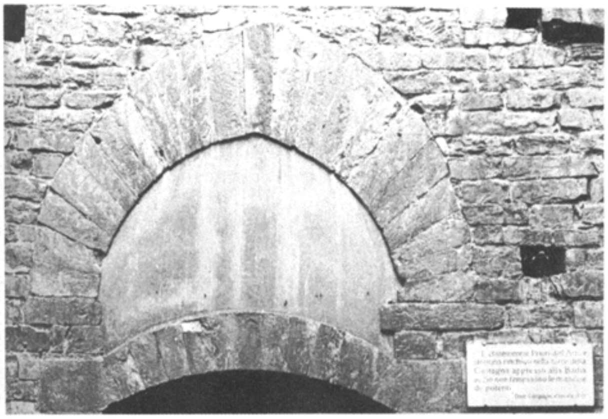
Su alcuni aspetti delle curve funicolari

Corrado Brogi



Premessa

Nel presentare il primo articolo del nostro studio dicevamo [1]: « Poiché riteniamo che l'armonia geometrica di un'opera sia intimamente connessa alla sua funzione statica, presentiamo in questo primo articolo uno studio sulle curve funicolari in generale e sulla catenaria in particolare... ».

Forse non è inutile ora chiarire che tutta la nostra opera non è altro che la traduzione in simboli matematici moderni, anzi modernissimi (pare che l'operatore « ra » non sia stato usato prima da altri autori) delle linee statiche (funi brande e non solo funi brande) usate dagli antichi maestri.

In questo articolo presentiamo le fotografie di alcuni archi antichi e le premesse per lo studio scientifico della crettologia.

Catenarie passanti per un punto assegnato

Dato un sistema coordinato di assi cartesiani ortogonali, sia:

$$A \equiv (x_A ;\ y_A)$$

un punto riferito a tale sistema, trovare quali catenarie di equazione:

$$y = a \cosh \left(\frac{x}{a} \right) \quad (1\text{-}14)$$

riferite allo stesso sistema di assi passano per quel punto. Condizione necessaria e sufficiente affinché A appartenga ad una linea è che le coordinate di A soddisfino l'espressione di tale linea. Cioè:

$$y_A = a \cosh \left(\frac{x_A}{a} \right)$$

dividendo per x_A si ha:

$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{\cosh \left(\frac{x_A}{a} \right)}{\left(\frac{x_A}{a} \right)} = \text{ra} \cosh \left(\frac{x_A}{a} \right)^{(2)}$$

$$\left(\frac{x_A}{a} \right) = \text{argracosh} \left(\frac{y_A}{x_A} \right)$$

per cui:

$$(1) \qquad a = \frac{x_A}{\text{argracosh} \left(\frac{y_A}{x_A} \right)}$$

Dalle tavole delle funzioni iperboliche che riportino racosh x [3]), si nota che racosh x ammette un minimo per $x = 1{,}19967864...$ ove racosh $x = 1.50887956...$ cioè per $y_A/x_A < 1{,}50887956...$ non si hanno soluzioni reali, mentre per $y_A/x_A > 1{,}50887956$ si hanno due soluzioni [4]).

Esistono quindi due catenarie passanti per quel punto, riferite allo stesso sistema di assi ed aventi la formula: $y = a \cosh (x/a)$. (I due valori di a si ottengono dalla formula (1) sostituendovi i due valori di argcosh (y_A/x_A)).

Può apparire strano che, un punto determini due catenarie cioè che essendo incognita il solo parametro a vi siano due soluzioni. Infatti nell'equazione del cerchio al centro; $x^2 + y^2 = R^2$, date le coordinate di un punto si ha un solo valore assoluto di R; analogamente per la parabola: $y = mx^2$ ove $m = y_A/x_A^2$.

Nella catenaria invece pur avendosi come incognita il solo parametro a si hanno due soluzioni per ogni punto del piano riferito agli assi x, y.

Interessante notare che:

$$y_A = a_1 \cosh (x_A/a_1) = a_2 \cosh (x_A/a_2)$$

supponiamo di considerare tutti i punti della curva di parametro a_1, non vi sarà fra essi un punto Q per cui:

$$y_Q = a_1 \cosh (y_Q/a_1) = a_3 \cosh (y_Q/a_3)$$

infatti racosh x ammette due soli valori uguali, per:

$o < x < 1{,}19967864$; si ha: $\infty >$ racosh $(x) > 1{,}50887956$ e per $1{,}19967864 < x < \infty$ si ha: $1.50887956 <$ racosh $(x) < \infty$.

Si noti infine che punti del piano compresi fra l'asse delle ascisse e le rette $y = \pm\ 1{,}50887956...\ (x)$ non possono appartenere a catenarie di equazione

$$y = a \cosh \left(\frac{x}{a} \right)$$

[1]) La pubblicazione ebbe inizio sui Bollettini N. 10 e 12 dell'anno 1972.

[2]) Cfr. Bollettino N. 12 anno '72.

[3]) Cfr. Bollettino Ingegneri N. 12 anno 1972 pag. 16.

[4]) Se le radici di una equazione risultano ricavabili in funzione di raf(x), il numero delle radici dipende dai massimi e minimi ammessi dalla funzione raf(x).

ESEMPIO NUMERICO

Dati gli assi o x y trovare le equazioni delle catenarie passanti per il punto $x_A = 5$; $y_A = 8$; $y_A/x_A = 8/5 = 1,6$

$$\text{argracosh } (1,6) = \begin{cases} 0,888120357 \\ 1,576576534 \end{cases}$$

$a_1 = 5,629867575$

$a_2 = 3,171428657$

$$y = 5,629867575 \cosh \frac{5}{5,629867575} \simeq 8$$

$$y = 3,171428657 \cosh \frac{5}{3,171428657} \simeq 8$$

a_1^2 senh $(x_A/a_1) - a_2^2$ senh (x_A/a_2) = area del cappio $AO_1A_1O_2A = 37,41182964...$ [5]).

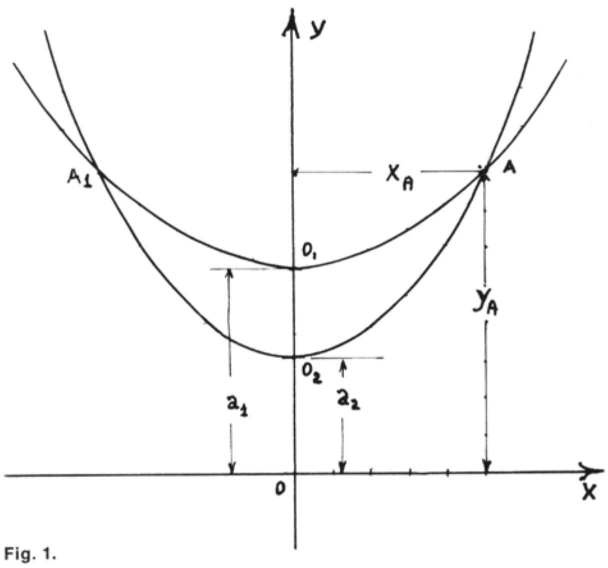


Fig. 1.

Si vuole ora trovare l'equazione generica di tutte le catenarie aventi lo stesso asse y e passanti per il punto A.

Per ogni x determinato troviamo, nei limiti sopradetti, due catenarie, tale asse x differirà della distanza d da un asse x_o preso come riferimento, cioè avremo:

$$\frac{y_A \pm d}{x_A} = \frac{\cosh\left(\frac{x_A}{a}\right)}{\left(\frac{x_A}{a}\right)}$$

$$\frac{x_A}{a} = \text{argracosh}\left(\frac{y_A \pm d}{x_A}\right)$$

aumentando o diminuendo $\frac{y_A}{x_A}$ della quantità $\frac{\pm d}{x_A}$ ci avviciniamo o ci allontaniamo dal valore limite 1,50887956...: quindi vi sarà un valore limite di d oltre il quale nessuna catenaria può passare per il punto A (ed il suo simmetrico). Se assumiamo come asse x_o, l'asse per cui si ha il limite, per d = o si ha una sola catenaria, quindi a partire da x_o gli assi x sono sempre più distanti dal punto A, cioè si hanno le due soluzioni reali solo se $d > o$.

Per $x = x_o$ $(d = o)$ sia a_o il parametro; per ogni x avremo:

$$\left.\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}\right\} = \frac{x_{oA}}{\text{argracosh}\left(\frac{y_A + d}{x_{oA}}\right)}$$

che è la formula cercata e che può scriversi:

$$\left.\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}\right\} = \frac{x_{oA}}{\text{argracosh}\left(1,50887956 + \frac{d}{x_{oA}}\right)}$$

poiché:

$$a_2 < a_o < a_1$$

ed anche:

$$a_2 < a_o + d < a_1$$

potremmo porre $a_o = 1$ (assunto come unità di misura)

$$\cos\gamma < \frac{a_o + d}{a_1} < 1$$

per d tendente all' ∞ argracosh $\left(\frac{y_A + d}{x_{oA}}\right)$ tende sia a zero sia all'infinito per cui $a_1 = \infty$; $a_2 = o$ cioè le due catenarie degenerano: la prima in tutte le rette parallele all'asse x fra cui quella passante per A (e per il suo simmetrico); l'altra in tutte le rette parallele all'asse y fra cui quelle passanti rispettivamente per A e per il suo simmetrico.

Da quanto esposto possiamo dedurre che internamente al cappio delimitato dalle due catenarie riferite allo stesso sistema di assi e passanti per lo stesso punto esiste sempre una catenaria limite il cui asse x_o è senzaltro più vicino alle due catenarie [6]). Quindi, come vedremo nel problema della parete [7]), l'arco deve essere a distanza non inferiore di a_o dal limite superiore.

Volendo calcolare la differenza $a_1 - a_2$ si ha:

$$a_1 - a_2 = a_1 (1 - \cos\gamma) = a_1 \text{ vers } \gamma$$

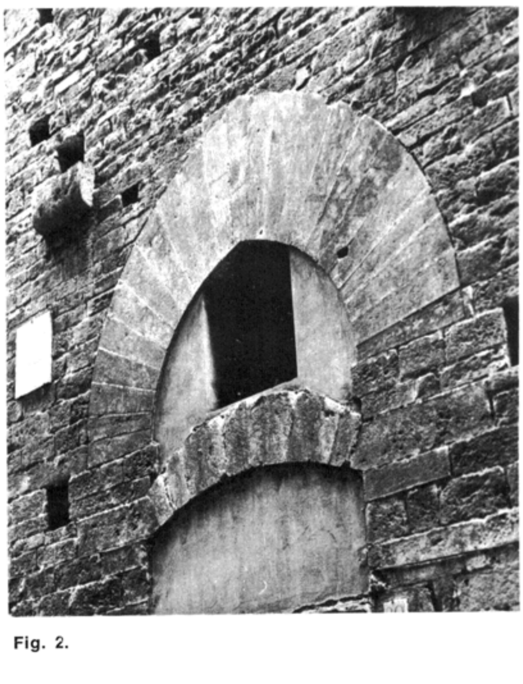


Fig. 2.

Catenarie e catenoidi

Dati tre assi cartesiani ortogonali coordinati x; y; z, consideriamo il piano mobile x_1; y_1 ove originariamente x_1 sia parallelo ad x ed y_1 sia parallelo ad y.

---

[5]) L'area sottesa fra la catenaria e l'asse delle x e data dal prodotto del modulo a per la lunghezza della curva L: S = aL.

[6]) Le altre catenarie che passano per il punto A ed il suo simmetrico hanno l'asse y in comune, ma non sono riferite allo stesso asse x nella formula $y = a \cosh \frac{x}{a}$, come le due catenarie trovate.

[7]) Vedi in seguito.

Supponiamo di proiettare ortogonalmente su xy le figure geometriche giacenti su x_1y_1 nelle varie posizioni che assumerà tale piano mobile.

Abbiasi una catenaria su x_1y_1 di equazione $y_1 = a \cosh (x_1/a)$, quando x_1y_1 è parallelo ad xy su xy si proietta la catenaria:

$$y = a \cosh (x/a)$$

A) Facciamo ruotare dell'angolo α il piano x_1y_1 intorno ad y_1, la proiezione su xy sarà: $x = x_1 \cos \alpha$; $y = y_1$ perciò la curva proiettata è:

$$\boxed{y = a \cosh \left(\frac{x}{a \cos \alpha}\right)} \quad (*)$$

posto: $a \cos \alpha = b$ avremo:

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{b}\right)$$

questa linea è impropriamente detta catenoide [8]) ed è impiegata nelle arcate murarie.

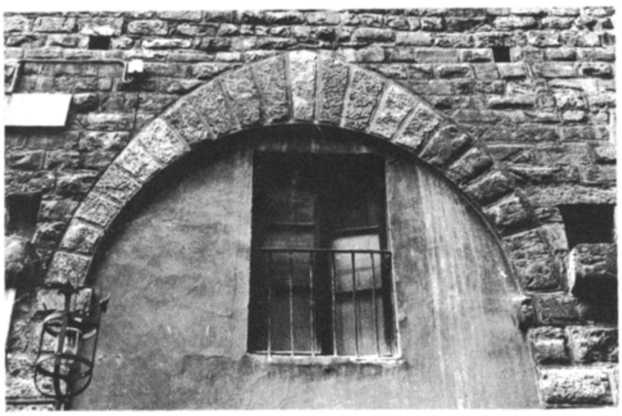


Fig. 3.

È facilmente dimostrabile che, nel caso di rotazione e proiezione ora considerato, una linea qualsiasi, giacente sul piano x_1y_1 ruotato di α, ha per proiezione su xy una linea della stessa specie. In particolare la parabola $y_1 = mx^2$, diventa $y = \frac{m}{\cos^2 \alpha} x^2$ cioè: $y = nx^2$ ancora una parabola ove $n = m/\cos^2 \alpha$. L'ellisse $y_1 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_1^2}$ diventa:

$$y_1 = \frac{b}{a \cos \alpha} \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha - x_1^2}$$ cioè ancora un ellisse. Si considera il cerchio un caso particolare dell'ellisse: ($a \cos \alpha = b$). Analogamente la catenaria si può considerare come un caso particolare delle cosiddette catenoidi.

Per superfici rigate, se le sezioni rette delle falde di una volta sono circolari o ellittiche i cordoli di intersezioni sono ellittici; se le sezioni rette delle falde sono catenarie o catenoidi i cordoli sono catenoidi. In una cupola a base ottagonale regolare [9]), l'angolo formato dal piano del cordolo col piano su cui giace la linea curva di falda è $\pi/8 = 22° 30'$; $\cos (22° 30') = 0{,}923879533 = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$; $\sec (22° 30') = 1{,}082392200 = \sqrt{2 \ (2 - \sqrt{2})}$ in questo caso basta moltiplicare i valori R_1 (distanze orizzontali fra i singoli punti del cordolo e l'asse della cupola) per $\cos \pi/8$ e si otterranno i valori R riferiti alla falda.

B) Facciamo ruotare il piano x_1y_1 intorno all'asse x_1 dell'angolo β nella proiezione della catenaria sul piano xy avremo: $y = y_1 \cos \beta$

$$\boxed{y = a \cos \beta \cosh \left(\frac{x}{a}\right)}$$

e ponendo: $a \cos \beta = c$ otteniamo ancora un catenoide:

$$y = c \cosh \left(\frac{x}{a}\right)$$

Si noti che, essendo $\cos \alpha$ e $\cos \beta$ in genere minori di 1, nel primo caso $b < a$; nel secondo $c < a$.

C) Facciamo ruotare il primitivo piano x_1y_1 prima intorno all'asse y_1 dell'angolo α riportiamo sull'originario piano x_1y_1 il catenoide ottenuto per proiezione e ruotiamo nuovamente tale piano dell'angolo β intorno all'originario asse x_1. Nella proiezione su xy avremo: $y = y_1 \cos \beta$; $x = x_1 \cos \alpha$

cioè:

$$y = a \cos \beta \cosh \left(\frac{x}{a \cos \alpha}\right)$$

e quindi:

$$y = c \cosh (x/b) \quad \text{(catenoide)}$$

Se $\alpha = \beta = \gamma$; $a \cos \beta = a \cos \alpha = a \cos \gamma = m$

$$y = m \cosh (x/m) \quad \text{(catenaria)}$$

Cioè una catenaria il cui piano abbia subito una duplice rotazione dello stesso angolo γ una volta intorno ad y_1 ed una volta intorno ad x_1 con le modalità suddette si proietta ancora secondo una catenaria di diverso modulo $m = a \cos \gamma$.

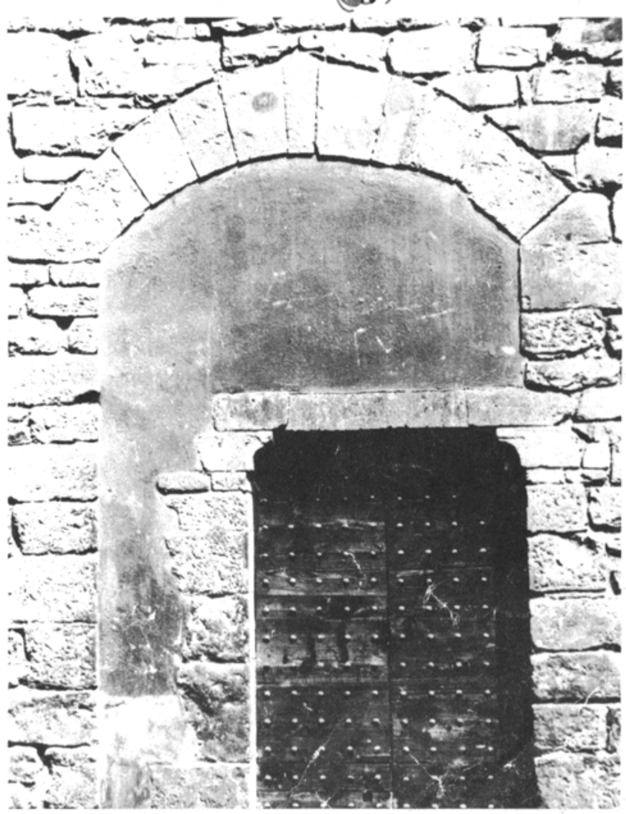


Fig. 4 . Si noti il deterioramento dell'intradosso dell'arco in corrispondenza verticale al taglio netto dell'architrave della porta.

---

[8]) La catenoide propriamente detta è la linea, configurazione di equilibrio di un filo pesante (a peso variabile) costruito in modo tale che in ogni sezione sia costante la tensione unitaria, la cui equazione è: $y = a \ln \sec. (x/a)$.

Dicesi anche catenoide la superficie generata da una catenaria nella rotazione intorno all'asse delle ascisse, la sua equazione è:

$$\sqrt{y^2 + Z^2} = a \cosh \left(\frac{x}{a}\right)$$

ed ha la caratteristica di avere area minima fra quelle di ugual contorno.

[9]) La base della Cupola di S. M. del Fiore è un ottagono non perfettamente regolare.

(*) Se anziché proiettare perpendicolarmente ad xy avessimo proiettato perpendicolarmente a x_1y_1, avremmo ottenuto $y = a \cosh \left(\frac{x}{a_1}\right)$ che coinciderebbe col catenoide ottenuto per rotazione intorno ad x ponendo $a_1 \cos \beta = a$. $a = a/\cos\beta$

Se pensiamo di sovrapporre le due catenarie di modulo a e modulo m riferendole allo stesso sistema di assi, possiamo calcolare i punti di intersezione ed avremo:

$$a \cosh (x/a) = m \cosh (x/m)$$
$$\text{racosh } (x/a) = \text{racosh } (x/m)$$
$$\text{racosh } (x/a) = \text{racosh } [(x/a)\ (1/\cos \gamma)]$$

Sappiamo che argracosh x ammette due soluzioni (per racosh $x > 1{,}50887956$)

$$\left.\begin{matrix} x/a_1 \\ x/a_2 \end{matrix}\right\rangle = \text{argracosh } (x/a) = \left\langle\begin{matrix} x_1/a \\ x_2/a \end{matrix}\right.$$

perciò:

$$\frac{x_1/a}{x_2/a} = \frac{x_1}{x_2} = \cos \gamma = \frac{m}{a}$$

Cioè cos γ è il rapporto degli argomenti oltreché il rapporto dei parametri. *Trova qui giustificazione l'esistenza di due catenarie per un punto determinato di cui si è già esposto il problema.* I valori dell'angolo γ, o meglio del suo complementare ($90°-\gamma$), possono affiancarsi alla colonna di racosh x nella tabella delle funzioni iperboliche. Si ricordi [10]) che racosh x è il valore della tangente trigonometrica dell'angolo che la retta per l'origine degli assi e secante la catenaria forma con l'asse delle ascisse [11]).

La catenaria come curva di equilibrio di pesi uniformemente distribuiti

I muri piani (o problema della parete)

Consideriamo una parete in muratura di altezza h, spessore t e lunghezza l, cernierata agli estremi inferiori A, B.

Sia y l'asse verticale mediano diretto verso il basso e sia x l'asse orizzontale mediano del bordo superiore della parete diretto in senso longitudinale verso A.

Abbiamo sopra dimostrato che, assunti come assi di riferimento gli assi x ed y, le curve catenarie di equazione $y = a \cosh \left(\frac{x}{a}\right)$ passanti per il punto A (e quindi, per simmetria, passanti anche per B) sono due reali, una, oppure nessuna reale.

$$a = \frac{x_A}{\text{argracosh}\left(\frac{y_A}{x_A}\right)}$$

Nel nostro caso $x_A = l/2$; $y_A = h$ per cui l'esistenza di catenarie reali si ha se:

$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{2h}{l} \geqslant 1.50887956...$$

ed è condizione di stabilità per elementi reagenti solo a compressione, se la y è diretta verso il basso, come nel caso della parete.

Sia dunque $\frac{2h}{l} > 1.50887956...$, avremo due valori di a.

(per esempio per $l = 10$ ed $h = 8$ si ha: $\frac{2h}{l} = 1{,}6$

$a_1 = 5{,}629867575...$, $a_2 = 3{,}171428657...$).

Dimostriamo ora che il peso di parete gravante su ciascuna delle due catenarie è uniformemente ripartito lungo le catenarie stesse, e cioè che tali linee sono curve di equilibrio.

Consideriamo la catenaria costituita da elementi infinitesimi di lunghezza *costante* ds, avremo:

$$dx = \cos \alpha \; ds$$

poiché:

$$y' = \text{tang } \alpha = \text{senh } (x/a)$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 \alpha}} = \frac{1}{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}$$

cioè:

$$dx = \frac{ds}{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}$$

Il peso di parete gravante su ds sarà:

$$dp = \gamma \, t y \, dx \qquad \text{(ove } \gamma \text{ peso specifico)}$$

cioè sostituendo dx ed y

$$dp = \gamma \; t \left(a \cosh\left(\frac{a}{x}\right)\right) \left(\frac{ds}{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}\right)$$

semplificando:

$$dp = \gamma \; t \; a \cdot ds$$

essendo costanti a, γ, t, ds, è costante in tutta la catenaria anche dp. Ne consegue che le due catenarie sono curve di equilibrio del peso di parete sovrastante.

Per visualizzare meglio la questione invertiamo l'ordinata y (avremo catenarie di trazione) e facciamo la seguente esperienza:

Sospendiamo a due punti fissi a livello A e B una catenella di peso uniformemente distribuito (qualsiasi) essa assumerà la configurazione di equilibrio di una catenaria. Se a ciascun elemento di tale catenella applichiamo un tratto di un'altra catena (anche di peso diverso purché uniforme) di lunghezza pari all'ordinata dell'elemento, la configurazione della catenaria non cambia [12]).

Supponiamo che la nostra parete sia inizialmente appoggiata su un piano orizzontale che reagisca uniformemente al peso della parete e successivamente il piano di posa ceda improvvisamente e la parete si trovi ancorata solo agli estremi A e B reagenti sia verticalmente che orizzontalmente.

La catenaria inferiore è la traccia della prima superficie semplicemente compressa, (la parte al di sotto di tale superficie è destinata a crollare). Avvenuto il crollo della parte sottostante, si verificano due casi:

1) All'intorno della traccia della linea catenaria più bassa vi è una striscia di materiale sufficiente a resistere alla funicolare dei carichi soprastanti, in tal caso la compressione dei materiali provoca delle deformazioni di assesto per cui può verificarsi un cretto in corrispondenza della catenaria superiore [13]).

2) La striscia di materiale è insufficiente a resistere alla funicolare dei carichi il crollo prosegue fino all'intorno della seconda catenaria.

---

10) Cfr. Bollettino Ingegneri N. 12 anno 1972 pag. 15 e 16.

11) Si noti il duplice aspetto della questione che rappresenta un principio di reciprocità:
(con a determinato, — (racosh $(x/a) = \text{tang } \alpha$) — la retta $y/a = (\text{tang } \alpha)\ x/a$ può essere esterna, tangente o secante la catenaria, cioè i punti comuni possono essere due, uno o nessuno reale;
(con A determinato) — racosh $(x_A/a) = y_A/x_A$ — le catenarie

$$y = \frac{x_A}{\text{argracosh } (y_A/x_A)} \cosh \frac{\text{argracosh } (y_A/x_A)}{x_A}$$ possono essere due una o nessuna reale.

12) Cfr. Bollettino Ingegneri anno 1972 N. 10 pag. 9: « funi della stessa lunghezza nelle stesse condizioni di vincolo assumono la stessa configurazione di equilibrio indipendentemente dal peso del materiale di cui sono costituite ».

13) Attualmente si ritiene ancora che i cretti assumano configurazione parabolica.

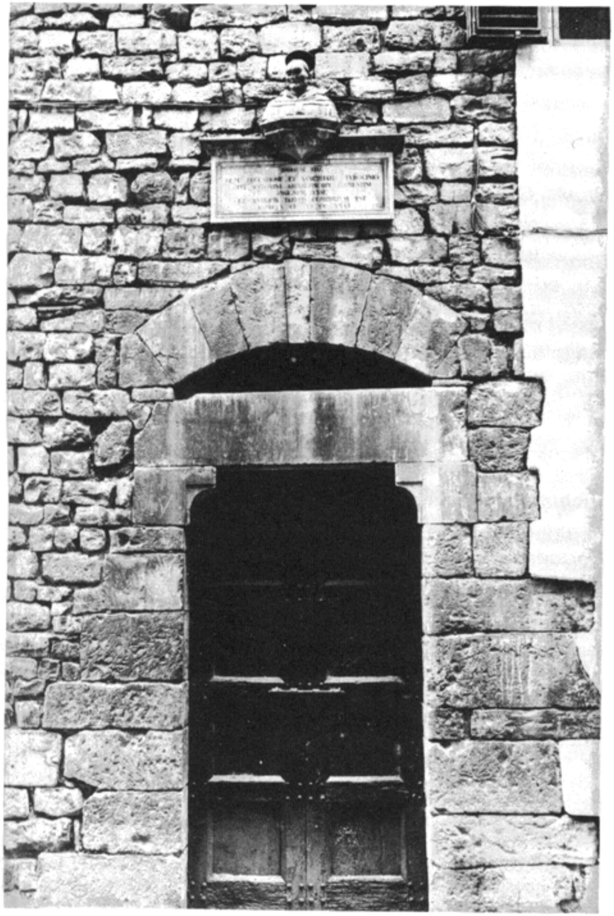


Fig. 5 - Notare il taglio al margine superiore sinistro dell'architrave della porta in proseguo della curva di intradosso dell'arco.

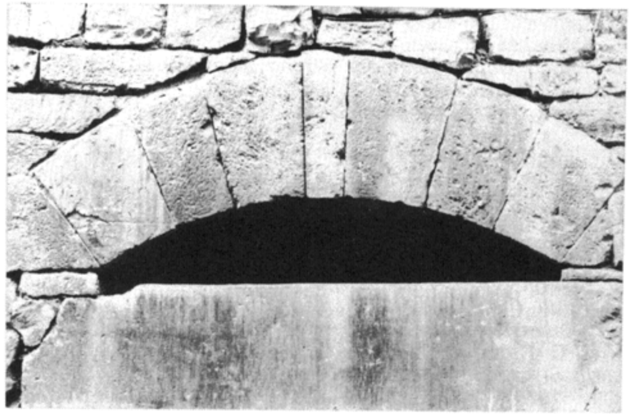


Fig. 6 - Particolare della fig. 5.

Praticamente però i materiali non sono indeformabili ed essendo la catenaria più bassa più compressa della catenaria più alta ($a_1 > a_2$) tutto il cappio di materiale compreso fra le due catenarie (può pensarsi costituito di catenoidi o di catenarie riferite ad asse x diverso) è destinato a resistere alla parete sovrastante.

Trova quì giustificazione la costruzione di quegli archi di portale aventi i conci degradanti dalla chiave alle spalle.

Pareti con pesi sovrastanti

Qualora la parete di altezza h sostenga pesi (per es. un tetto) il peso gravante su tale parete può essere trasformato in altezza virtuale di parete ed eseguire i calcoli come sopra esposto. Il cappio delle due catenarie deve essere interno alla parete reale, altrimenti si verificano quei cretti inclinati che arrivano alla sommità della parete.