Su alcuni aspetti delle curve funicolari

Corrado Brogi

2

Nella prima parte del nostro studio (*) abbiamo esposto come si ricavano le formule delle curve funicolari in generale e della catenaria in particolare, abbiamo dedotto alcune espressioni che correlazionano solo gli elementi geometrici della catenaria. I passaggi algebrici sono stati svolti dettagliatamente poiché riteniamo che tali sviluppi possano interessare i giovani allievi ingegneri, data l'importanza che l'argomento riveste nel campo della scienza delle costruzioni.

Sembra che alcune espressioni ricavate ed alcuni metodi di calcolo (in particolare l'operatore « ra » tabulato introdotto nel presente articolo) presentino interesse in campi più vasti di quelli qui esposti.

* Bollettino degli Ingegneri, n. 10, 1972.

I raggi di curvatura della catenaria

Dall'analisi matematica [1] si ha:

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}{y''}$$

dall'equazione (14) della catenaria si ha:

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$y' = \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$y'' = \frac{1}{a}\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

dividendo membro a membro la I e la III equazione si ha:

$$\frac{y}{y''} = a^2 \tag{37}$$

$$R = \frac{\left[1 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{a}\right)\right]^{3/2}}{y/a^2} = \frac{\left[\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)\right]^{3/2}}{y/a^2}$$

$$R = \frac{\left[\left(y/a\right)^2\right]^{3/2}}{y/a^2} = \frac{y^2}{a}$$

[1] Cfr. G. Sansone, *Lezioni di Analisi Matematica*, p. 306, Ed. Cedam, 1944.

cioè:

$$\boxed{R : y = y : a}$$

(l'ordinata y dell'equazione della catenaria è media proporzionale fra il raggio di curvatura in quel punto ed il parametro a).

Si può scrivere:

$$\boxed{R_B = \frac{(f+a)^2}{a}}$$

Nel vertice della catenaria $y = a$; $f = o$ per cui

$$\boxed{R_0 = a}$$

(Il raggio di curvatura nel vertice della catenaria è uguale al parametro a).

I rapporti fra gli elementi geometrici della catenaria

Come già esposto in nota alla formula (17), a può rappresentare l'unità di misura; ciò implica:

(43) $$\frac{s}{a} = \operatorname{senh}\frac{x}{a} \supset \frac{L}{2a} = \operatorname{senh}\frac{\ell}{2a}$$

(44) $$\frac{y}{a} = \cosh\frac{x}{a} \supset \frac{f}{a} = \left[\cosh\left(\frac{\ell}{2a}\right) - 1\right]$$

cioè ogni catenaria può essere rappresentata da una unica formula:

(45) $$\boxed{Y = \cosh X}$$

ed in generale:

(45') $$\boxed{\lambda = f(\theta)}$$

ove le grandezze geometriche X ; Y oppure λ ; θ sono espresse nell'unità di misura « a », variabile al variare delle caratteristiche della catenaria.

Da queste osservazioni è possibile calcolare tutti gli elementi geometrici di una catenaria quando ne sono noti due.

Dei tre elementi statici q ; H ; T è possibile calcolare il rapporto; quindi basta l'ulteriore cognizione di uno dei tre elementi statici per determinare gli altri due.

Abbiamo già trovato con le formule (21), (23), (24), la possibilità di risolvere il problema quando siano noti: L ed f, oppure a ed f; a ed l; a ed L. Per completare il quadro occorre risolvere la equazione della catenaria quando sono noti: l ed f oppure L ed l.

Confrontando la (43) con le (45) otteniamo:

$$\frac{L}{\ell} = \frac{L/2a}{\ell/2a} = \frac{\operatorname{senh}(\ell/2a)}{\ell/2a} =$$

$$= \frac{\operatorname{senh} X}{X} = \operatorname{rasenh} X$$

abbiamo introdotto il simbolo « ra » operatore del rapporto fra la funzione e la variabile, cioè:

$$\operatorname{rasenh} X = \frac{\operatorname{senh} X}{X} \; ; \quad \operatorname{ra}\log X = \frac{\log X}{X} \; ;$$

ed in generale:

(46) $$\boxed{\operatorname{ra} f(X) = \frac{f(X)}{X}}$$ [2]

ra = rapporto (ratio)

Estendiamo anche il simbolismo usato per le funzioni trigonometriche circolari alle funzioni iperboliche; cioè i simboli:

$\operatorname{vers}(X) = 1 - \cos X$ ("versine")
$\operatorname{covers}(X) = 1 - \operatorname{sen} X$ ("coversine")
$\operatorname{Havers}(X) = \frac{1}{2}(1 - \cos X)$ ("Haversine")

per analogia nelle formule che seguono intenderemo:

$\operatorname{versh}(x) = \cosh(x) - 1$ ("versine iperbolico")
$\operatorname{raversh}(X) = \frac{[\cosh(x) - 1]}{(X)}$ ("rapporto della versine iperbolica")
$\operatorname{arg\,raversh}\left(\frac{[\cosh(x) - 1]}{(x)}\right) = (x)$ ("argomento del rapporto della versine iperbolica")
$\operatorname{arg\,rasenh}\left(\frac{\operatorname{senh}(x)}{(x)}\right) = (x)$ ("argomento del rapporto seno iperbolico")

Si noti che l'estensione non è ortodossa, almeno nel suo significato etimologico, come non lo sono $\operatorname{sen} h(x)$ e $\cos h(x)$ in confronto a $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$.

Per quanto abbiamo esposto: $\frac{L}{\ell} = \operatorname{rasenh}(X)$

quindi da tavole che riportino le funzioni « ra » è possibile risalire alla $X = \frac{\ell/2}{a}$

ed anche: $a = \frac{\ell/2}{X}$

cioè:

(47) $$\boxed{a = \frac{\ell/2}{\operatorname{arg\,rasenh}(L/\ell)}}$$

[2] Al Convegno Nazionale 1972 di Ingegneria sismica, tenutosi a Firenze nei giorni 30 e 31 ottobre 1972, con la collaborazione del Collegio Ingegneri della Toscana, nel corso delle relazioni è emerso avere importanza formule del tipo $\frac{\operatorname{sen}\left(\pi \frac{\ell}{\lambda}\right)}{\left(\pi \frac{\ell}{\lambda}\right)}$ che nel nostro simbolismo assumono la forma: $\operatorname{rasen}\left(\pi \frac{\ell}{\lambda}\right)$ per cui la tabulazione di *ra sen x* può presentare utilità per gli studiosi del problema.

formula che permette di calcolare a e quindi le altre grandezze geometriche in funzione di L ed l.

Se invece sono note l ed f (il cui rapporto $f/l = n$ appare comunemente nei manuali relativi a dati tecnici sulle volte) consideriamo la formula (19'):

$$\frac{f}{a} = \cosh\left(\frac{\ell}{2a}\right) - 1$$

ed anche:

$$\frac{f/a}{\ell/2a} = \frac{\cosh(\ell/2a) - 1}{\ell/2a} = \text{raversh}(\ell/2a)$$

e, per quanto abbiamo esposto, da tavole che riportino la funzione « raversh (x) » è possibile risalire alla $x = \dfrac{l}{2a}$ e quindi $a = \dfrac{l/2}{x}$.

(48) $$\boxed{a = \frac{\ell/2}{\text{arg raversh}\,(2f/\ell)}}$$

formula che permette di calcolare a, e quindi le altre grandezze geometriche in funzione di f ed l.

Per comodità del lettore riportiamo un quadro delle principali formule discusse, nonché le tavole delle funzioni iperboliche interessate. Circa l'utilità di tali tavole si fa notare che permettono la risoluzione immediata di equazioni del tipo: [3]

$$\frac{H}{q\ell}\left(\cosh\frac{q\ell}{2H} - 1\right) = \frac{f}{\ell} = n$$

usualmente risolte per tentativi. Per risolvere $\frac{q\ell}{2H}$ essendo noto n basta scrivere l'equazione nella forma:

$$\frac{\cosh\left(\frac{q\ell}{2H}\right) - 1}{\left(\frac{q\ell}{2H}\right)} = 2n$$

cioè:

$$\text{raversh}\left(\frac{q\ell}{2H}\right) = 2n$$

per $n = \dfrac{1}{8}$; $2\,n = 0{,}25000$; nelle tavole troviamo:

$$0{,}49 = \text{argraversh}\ (0{,}24994)$$
$$0{,}50 = \text{argraversh}\ (0{,}25525)$$

per cui interpolando si ha: $\dfrac{ql}{2H} = 0{,}4901$.

[3] Cfr. O. Belluzzi, *Scienza delle Costruzioni*, vol. I, p. 152, Esercizio n. 81.

Retta tangente alla catenaria

Supponiamo di voler determinare le coordinate del punto comune alla catenaria ed alla retta ad essa tangente ed inclinata di α rispetto all'asse x.

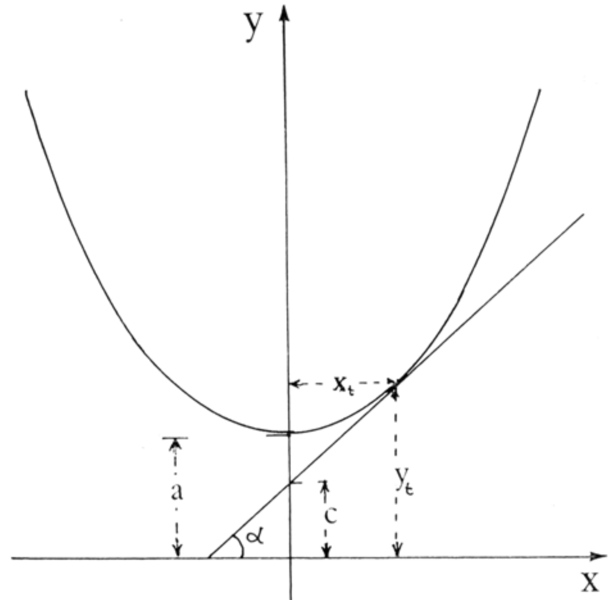


Fig. 4

Abbiamo:

$$y = \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$y' = \text{senh}\left(\frac{x}{a}\right) = \text{tang}\,\alpha$$
$$X_t = a\,\text{argsenh}\,(\text{tang}\,\alpha)$$
$$\text{senh}^2\left(\frac{X_t}{a}\right) = \text{tang}^2\alpha$$

e cioè per le note relazioni di trigonometria circolare ed iperbolica abbiamo:

$$\cosh^2\left(\frac{X_t}{a}\right) = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

ed anche

(49) $$\boxed{y_t = \frac{a}{\cos\alpha}}$$

formula che fornisce immediatamente l'ordinata y_t del punto comune di tangenza in funzione del parametro a della catenaria e del coseno dell'angolo α della retta.

Perciò le coordinate del punto di tangenza sono:

(50) $$\boxed{\begin{aligned} X_t &= a\ \text{argsenh}\,(\text{tang}\,\alpha) \\ Y_t &= a\,\frac{1}{\cos\alpha} \end{aligned}}$$

Cerchiamo ora l'ordinata del punto comune alla retta tangente ed all'asse y.

Poiché tale retta, in generale, ha per equazione:

$$Y = (\text{tang}\,\alpha)\,X + C$$

avremo: $$C = \frac{a}{\cos\alpha} - (\text{tang}\,\alpha)\,a\ \text{argsenh}\,(\text{tang}\,\alpha)$$

Fra tutte le rette tangenti alla catenaria, cerchiamo quella che passa per l'origine degli assi ($c = o$) cioè, dovrà essere:

$$1 = (\text{sen}\,\alpha_o)\ \text{argsenh}\ (\text{tang}\,\alpha_o)$$

ed anche:

$$(\text{tang}\,\alpha_o) = \text{senh}\left(\frac{1}{\text{sen}\,\alpha_o}\right) \tag{51}$$

da cui:
$\alpha = 56° \, 27' \, 57''$; sen $\alpha = 0{,}833556552$;
cosec $\alpha = 1/\text{sen}\ \alpha = 1{,}19967865$;
sen h (1/sen α) = tg α = 1,508879
cioè abbiamo:

$$\begin{aligned} Y_{t_o} &= a \cdot \sec \alpha_o \\ X_{t_o} &= a \cdot \text{cosec}\ \alpha_o \end{aligned} \tag{52}$$

Quindi se la retta per l'origine (o meglio il sistema di assi ruotati) forma un angolo inferiore a 56° 27' 57" la retta (l'asse x_1) non taglia la curva.

Le coordinate del punto di tangenza per $\alpha = 56° \, 27' \, 57''$ sono:

$$y_{to} = (1{,}8101705..)\ a$$
$$x_{to} = (1{,}19967865..)\ a$$

Retta secante la catenaria

Qualora l'angolo formato dalla retta uscente dall'origine sia maggiore di 56° 27' 57", la retta taglia la curva in due punti; le coordinate dei punti intersezione saranno le radici del sistema:

$$\begin{cases} Y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \\ Y = (\text{tang}\,\alpha)\ x \end{cases}$$

cioè abbiamo:

$$\text{tg.}\,\alpha \cdot x_c = a \cosh \frac{x_c}{a}$$

ed anche:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\cosh\left(\frac{x_c}{a}\right)}{\left(\frac{x_c}{a}\right)}$$

cioè:

$$(\text{tang}\,\alpha) = \text{ra}\cosh\left(\frac{x_c}{a}\right) \tag{53}$$

Per cui:

$$\begin{aligned} X_c &= a \cdot \text{arg ra cosh}\,(\text{tang}\,\alpha) \\ Y_c &= a \cdot \text{tang}\,\alpha \cdot \text{arg ra cosh}\,(\text{tang}\,\alpha) \end{aligned} \tag{54}$$

Esaminando i valori di « ra cos h (x) » riportati nella tabella è possibile rilevare come tale funzione ammetta un minimo per $x = 1{,}19967865..$ ove racosh(x) = 1,508879.., cioè da questa tabella, non solo è possibile trovare i due valori relativi ai due punti di intersezione, ma si può accertare che per valori di tang α = racosh(x) inferiori a 1,508879 non esistono soluzioni reali (retta esterna che non interseca la curva).

Relazioni fra gli elementi geometrici della catenaria

incogniti \ noti	solo a: $a=1$	solo a: $a=f$	solo a: $a=L$	solo a: $a=\ell$	$a;f$	$a;L$	$a;\ell$	$f;L$	$f;\ell$	$L;\ell$
$a =$	1	f	L	ℓ	a	a	a	$\frac{L^2-4f^2}{8f}$	$\frac{\ell/2}{\text{argversh}\left(\frac{f}{\ell/2}\right)}$	$\frac{\ell/2}{\text{arg ra senh}\left(\frac{L}{\ell}\right)}$
$f =$	$\sqrt{1+\left(\frac{L}{2}\right)^2}-1$; $\cosh\left(\frac{\ell}{2}\right)-1$	a	$0{,}118034\ a$	$0{,}127626\ a$	f	$\sqrt{a^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}-a$	$a\left(\cosh\left(\frac{\ell}{2a}\right)-1\right)$	f	f	$\frac{\ell/2}{X_a}\left[\cosh X_a - 1\right]$
$L =$	$2\sqrt{2f+f^2}$; $\text{senh}\left(\frac{\ell}{2}\right)$	$3{,}46402\ a$	a	$1{,}04190\ a$	$2\sqrt{2af+f^2}$	L	$2a\,\text{senh}\left(\frac{\ell}{2a}\right)$	L	$\frac{\ell}{X_a}\text{senh}\,X_a$	L
$\ell =$	$2\,\text{argsenh}\left(\frac{L}{2}\right)$	$2{,}633916\ a$	$0{,}9624\ a$	a	$2a\,\text{argsenh}\sqrt{\frac{2f}{a}+\left(\frac{f}{a}\right)^2}$	$2a\,\text{argsenh}\left(\frac{L}{2a}\right)$	ℓ	$\frac{L^2-4f^2}{4f}\,\text{argsenh}\left[\frac{4fL}{L^2-4f^2}\right]$	ℓ	ℓ
$R =$	$R_o = a$	$R_o = 4a$	$R_o = \frac{3}{4}a$	$R_o = 1{,}12763\ a$	$R_o = \frac{(a+f)^2}{a}$	$R_o = a\left[1+\left(\frac{L}{2a}\right)^2\right]$	$R_o = a\cosh^2\left(\frac{\ell}{2a}\right)$	$R_o = \frac{(L^2+4f^2)^2}{8f(L^2-4f^2)}$	$R_o = \frac{\frac{\ell}{2}\cosh^2\left(\text{argraversh}\left(\frac{2f}{\ell}\right)\right)}{\text{argraversh}\left(\frac{2f}{\ell}\right)}$	$R_o = \frac{\frac{\ell}{2}\left[1+\text{senh}^2\,\text{a.r.s.}\left(\frac{L}{\ell}\right)\right]}{\text{argrasenh}\left(\frac{L}{\ell}\right)}$

Tavola delle funzioni iperboliche

$\frac{1}{2}\frac{\ell}{a}$	$\frac{1}{2}\frac{L}{a}$	$\frac{f}{a}+1$	$\frac{1}{2}\frac{L}{\sqrt{R_0 R_B}}$	$2\frac{f}{\ell}$	$\frac{L}{\ell}$		tang α
arg. X	senh X	cosh X	tanh X	raversh x $=\left(\frac{\cosh x-1}{x}\right)$	rasenh x $=\left(\frac{\operatorname{senh} x}{x}\right)$	$\frac{f}{\ell}$	racosh x $=\left(\frac{\cosh x}{x}\right)$
0,00	0,00000	1,00000	0,00000	0,00000	1,00000		
.01	.01000	.00005	.01000	.00500	.00002		100,00500
.02	.02000	.00020	.02000	.01000	.00007	$\frac{1}{200}$	50,01000
.03	.03000	.00045	.02999	.01501	.00016		33,34833
.04	.04001	.00080	.03998	.02000	.00027	$\frac{1}{100}$	25,02000
.05	.05002	.00125	.04996	.02500	.00042		20,02500
.06	.06004	.00180	.05993	.03001	.00060		16,69668
.07	.07006	.00245	.06989	.03501	.00082	$\frac{1}{64}$	14,32073
.08	.08009	.00320	.07983	.04002	.00107	$\frac{1}{50}$	12,54002
.09	.09012	.00405	.08976	.04503	.00135		11,15614
.10	.10017	.00500	.09967	.05004	.00167	$\frac{1}{40}$	10,05004
0.11	0,11022	1,00606	0,10956	0,05505	1,00202		9,14596
.12	.12029	.00721	.II943	.06007	.00240	$\frac{1}{32}$	8,39341
.13	.13037	.00846	.12927	.06509	.00282		7,75740
.14	.14046	.00982	.13909	.07011	.00327		7,21297
.15	.15056	.01127	.14889	.07514	.00375	$\frac{1}{25}$	6,74180
.16	.16068	.01283	.15865	.080I7	.00428		6,33017
.17	.17082	.01448	.16838	.08521	.00482		5,96756
.18	.18097	.01624	.17808	.09024	.00541		5,64580
.19	.19115	.01810	.18775	.09528	.00603	$\frac{1}{20}$	5,35844
.20	.20134	.02007	.19738	.10034	.00668		5,10034
0,21	0,21155	1,02213	0,20697	0,10539	1,00737	$\frac{1}{18}$	4,86729
.22	.22178	.02430	.21652	.11045	.00809		4,65590
.23	.23203	.02657	.22603	.11551	.00884		4,46333
.24	.24231	.02894	.23550	.12058	.00963	$\frac{1}{16}$	4,28725
.25	.25261	.03141	.24492	.12565	.01045		4,12565
.26	.26294	.03399	.25430	.13073	.01130	$\frac{1}{15}$	3,97689
.27	.27329	.03667	.26362	.13582	.01219		3,83953
.28	.28367	.03946	.27291	.14092	.01312	$\frac{1}{14}$	3,71235
.29	.29408	.04235	.28213	.14602	.01408		3,59430
0,30	0,30452	1,04534	0,29131	0,15113	1,01507		3,48446
.31	.31449	.04844	.30044	.15625	.01609		.38205
.32	.32549	.05164	.30951	.16137	.01715		.28637
.33	.33602	.05495	.31852	.16650	.01825	$\frac{1}{12}$	.19681
.34	.34659	.05836	.32748	.17164	.01938		.11282
.35	.35719	.06188	.33638	.17679	.02054		.03394
.36	.36783	.06550	.34521	.18195	.02174		2,95975
.37	.37850	.06923	.35399	.187I2	.02297		.88982
.38	.38921	.07307	.36271	.19230	.02424		.82388
.39	.39996	.07702	.37136	.19748	.02554	$\frac{1}{10}$	.76159
.40	.41075	.08107	.37995	.20268	.02688		.70268
0,41	0,42158	1,08523	0,38847	0,20789	1,02825		2,64691
.42	.43246	.08950	.39693	.21310	.02966		.59406
.43	.44337	.09388	.40532	.21833	.03110	$\frac{1}{9}$	.54391
.44	.45434	.09837	.41364	.22357	.03258		.49630
.45	.46534	.10297	.42190	.22882	.03409		.45104
.46	.47640	.10768	.43008	.23408	.03564		.40800
.47	.48750	.11250	.43820	.23936	.03723		.36702
.48	.49865	.11743	.44624	.24464	.03885		.32798
.49	.50984	.12247	.45422	.24994	.04050	$\frac{1}{8}$	.29076
.50	.52110	.12763	.46212	.25525	.04219		.25525
0,51	0,53240	1,13289	0,46995	0,26057	1,04392		2,22136
.52	.54375	.13827	.47770	.26591	.04568		.18899
.53	.55516	.14377	.48538	.27126	.04748		.15805
.54	.56663	.14938	.49299	.27663	.04931		.12848
.55	.57815	.15510	.50052	.28200	.05119		.10018
.56	.58973	.16094	.50798	.28739	.05309		.07311
.57	.60137	.16690	.51536	.29280	.05504	$\frac{1}{7}$	.04719
.58	.61307	.17297	.52267	.29822	.05702		.02236
.59	.62483	.17916	.52990	.30366	.05904		1,99857
.60	.63665	.18547	.53705	.30911	.06109		.97578
0,61	0,64854	1,19189	0,54413	0,31458	1,06318		1,95392
.62	.66049	.19844	.55113	.32006	.06531		.93296
.63	.67251	.20510	.55805	.32556	.06747		.91286
.64	.68459	.21189	.56490	.33107	.06968	$\frac{1}{6}$	.89357
.65	.69675	.21879	.57167	.33660	.07192		.87507
.66	.70897	.22582	.57836	.34215	.07420		.85730
.67	.72126	.23297	.58498	.34772	.07651		.84026
.68	.73363	.24025	.59152	.35330	.07887		.82389
.69	.74607	.24765	.59798	.35891	.08126		.80818
.70	.75858	.25517	.60437	.36453	.08369		.79310
0,70	0,75858	1,25517	0,60437	0,36453	1,08369		1,793
.71	.77117	.26282	.61068	.37017	.08616		.778
.72	.78384	.27059	.61691	.37582	.08867		.764
.73	.79659	.27849	.62307	.38150	.09121		.751
.74	.80941	.28652	.62915	.38720	.09380		.738
.75	.82232	.29468	.63515	.39291	.09642		.726
.76	.83530	.30297	.64108	.39865	.09909	$\frac{1}{5}$	.714
.77	.84838	.31139	.64693	.40440	.10179		.703
.78	.86153	.31994	.65271	.41018	.10453		.692
.79	.87478	.32862	.65841	.41598	.10731		.681
.80	.888I1	.33743	.66404	.42179	.11013		.671
0,81	0,90152	1,34638	0,66959	0,42763	1,11299		1,662
.82	.91503	.35547	.67507	.43350	.11590		.6530
.83	.92863	.36468	.68048	.43938	.11884	$\frac{2}{9}$	.6442
.84	.94233	.37404	.68581	.44528	.12182		.6357
.85	.95612	.38353	.69107	.45121	.12484		.6276
.86	.97000	.39316	.69626	.45716	.12790		.6199
.87	.98398	.40293	.70137	.46314	.13101		.6125
.88	.99806	.41284	.70642	.46914	.13415		.6055
.89	1,01224	.42289	.71139	.47516	.13734		.5987
.90	.02652	.43309	.71630	.48121	.14057		.5923
0,91	1,04090	1,44342	0,72113	0,48728	1,14385		1,5861
.92	.05539	.45390	.72590	.49337	.14716		.5803
.93	.06998	.46453	.73059	.49950	.15051	$\frac{1}{4}$	.5747
.94	.08468	.47530	.73522	.50564	.16391		.5694
.95	.09948	.48623	.73987	.51182	.15735		.5644
.96	.11440	.49729	.74428	.51802	.16084		.5596
.97	.12943	.50851	.74870	.52424	.16436		.5551
.98	.14457	.5I988	.75307	.53049	.16793		.5509
.99	.15983	.53141	.75736	.53677	.17154		.5468
1,00	1,17520	1,54308	0,76159	0,54308	1,17520		.5430
1,01	1,19069	1,55491	0,76576	0,54942	1,17890		1,5395
.02	.20630	.56689	.76987	.55578	.18265		.5361
.03	.22203	.57904	.77391	.56217	.18644		.5330
.04	.23788	.59134	.77789	.56859	.19027	$\frac{2}{7}$	.5301
.05	.25386	.60379	.78181	.57504	.19415		.5274
.06	.26996	.61641	.78566	.58152	.19807		.5249
.07	.28619	.62919	.78946	.58803	.20204		.5226
.08	.30254	.64214	.79320	.59457	.20606		.5205
.09	.31903	.65525	.79688	.60114	.21012		.5185
1,10	1,33565	1,66852	0,80050	0,60774	1,21422		1,51683
.11	.35240	.68196	.80406	.61438	.21838		.51528
.12	.36929	.69557	.80757	.62104	.22258		.51390
.13	.38631	.70934	.81102	.62774	.22682		.51269
.14	.40347	.72329	.81441	.63446	.23112		.51166
.15	.42078	.73741	.81775	.64123	.23546		.51080
.16	.43822	.75171	.82104	.64803	.23985		.51009
.17	.45581	.76618	.82427	.65485	.24428		.50956
.18	.47355	.78083	.82745	.66172	.24877	$\frac{1}{3}$	.50917
.19	.49143	.79565	.83058	.66861	.25330		.50895
.20	.50946	.81066	.83365	.67555	.25788		.50888
1,21	1,52764	1,82584	0,83668	0,68251	1,26252		1,50896
.22	.54598	.84121	.83965	.68952	.26720		.50919
.23	.56447	.85676	.84258	.69655	.27193		.50956
.24	.58311	.87250	.84546	.70363	.27671		.5I008
.25	.60192	.88842	.84828	.71074	.28154		.51074
.26	.62088	.90454	.85106	.71789	.28642		.51154
.27	.64001	.92084	.85308	.72507	.29135		.51247
.28	.65930	.93734	.85648	.73230	.29633		.51355
.29	.67876	.95403	.85913	.73956	.30136		.51475
.30	.69838	.97091	.86172	.74686	.30645	$\frac{3}{8}$	.51609
1,31	1,71818	1,98800	0,86428	0,75420	1,31159		1,51755
.32	.73814	2,00528	.86678	.76157	.31678		.51915
.33	.75828	.02276	.86925	.76899	.32202		.52087
.34	.77860	.04044	.87167	.77645	.32731		.52272
.35	.79909	.05833	.87405	.78395	.33266		.52469
.36	.81977	.07643	.87639	.79149	.33806		.52678
.37	.84062	.09473	.87869	.79907	.34352	$\frac{2}{5}$	.52900
.38	.86166	.11324	.88095	.80670	.34903		.53133
.39	.88289	.13196	.88317	.81436	.35459		.53379
.40	.90430	.15090	.88535	.82207	.36022		.53636
1,41	1,92591	2,17005	0,88749	0,82982	1,36589		1,53904
.42	.94770	.18942	.88960	.83762	.37162		.54184
.43	.96970	.20900	.89167	.84546	.37741		.54476
.44	.99188	.22881	.89370	.85335	.38325	$\frac{3}{7}$	.54779
.45	2,01427	.24884	.89569	.86127	.38915		.55093
.46	.03686	.26910	.89765	.86925	.39511		.55418
.47	.05965	.28958	.89958	.87727	.40113		.55754
.48	.08265	.31029	.90147	.88533	.40720		.56101
.49	.10586	.33123	.90332	.89345	.41333		.56459
.50	.12928	.35241	.90515	.90161	.41952		.56827

per x = [illegible] racosh x = [illegible] (valore minimo)

$\frac{1}{2}\frac{\ell}{a}$	$\frac{1}{2}\frac{L}{a}$	$\frac{f}{a}+1$	$\frac{1}{2}\frac{L}{\sqrt{R_a\ R_B}}$	$2\frac{f}{\ell}$	$\frac{L}{\ell}$		tang α
arg X	senh X	cosh X	tanh X	raversh X $=\left(\frac{\cosh X-1}{X}\right)$	rasenh X $=\left(\frac{\operatorname{senh} X}{X}\right)$	$\frac{f}{\ell}$	racosh X $=\left(\frac{\cosh X}{X}\right)$
1,50	2,12928	2,35241	0,90515	0,90161	1,41952		1,56827
.51	.15291	.37382	.90694	.90981	.42577		.57207
.52	.17676	.39547	.90870	.91807	.43208		.57597
.53	.20082	.41736	.91042	.92630	.43845		.57997
.54	.22510	.43949	.91212	.93473	.44487		.58408
.55	.24961	.46186	.91379	.94313	.45136		.58830
.56	.27434	.48448	.91542	.95159	.45791		.59261
.57	.29930	.50735	.91703	.96009	.46452		.59704
.58	.32449	.53047	.91860	.96865	.47120		.60156
.59	.34991	.55384	.92015	.97726	.47793		.60619
.60	.37557	.57746	.92167	.98592	.48743		.61092
1,61	2,40146	2,60135	0,92316	0,99463	1,49159	$\frac{1}{2}$	1,61574
.62	.42760	.62549	.92462	1,00339	.49852		.62068
..65	.50746	.69951	.92886	.03001	.51968		.63607
.67	.56196	.75021	.93155	.04803	.53411		.64683
1.70	.64563	.82832	.93541	.07548	.55625		1,66371
.75	.79041	.96419	.94138	.12239	.59452		.69382
1,80	.94217	3,10747	.94681	.17082	.63454		.72637
1,90	3,26816	.41773	.95624	.27249	.72009	$\frac{2}{3}$	.79881
2,00	.62686	.76220	.96403	.38110	.81343		1,88110
.10	4,02186	4,14431	.97045	.49729	.91517		.97348
.20	.45711	.56791	.97574	.62178	2,02596		2,07632
.30	.93696	5,03722	.98010	.75531	.14651		.19010
.40	5,46623	.55695	.98367	.89873	.27760	1	.31539
.50	6,05020	6,13229	.98661	2,05292	.42008		.45292
3,00	10,01787	10,06766	.99505	3,02255	3,33929		3,35589
π	11,54874	11,59195	0,99627	3,37152	3,67608	2	3,68983
3,50	16,54263	16,57282	0,99818	4,44938	4,72646	3	4,73509
4,00	27,28992	27,30823	.99933	6,57706	6,82248	4	6,82706
.50	45,00301	45,01412	.99975	9,78092	10,00067	5	10,00313
5,00	74,20321	74,20995	.99991	14,64199	14,84064		14,84198

e = 2,71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 ...

log e = 0,43429 44819 03251 82765 11289 18916 60508 22943 ...

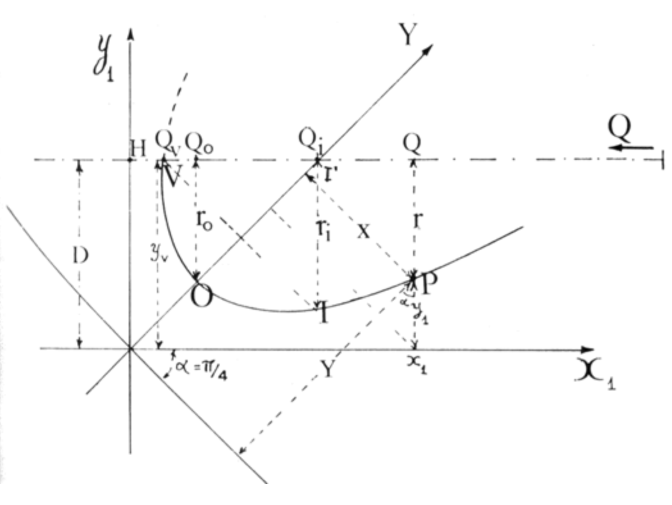
l_n 10 = 2,30258 50929 94045 68401 79914 54684 36420 76011 ...

π = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41871 ...

Parte II

Il cambio di coordinate (caso particolare di $\alpha = \pi/4$)

Consideriamo una funzione riferita agli assi $X\ ;\ Y$, e sia $P = (X\ ;\ Y)$ un punto generico di tale funzione. Supponiamo che gli assi subiscano una ruotazione intorno all'origine, sia α l'angolo compreso fra gli assi X ed x_1; supponiamo di voler trovare le coordinate di P nel nuovo sistema.



Avremo:

(1) $\begin{cases} X = x_1 \cos\alpha - y_1 \operatorname{sen}\alpha \\ Y = x_1 \operatorname{sen}\alpha + y_1 \cos\alpha \end{cases}$

(1') $\begin{cases} x_1 = X\cos\alpha + Y \operatorname{sen}\alpha \\ y_1 = Y\cos\alpha - X \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$

Le equazioni (1) ed (1') permettono di passare dal sistema $X\ ;\ Y$ al sistema $x_1\ ;\ y_1$ quando la posizione reciproca sia come in figura.

Supponiamo ora che i punti della linea rappresentativa della funzione $y=f(x)$ ci siano pervenuti per rilievo diretto e siano riferiti ad un asse Q (quote) ed a raggi r misurati ortogonalmente a Q. L'asse Q non passerà in generale per l'origine delle nostre coordinate, perciò penseremo di ruotare gli assi $X\ ;\ Y$ di un angolo α tale che x_1 divenga parallelo a Q e conseguentemente y_1 parallelo ad r e sia D la distanza (per ora incognita) fra x_1 e Q; e sia H la quota (anch'essa incognita) del punto comune alla y_1 ed alla retta Q.

Avremo: (vedi figura)

(2) $\begin{cases} x_1 = H - Q \\ y_1 = D - r \end{cases}$

sommando e sottraendo le (2) si ha:

(2') $\begin{cases} (x_1 + y_1) = (H + D) - (Q + r) \\ (x_1 - y_1) = (H - D) - (Q - r) \end{cases}$

sommando e sottraendo le (1') si ha:

(3) $\begin{cases} (x_1 + y_1) = (X + Y)\cos\alpha - (X - Y)\operatorname{sen}\alpha \\ (x_1 - y_1) = (X - Y)\cos\alpha + (X + Y)\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$

Nel caso particolare che sia $\alpha = \pi/4 = 45°$, si ha: sen α = cos $\alpha = 1/2\ \sqrt{2}$; perciò le (3) diventano:

(3') $\begin{cases} (x_1 + y_1) = Y\sqrt{2} \\ (x_1 - y_1) = X\sqrt{2} \end{cases}$

confrontando con le (2') si ha:

(4) $\begin{cases} X = \left[(H - D) - (Q - r)\right]\frac{1}{\sqrt{2}} \\ Y = \left[(H + D) - (Q + r)\right]\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

È bene tener presente che H e D sono costanti; poniamo

$K_1 = (H + D)\frac{1}{\sqrt{2}}$; $K_2 = (H - D)\frac{1}{\sqrt{2}}$;

avremo:

(4') $\begin{cases} X = K_2 - (Q - r)\frac{1}{\sqrt{2}} \\ Y = K_1 - (Q + r)\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Supponiamo che la curva sia simmetrica rispetto all'asse delle Y e che ammetta un minimo nel vertice, cioè per $X = o$ si abbia il vertice sulla Y. Vi sarà un particolare valore di $(Q+r)$ ½ $\sqrt{2}$ (che indicheremo con Q_o ed r_o) tale da soddisfare le coordinate del vertice. Poiché K_1 è costante, essendo $Y_o =$ minimo, dovrà essere $(Q_o + r_o)\, 1/\sqrt{2} =$ = massimo. Cioè sommando le quote con i rispettivi raggi $(Q+r)$ potremo individuarne il valore massimo e quindi trovare la quota ed il raggio del vertice della curva.

In tale punto $(X = o)$ dalle (4') si ha:

ed anche: $$0 = K_2 - (Q_o - r_o)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$K_2 = \frac{(Q_o - r_o)}{\sqrt{2}} = \frac{(H - D)}{\sqrt{2}}$$

abbiamo cioè: $$\boxed{(H - D) = (Q_o - r_o)}$$

(5)

Consideriamo l'asse Q: esso incontra in I' alla quota Q_i l'asse Y, e sia r_i il raggio che incide alla curva da Q_i, quindi l'asse Q incontra in V la curva e sia Q_v la quota, necessariamente $r_v = o$.

Nel caso particolare di $\alpha = 45°$ avremo le seguenti relazioni:

$$Q_v - Q_i = r_i$$

cioè:

$$Q_v = r_i + Q_i$$

cioè: V ed I sono simmetrici rispetto ad Y, quindi hanno la stessa ordinata Y e l'ascissa X uguale, ma di segno opposto. Poiché dalla (5) è noto K_2, dovrà essere: $X_i = - X_v$ (vedi figura)
cioè:

$$X_i = -X_v = \left[K_2 - (Q_i - r_i)\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = -\left[K_2 - (Q_v - r_v)\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{r_i}{\sqrt{2}}$$

$$2K_2 = (Q_v + Q_i - r_i)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2(Q_o - r_o)}{\sqrt{2}}$$

Ed anche, essendo:

$$Q_i = (H - D) = K_2\sqrt{2} = (Q_o - r_o)$$

(6) $$\boxed{Q_i = Q_o - r_o}$$

noto Q_i e quindi r_i si ha inoltre:

(7) $$\boxed{Q_v = Q_i + r_i} \quad ; \quad r_v = 0$$

Note le quote ed i raggi di tre punti caratteristici come Q ; V ; I è possibile trovare gli elementi della curva; infatti:

(8) $$\frac{\ell}{2} = \frac{r_i}{\sqrt{2}}$$

(9) $$f = r_o\sqrt{2} - \frac{r_i}{\sqrt{2}}$$

(10) $$\boxed{\frac{f}{\ell/2} = \frac{2r_o}{r_i} - 1}$$

Se la curva è una catenaria si ha:

(11) $$\frac{f}{\ell/2} = \frac{\cosh(\ell/2a) - 1}{(\ell/2a)} = \text{raversh}(\ell/2a)$$

cioè:

(11') $$\boxed{\frac{\ell/2}{a} = \text{argraversh}\left(\frac{f}{\ell/2}\right)}$$ (noto dalle nostre tavole)

ed anche:

$$\boxed{a = \frac{\ell/2}{\text{arg raversh}(f/\frac{\ell}{2})}}$$

quindi:

(12) $$\boxed{a = \frac{r_i\sqrt{2}}{2\,\text{argraversh}\left(\frac{2r_o}{r_i} - 1\right)}}$$

Noto il parametro a e quindi:

(13) $$\boxed{Y_v = Y_i = a\cosh\left(\frac{\ell}{2a}\right)}$$

e possibile calcolare K_1

$$K_1 = \left(Y_i + \frac{Q_i + r_i}{\sqrt{2}}\right) = \left(Y_v + \frac{Q_v}{\sqrt{2}}\right)$$

(14) $$\boxed{K_1 = a\cosh\left(\frac{\ell}{2a}\right) + \frac{Q_v}{\sqrt{2}}}$$

e sostituendo a K_1 e K_2 i loro valori avremo dalla (14) e dalla (5)

(15) $$\begin{cases} (H - D) = (Q_o - r_o) \\ (H + D) = a\sqrt{2}\cosh\left(\frac{\ell}{2a}\right) + Q_v \end{cases}$$

sommando e sottraendo si ha:

(16) $$\boxed{\begin{cases} H = \frac{1}{2}\left[a\sqrt{2}\cosh\left(\frac{\ell}{2a}\right) + Q_v + Q_o - r_o\right. \\ D = \frac{1}{2}\left[a\sqrt{2}\cosh\left(\frac{\ell}{2a}\right) + Q_v - Q_o + r_o\right. \end{cases}}$$

Questa formula fornisce la posizione della retta Q rispetto al nostro sistema di riferimento e quindi il problema è risolto.

Per organizzare i calcoli si procede come segue:

1. si calcola $(Q+r)$ per tutti i punti e si individua Q_o ed r_o (max)
2. si calcolano $(Q+r)$ e $(Q-r)$, per tutti i punti
3. si calcolano $(H-D)$ e $(H+D)$ (vedi formula 15)
4. si calcolano X ed Y con la formula (4): in questo modo abbiamo riportato i dati del rilievo nelle ordinate X ed Y

5. assunta la stessa ascissa X sopra calcolata, si calcola nuovamente la Y_c: $Y_c = a \cosh\left(\frac{X}{a}\right)$ come se fosse una catenaria a 45°, quindi si verificano gli scostamenti $Y - Y_c$

Nell'opera già citata di W. Ferri, M. Fondelli, P. Franchi, F. Greco, « Il rilevamento fotogrammetrico della cupola di S. Maria del Fiore in Firenze », I.G.M., 1971, sono riportate le coordinate « strumentali » dei punti rilevati, approssimate al centesimo di millimetro in scala 1 : 200, cioè a due millimetri reali. I punti distano in asse z di cm. 50. A fianco di tali dati sono riportate le grandezze: « Altezza z » che dovrebbe corrispondere alla nostra Q, « Raggio R » che dovrebbe corrispondere al nostro « r ».

Sulla base di questi ultimi elementi è stato impostato un primo calcolo di confronto per il cordolo n. 3. Da tale studio è emerso che il punto di massimo $Q+r$ effettivo è di poco superiore al punto che porta la quota 79,96 m.; che l'asse di riferimento è leggermente sghembo rispetto al piano della curva; che la curva di errore (nell'ordine di qualche centimetro) forma una esse allungata; che nel calcolo occorre spingere al massimo le cifre decimali (noi abbiamo ricalcolato i $\cos h(x/a)$ di controllo utilizzando il logaritmo di e con dieci cifre decimali, cioè praticamente undici essendo zero l'undicesima cifra, anziché interpolare le tavole dei coseni iperbolici).

Pur essendo meravigliosa la corrispondenza fra le coordinate di rilievo e le coordinate della catenaria, non riteniamo opportuno pubblicare, almeno per ora, questi elementi numerici, perché nei calcoli abbiamo imposto l'angolo $\alpha = \pi/4$ che ci proveniva da considerazioni non trattate in questo articolo.

Ci ripromettiamo di affinare il sistema di calcolo possibilmente utilizzando l'elaboratore elettronico.

Resta in noi l'ammirazione per la precisione con la quale il genio del Brunelleschi ha saputo realizzare « materialmente » le curve del suo Cupolone.

BIBLIOGRAFIA

O. Belluzzi, *Scienza delle costruzioni,* Ed. Zanichelli, Bologna, 1948.

B. Caldonazzo, *Lezioni di meccanica razionale*, Ed. Universitaria, Firenze, 1946.

E. Daniele, *Lezioni di meccanica razionale*, Ed. Vallerini, Pisa, 1947.

N. Faletti, *Trasmissione e distribuzione dell'energia elettrica*, Ed. Patron, Bologna, 1963.

B. Finzi, P. Udeschini, *Esercizi di meccanica razionale*, Ed. Tamburi, Milano, 1969.

C. Genesio - E. Volta, *Impianti elettrici*, Ed. Patron, Bologna, 1947.

Levi - Civita - Amaldi, *Compendio di meccanica razionale*, Ed. Zanichelli, Bologna, 1965.

G. Muzio, *Calcolo meccanico delle linee elettriche,* « L'Elettrotecnica », nov. 1955, n. 11.

A. Pignedoli, *Complementi di statica,* Ed. Cedam, Padova, 1966.

G. Silva, *Studio meccanico dei conduttori delle linee aeree*, « L'Elettrotecnica », sett., ott. 1931, nn. 25-16-29-30.

E. Timoshenko e Dott. Yong, *Meccanica applicata,* Ed. Bordighieri, Torino, 1957.

L. J. Comrie, F.R.S. *Chambers's shorter Six-figure matematical tables*, W. & R. Chambers' LTD. Printed in Great Britain by T. and A. Constable LTD. Hopetoun street Printers to University of Edinburgh, 1971.

C. R. C., *Standard Matematical tables*, The Chemical Rubber Co., Cleveland, Ohio, 1969.