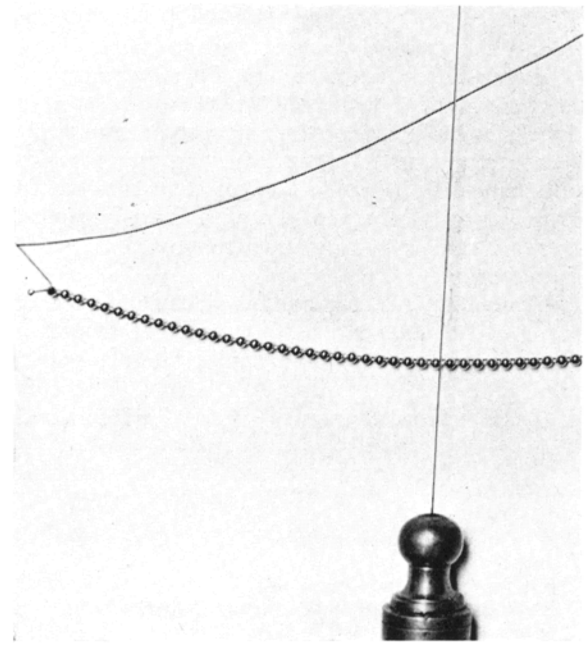


3

Catenaria di peso uniformemente distribuito con asse spostato di circa 45° rispetto all'asse della cupola, sovrapposta al rilievo 1 : 100 del costolone interno n. 3.

Particolare della foto n. 3.

4



Si possono fare varie ipotesi sulle caratteristiche degli elementi infinitesimi costituenti la sequenza; li abbiamo visualizzati come « sferette infinitesime » attribuendo loro implicitamente « una forma » ed « un volume ». Queste ipotesi non sono necessarie, nel caso più generale è sufficiente attribuire loro la caratteristica di una mutua attrazione che può costituirsi per fatti energetici legati o meno a forme geometriche.

Chiameremo *ds lo spazio lineare* infinitesimo che intercorre fra i punti di contatto di un elemento con i suoi adiacenti.

La condizione che la sequenza di elementi sia inestendibile implica non solo $ds =$ costante, ma che i ds si dispongano secondo la tangente alla configurazione di equilibrio.

Se considerassimo forze qualsiasi agenti sui singoli elementi dovremmo definire infiniti parametri. Nello studio delle funicolari si ipotizzano forze ripartite: detta (f) la forza agente sull'arco di lunghezza unitaria, la forza applicata all'elemento generico ds sarà: $(f)\,ds$.

Non abbiamo, per ora, posto limitazioni alla (f) che si intende nota in ogni punto della sequenza.

Consideriamo la nostra sequenza lineare di elementi già in equilibrio per effetto delle forze applicate e dei vincoli, e siano A e B i punti estremi vincolati. Se operiamo una sezione in un punto P

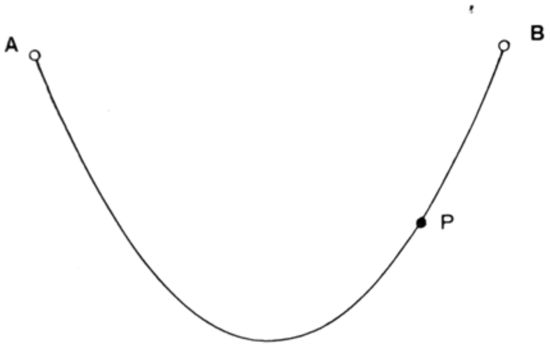


Fig. 1

intermedio alla sequenza, si nota che attraverso tale sezione la parte AP trasmette alla PB una forza uguale e contraria a quella che BP trasmette a PA. Tale forza, mutua si dice usualmente tensione in P e si indica con T, essa è diretta tangenzialmente alla configurazione di equilibrio in P.

In altre parole T è lo sforzo normale nella sezione P al quale reagiscono gli elementi della sequenza. Poiché la zona di contatto fra due elementi consecutivi si pensa infinitesima (puntiforme), da ciò la denominazione di tensione.

Evidenziamo ora nella nostra sequenza lineare un elemento $P_1 P_2 = ds$ (individuato dalle lunghezze s ed $(s + ds)$ misurate lungo la sequenza con origine arbitraria ai cui estremi figurano applicate le tensioni $T(s)$ *e* $T(s+ds)$ e che inoltre sia soggetto alla forza $(f)ds$. L'equilibrio viene espresso dalla relazione:

1) $$(f)\,ds + T(s) + T(s+ds) = 0$$

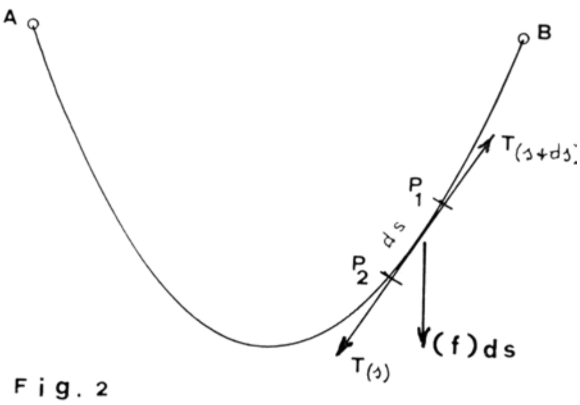


Fig. 2

Se fissiamo un verso sulla misura s degli archi e proiettiamo le forze su un sistema di assi cartesiani, posto $(f)_x = X$; $(f)_y = Y$; $(f)_z = Z$, per la (1) si ha:

2) $$\begin{cases} X\,ds - T_x(s) + T_x(s+ds) = 0 \\ Y\,ds - T_y(s) + T_y(s+ds) = 0 \\ Z\,ds - T_z(s) + T_z(s+ds) = 0 \end{cases}$$

Ricordando lo sviluppo in serie di Taylor:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^n(x_0) + R$$

si ha:

$$T_x(s+ds) = T_x(s) + ds\,\frac{dT_x}{ds} + K\,d^2s$$

ove con Kds^2 viene indicato il resto della serie.

Sostituendo nella (2), dividendo per ds e semplificando si ha:

3) $$\begin{cases} X + \frac{dT_x}{ds} + K\,ds = 0 \\ Y + \frac{dT_y}{ds} + K\,ds = 0 \\ Z + \frac{dT_z}{ds} + K\,ds = 0 \end{cases}$$

e per ds tendente a zero si ha:

3') $$\begin{cases} X + \dfrac{dT_x}{ds} = 0 \\ Y + \dfrac{dT_y}{ds} = 0 \\ Z + \dfrac{dT_z}{ds} = 0 \end{cases}$$

Essendo $T(s)$ tangente alla curva di equilibrio, i suoi coseni direttori saranno:

$$\frac{dx}{ds}\;;\;\frac{dy}{ds}\;;\;\frac{dz}{ds}\;;$$

ed anche:

$$T_X = T(s)\frac{dx}{ds}\;;\quad T_Y = T(s)\frac{dy}{ds}\;;\quad T_Z = T(s)\frac{dz}{ds}\;;$$

sostituendo nella (3') si ha:

$$4)\quad \begin{cases} X + \dfrac{d\left(T(s)\frac{dx}{ds}\right)}{ds} = 0 \\[2ex] Y + \dfrac{d\left(T(s)\frac{dy}{ds}\right)}{ds} = 0 \\[2ex] Z + \dfrac{d\left(T(s)\frac{dz}{ds}\right)}{ds} = 0 \end{cases}$$

Aggiungendo la relazione dei coseni direttori

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

Si ha un sistema da integrare di quattro equazioni nelle incognite x, y, z, T che permette di individuare la configurazione della curva e la tensione. Le sei costanti arbitrarie di integrazione possono essere determinate dalle condizioni di vincolo, per esempio le coordinate di A e di B.

La catenaria

Nelle curve funicolari in generale si è considerata una (f) generica agente sugli elementi della sequenza. Consideriamo ora che gli elementi della sequenza abbiano una massa, e quindi, in campo gravitazionale, un peso per unità di lunghezza che indicheremo con la lettera q.

Poniamo che il campo gravitazionale sia diretto secondo l'asse y e sia costante, e che la curva di equilibrio resti nel piano x, y, cioè che le (f) siano costanti e parallele ($(f) = q =$ costante). Ciò premesso le equazioni (4) diventano:

$$5)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{ds}\left(T(s)\dfrac{dx}{ds}\right) = 0 \\[2ex] \dfrac{d}{ds}\left(T(s)\dfrac{dy}{ds}\right) = q \\[2ex] \left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

integrando le prime due equazioni delle (5) si ha: (Posto $T(s) = T$)

$$6)\quad \begin{cases} T\,\dfrac{dx}{ds} = H = \text{costante} \\[2ex] T\,\dfrac{dy}{ds} = qs + b \end{cases}$$

La prima delle (6) implica che la proiezione della tensione in direzione x, cioè la tensione orizzontale sia costante in ogni punto della curva catenaria. Questa proprietà vale in generale quando le (f) sono tutte parallele, in tal caso la tensione ha proiezione costante su una retta perpendicolare alle (f).

Se osserviamo che, nel punto più basso della catenaria, la proiezione verticale della tensione è zero, ponendo in tale punto l'origine degli archi s le (6) diventano:

$$6')\quad \begin{cases} T\,\dfrac{dx}{ds} = H \\[2ex] T\,\dfrac{dy}{ds} = qs \end{cases}$$

infatti; dovendo essere: $T\dfrac{dy}{ds} = 0$ per $s = 0$,

sarà anche $b = 0$.

Quadrando e sommando le (6') si ha:

$$T^2\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right] = H^2 + q^2 s^2$$

ed anche per la terza equazione delle (5)

$$T = \sqrt{H^2 + q^2 s^2}$$

$$7)\quad T = q\sqrt{\left(\frac{H}{q}\right)^2 + s^2}$$

sostituendo nella (6'):

$$8)\quad \frac{dy}{ds} = \frac{s}{\sqrt{\left(\frac{H}{q}\right)^2 + s^2}}$$

posto:

$$9)\quad \frac{H}{q} = a$$

È bene ricordare che H è la tensione orizzontale costante in ogni punto della catenaria, q è il peso distribuito pure costante perciò anche $a =$ costante. Dimensionalmente a è una lunghezza. Tenuto conto della (9) la (7) e la (8) si esprimono:

$$7')\quad T = q\sqrt{a^2 + s^2}$$

$$8')\quad \frac{dy}{ds} = \frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2}}$$

integrando la (8')

$$y = \int \frac{s\,ds}{\sqrt{a^2 + s^2}} = \sqrt{a^2 + s^2} + c$$

Se consideriamo l'origine delle y nel vertice della catenaria abbiamo: per $y = 0$; $s = 0$ per cui: $c = -a$ (il segno meno è dovuto ad aver considerato il valore assoluto della radice).

Se spostiamo l'origine delle y dell'entità $(-a)$, cioè a sia l'ordinata del vertice della catenaria abbiamo $c = 0$ per cui:

$$10) \qquad y = \sqrt{a^2 + s^2}$$

sostituendo nella (7) si ha:

$$11) \qquad T = q\,y$$

questa importante relazione permette di affermare che, con i riferimenti scelti per gli assi, « la tensione in un punto della catenaria è pari al peso di un pezzo di catena di peso uniforme q lungo quanto l'ordinata y di quel punto ». Cioè « *Le ordinate dei punti, in opportuna scala, rappresentano le tensioni* ».

La (10) si può risolvere rispetto ad a e rispetto ad s ed otteniamo

$$10') \qquad a = \sqrt{y^2 - s^2}$$

$$10'') \qquad s = \sqrt{y^2 - a^2}$$

dividendo membro a membro le equazioni (6) si ha:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a}$$

e per la (10'')

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a}$$

cioè

$$dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{y^2 - a^2}}$$

ed anche:

$$12) \qquad x = a \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - a^2}}$$

Per effettuare l'integrazione della (12) porre:

$$t = \sqrt{y^2 - a^2} + y \qquad \sqrt{y^2 - a^2} = -y + t$$

per cui quadrando e semplificando $\quad y = \dfrac{a^2 + t^2}{2t}$

ed anche $\quad \sqrt{y^2 - a^2} = -\dfrac{a^2 + t^2}{2t} + t = \dfrac{t^2 - a^2}{2t}$; $dy = \dfrac{t^2 - a^2}{2t^2}\,dt$

sostituendo nella (12) si ha:

$$x = a \int \frac{\frac{t^2 - a^2}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2 - a^2}{2t}} = a \int \frac{dt}{t} = a \log t + c$$

cioè:

$$X = a\left(\log\left[\left(\sqrt{y^2 - a^2}\right) + y\right] + c\right)$$

$$X = a\left(\log a\left[\frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}\right] + c\right)$$

$$X = a\left(\log\left[\frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}\right] + \log a + c\right)$$

essendo $a =$ costante poniamo $(\log . a + c = c_1)$

$$X = a\left(\log\left[\frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}\right] + c_1\right)$$

Dovendo essere per $x = 0$; $y = a$ avremo che

$\dfrac{y}{a} = 1$; $\lg 1 = 0$ per cui $c_1 = 0$

$$13) \qquad X = a \log\left[\frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}\right]$$

ed anche:

$$\frac{X}{a} = \log\left[\frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}\right]$$

$$e^{\frac{x}{a}} = \frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}$$

$$\left(e^{\frac{x}{a}} - \frac{y}{a}\right)^2 = \left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1 = e^{\frac{2x}{a}} - 2\frac{y}{a}e^{\frac{x}{a}} + \left(\frac{y}{a}\right)^2$$

$$2e^{\frac{x}{a}}\frac{y}{a} = e^{\frac{2x}{a}} + 1$$

$$y = a\,\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

ricordando le funzioni iperboliche:

$$14) \qquad y = a \cosh\left(\frac{X}{a}\right) \qquad y = \frac{H}{q} \cosh\left(\frac{X}{H/q}\right)$$

Le (14) sono le equazioni usuali della catenaria riferita ad un sistema di assi cartesiani x, y con origine distante a sulla verticale dal vertice della curva (vedi fig. 3)

Per la (11) e la (14)

$$\frac{T}{q} = \frac{H}{q} \cosh\left(\frac{X}{H/q}\right)$$

$$15) \qquad \frac{T}{H} = \cosh\left(\frac{X}{H/q}\right)$$

Per la (10) e la (14) abbiamo:

$$y = \frac{H}{q}\cosh\left(\frac{x}{H/q}\right) = \sqrt{s^2 + a^2} = \sqrt{s^2 + H^2/q^2}$$

per cui elevando a quadrato:

$$\left(\frac{H}{q}\right)^2 \cosh^2\left(\frac{x}{H/q}\right) = s^2 + \left(\frac{H}{q}\right)^2$$

cioè:

$$s^2 = \left(\frac{H}{q}\right)^2 \left[\cosh^2\left(\frac{x}{H/q}\right) - 1\right]$$

ricordando le proprietà delle funzioni iperboliche:

$$\cosh^2 x - 1 = \operatorname{senh}^2 x$$

otteniamo:

16) $$s = \frac{H}{q}\operatorname{senh}\left(\frac{x}{H/q}\right)$$

17) $$s = a \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

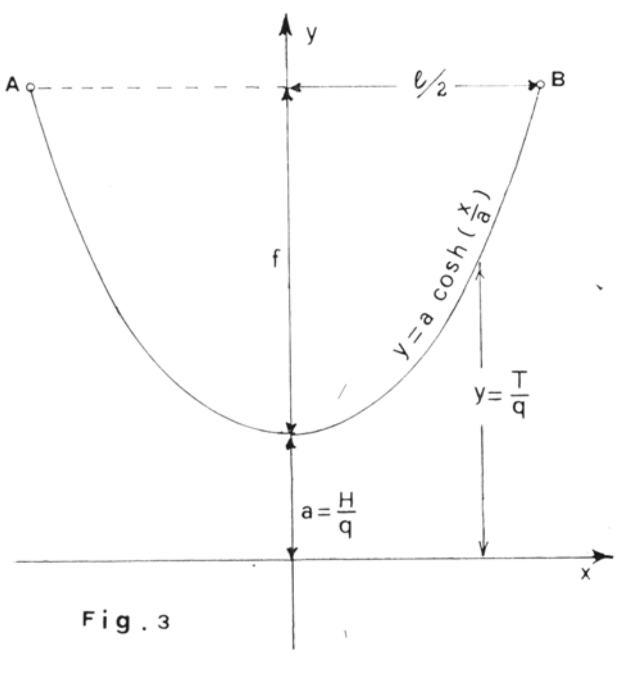


Fig. 3

Si noti che: $\dfrac{s}{a} = \operatorname{sen\,h} \dfrac{x}{a}$

a può rappresentare l'unità di misura lineare posto quindi $a = 1$

$s = \operatorname{sen\,h}(x) \qquad \dfrac{L}{2} = \operatorname{sen\,h}\left(\dfrac{l}{2}\right)$

Catenarie simmetriche (con appoggi a livello orizzontale)

Si abbia una catena o fune flessibile di peso uniformemente distribuito q (kg/ml), fissata in due punti a livello A e B distanti l e sia L la lunghezza della catena. (Dovrà essere $L > l$) avremo che per

$x = \dfrac{l}{2}$, $s = \dfrac{L}{2}$ perciò per le (16)

$$\frac{L}{2} = \frac{H}{q}\operatorname{senh}\frac{\ell/2}{H/q}$$

ed anche:

18) $$L = \frac{2H}{q}\operatorname{senh}\left(\frac{\ell}{2H/q}\right)$$

d'altra parte detta f la freccia della catenaria cioè la distanza del vertice della curva dalla retta A B del piano di appoggio si ha:

$$f = y_B - a = y_B - H/q \; ; \qquad x_B = \frac{\ell}{2} \; ;$$

$$f = \frac{H}{q}\cosh\left(\frac{\ell/2}{H/q}\right) - \frac{H}{q}$$

19) $$f = \frac{H}{q}\left[\cosh\left(\frac{\ell}{2H/q}\right) - 1\right]$$

19') $$f = a\left[\cosh\left(\frac{\ell}{2a}\right) - 1\right]$$

le espressioni di L e di f possono scriversi:

$$\operatorname{senh}\left(\frac{\ell}{2H/q}\right) = \frac{Lq}{2H}$$

$$\cosh\left(\frac{\ell}{2H/q}\right) = \frac{fq}{H} + 1$$

elevando a quadrato e sottraendo membro a membro:

$$\cosh^2\left(\frac{\ell}{2H/q}\right) - \operatorname{senh}^2\left(\frac{\ell}{2H/q}\right) = \left(\frac{fq}{H} + 1\right)^2 - \left(\frac{Lq}{2H}\right)^2$$

essendo:

$$\cos h^2 x - \operatorname{sen} h^2 x = 1$$

sviluppando i quadrati al secondo membro si ha:

$$1 = f^2\left(\frac{q}{H}\right)^2 + 2f\left(\frac{q}{H}\right) + 1 - \frac{L^2}{4}\left(\frac{q}{H}\right)^2$$

ed anche:

$$-\left(\frac{q}{H}\right)^2\left(\frac{L^2}{4} - f^2\right) + \frac{q}{H}2f = 0$$

cioè:

20) $$\frac{q}{H} = \frac{2f}{(L/2)^2 - f^2} = \frac{8f}{L^2 - 4f^2}$$

21) $$\boxed{a = \frac{H}{q} = \frac{L^2 - 4f^2}{8f}}$$

21') $$f = \sqrt{a^2 + (L/2)^2} - a$$

22) $$H = q\left(\frac{L^2 - 4f^2}{8f}\right) \quad \text{(per } f = L/2 \text{ si ha: } H=0\text{)}$$

formula di notevole interesse che fornisce direttamente e semplicemente la tensione H in funzione del peso distribuito q della lunghezza L e della freccia f.

Ricavando l dalla formula (18) si ha:

$$\ell = \frac{2H}{q}\ \text{argsenh}\left(\frac{L}{2H/q}\right)$$

sostituendovi la (21) otteniamo:

23) $$\boxed{\ell = \left(\frac{L^2 - 4f^2}{4f}\right)\ \text{argsenh}\ L\left(\frac{4f}{L^2 - 4f^2}\right)}$$

Formula che permette di correlazionare le sole grandezze geometriche L, f, ed l, indipendente da q ed H e dalla quale si può dedurre la seguente proprietà delle catenarie: « *Funi della stessa lunghezza nelle stesse condizioni di vincolo assumono la stessa configurazione di equilibrio indipendentemente dal peso del materiale di cui sono costituite* ».

Ricavando l dalla (19) e sostituendovi la (21) abbiamo:

24) $$\ell = \frac{L^2 - 4f^2}{4f}\ \text{argcosh}\left[\frac{8f}{L^2 - 4f^2} + 1\right]$$

$$\boxed{\ell = \left(\frac{L^2 - 4f^2}{8f}\right)\ \text{argcosh}\left(\frac{L^2 + 4f^2}{L^2 - 4f^2}\right)}$$

Valgono per questa formula le stesse considerazioni fatte per la (23).

La formula (21) possiamo scriverla nella forma:

$$\frac{(L/2)^2}{2f} - \frac{f}{2} = a$$

ed anche:

$$\frac{(L/2)^2}{f} = 2a + f = a + (a + f) = a + y_B$$

$$y_B = \frac{T_B}{q} = \frac{(L/2)^2}{f} - a = \frac{(L/2)^2}{f} - \left(\frac{1}{2}\frac{(L/2)^2}{f} - \frac{f}{2}\right)$$

25) $$\frac{T_B}{q} = \frac{L^2 + 4f^2}{8f}$$

26) $$T_B = q\frac{L^2 + 4f^2}{8f}$$

formula di notevole interesse che fornisce direttamente e semplicemente la tensione $T_B = T_A$ agli appoggi in funzione del peso distribuito q, della lunghezza L della catena e della freccia f.

(*continua*)