Doppi bipoli: metodo delle prove semplici. Ricostruzione di un doppio bipolo a partire dalla rappresentazione matriciale. Doppio bipolo terminato. Gestione dei generatori pilotati nella MNA.

Come prima cosa concludiamo il discorso sulle prove semplici osservando come queste creino un problema nel calcolo degli elementi delle matrici di trasmissione; per ricavare tali elementi, infatti, bisogna partire dal seguente sistema:

$$\begin{cases} v_1 = t_{11}v_2 + t_{12}(-i_2) \\ i_1 = t_{21}v_2 + t_{22}(-i_2) \end{cases}$$

Per ricavare, quindi, per esempio l'elemento (1,1) della matrice di trasmissione, dobbiamo utilizzare la relazione:

$$t_{11} = \left.\frac{v_1}{v_2}\right|_{i_2=0}$$

A livello operativo significa che bisogna lasciare aperta la porta 2 del doppio bipolo, affinchè la corrente sia ivi nulla, imporre una tensione nota alla medesima porta 2 e misurare la tensione alla porta 1. Appare però evidente come non sia possibile avere, contemporaneamente, alla porta 2, corrente nulla e tensione imposta. In realtà, per risolvere questo problema si possono utilizzare due metodi: il primo è quello di valutare l'inverso dell'elemento (1,1) della matrice $\underline{T}$, ovvero utilizzare la relazione:

$$\frac{1}{t_{11}} = \left.\frac{v_2}{v_1}\right|_{i_2=0}$$

Si lascerà dunque aperta la porta 2 e se ne misurerà la tensione avendo imposto una tensione nota alla porta 1. Il secondo modo, che però non verrà analizzato in questo corso, prevede l'utilizzo di amplificatori operazionali (in particolare si utilizzano due oggetti chiamati nullatore e noratore).

Fino ad ora abbiamo visto come, a partire da un doppio bipolo dato, si potesse ricavare, sfruttando il metodo delle prove semplici oppure ricavando una coppia di equazioni indipendenti, le rappresentazioni maticiali. Ora vediamo il discorso inverso. Per far questo, però, ricordiamo i due semplici doppi bipoli resistivi rappresentati nelle seguenti figure (1) e (2):

Figura (1)

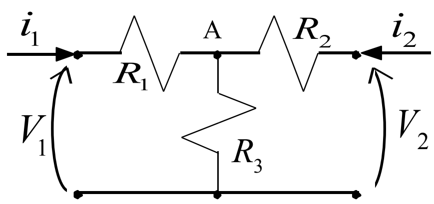
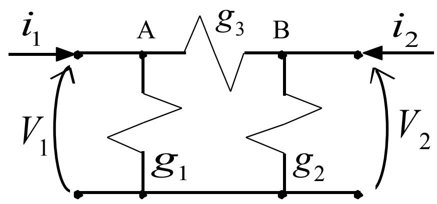


Figura (2)



Per quanto riguarda il doppio bipolo di figura (1): si osservi che, applicando una LKC al nodo A si ricava la corrente che attraversa il resistore centrale:

$$i_3 = i_1 + i_2$$

Applicando ora la LKV alle due maglie di cui è composto tale doppio bipolo, tenendo conte delle leggi di Ohm e della LKC appena ricavata, otterremo il seguente sistema:

$$\begin{cases} v_1 - R_1 i_1 - R_3(i_1 + i_2) = 0 \\ v_2 - R_2 i_2 - R_3(i_1 + i_2) = 0 \end{cases}$$

A partire da questo sistema possiamo ricavare la matrice $\underline{R}$ di tale doppio bipolo, che sarà:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix}$$

Analogamente, nel caso del doppio bipolo rappresentato in figura (2), che è il duale di quello rappresentato in figura (1), si può applicare una LKV alla maglia centrale, ottenendo:

$$v_3 = v_1 - v_2$$

Poi, tendo conto di tale LKV e delle leggi di Ohm, si può applicare la LKC ai due nodi A e B e ottenere il seguente sistema:

$$\begin{cases} i_1 - g_1 v_1 - g_3(v_1 - v_2) = 0 \\ i_2 - g_2 v_2 + g_3(v_1 - v_2) = 0 \end{cases}$$

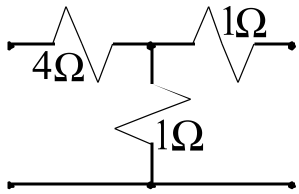
A partire da questo sistema si può ricavare la matrice $\underline{G}$ di questo doppio bipolo, che sarà:

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} g_1 + g_3 & -g_3 \\ -g_3 & g_2 + g_3 \end{bmatrix}$$

Entrambe le matrici trovate sono simmetriche e quindi entrambi i doppi bipoli analizzati sono reciproci. Supponiamo ora, dunque, di avere a disposizione la matrice R o la matrice G di un doppio bipolo reciproco e di voler risalire al doppio bipolo che l'ha generata. Da ora in poi faremo tutto il discorso approfondito solo per il caso della matrice R e dunque per un doppio bipolo tipo quello rappresentato in figura (1); un discorso analogo, essendo i due doppi bipoli l'uno il duale dell'altro, potrà però essere fatto anche per il doppio bipolo rappresentato in figura (2). Supponiamo dunque che sia data la seguente matrice:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

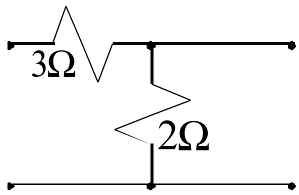
Confrontando questa matrice con la struttura generale della matrice R nel caso di un doppio bipolo come quello rappresentato in figura (1), si ricava facilmente come tale matrice sia stata generata dal seguente doppio bipolo:



Nel caso, invece, che la matrice fosse la seguente:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

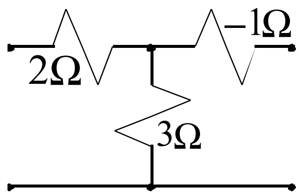
allora si arriverebbe al seguente doppio bipolo:



La condizione fondamentale affinchè sia possibile ricavare così semplicemente il doppio bipolo dalla matrice è che il doppio bipolo sia passivo. Questo implica che la matrice che viene assegnata sia non singolare e definita positiva. Tale condizione, però, non è una condizione sufficiente, ma solo una condizione necessaria. Se consideriamo, infatti, la seguente matrice:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

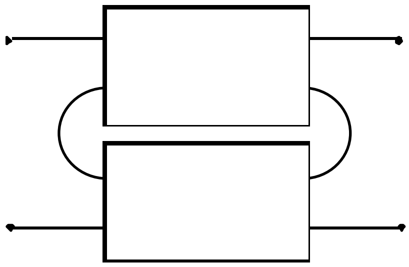
possiamo facilmente osservare come tale matrice sia non singolare e definita positiva; partendo da tale matrice, però, si otterrebbe il seguente doppio bipolo:



Introduciamo allora una seconda condizione che eviterà di ottenere dei resistori negativi: tale condizione è la condizione semplificata di dominanza della diagonale secondo la quale gli elementi sulla diagonale devono sempre essere maggiori degli elementi al di fuori della diagonale. Nel terzo esempio che abbiamo analizzato vediamo dunque che tale condizione non è stata verificata in quanto il 2 sulla diagonale è minore dei 3 fuori dalla diagonale. Ovviamente, come abbiamo già detto, un discorso analogo può essere fatto per il duale.
Vediamo ora come si può risalire al doppio bipolo che origina una matrice non simmetrica. Consideriamo, per esempio, la matrice:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

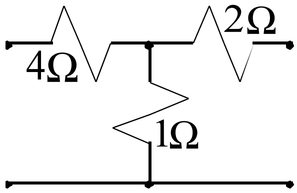
Un primo metodo sarebbe quello di scomporre cartesianamente la matrice R nella somma di una matrice simmetrica e di una matrice emisimmetrica, di ricavarne i doppi bipoli che le generano e di unire, quindi, in serie i due doppi bipoli risultanti. A tale proposito appare utile sottolineare che la connessione in serie di due doppi bipoli è schematizzata come segue:



Vediamo ora un altro metodo; sfruttiamo come esempio la matrice precedentemente indicata che modifichiamo in modo da ottenere la matrice:

$$\underline{R}_1 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

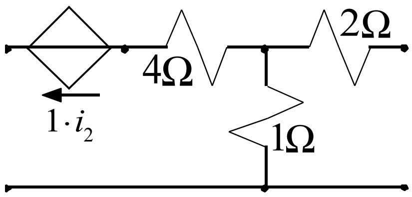
Se utilizziamo questa matrice il doppio bipolo che se ne deduce sarà il seguente:



Il sistema che si ricava dalla matrice modificata è il seguente:

$$\begin{cases} v_1 = 5i_1 + i_2 \\ v_2 = i_1 + 3i_2 \end{cases}$$

Si osserva come, per tornare al sistema che si otterrebbe dalla matrice originale bisogna aggiungere alla prima equazione una tensione uguale alla corrente che entra nella porta 2, moltiplicata per 1. Dobbiamo dunque aggiungere al doppio bipolo che abbiamo ricostruito un generatore di tensione che generi una tensione dipendente dalla corrente della porta 2: dobbiamo dunque aggiungere un generatore di tensione pilotato in corrente ottenendo il seguente doppio bipolo:



Per verificare che il generatore pilotato sia stato inserito in maniera corretta (soprattutto per quanto riguarda il segno della tensione generata) si applicano due LKV alle due maglie del doppio bipolo e si deve tornare ad avere la coppia di equazioni che si avrebbe avuto utilizzando la matrice originaria. In effetti, nel nostro caso si ottiene:

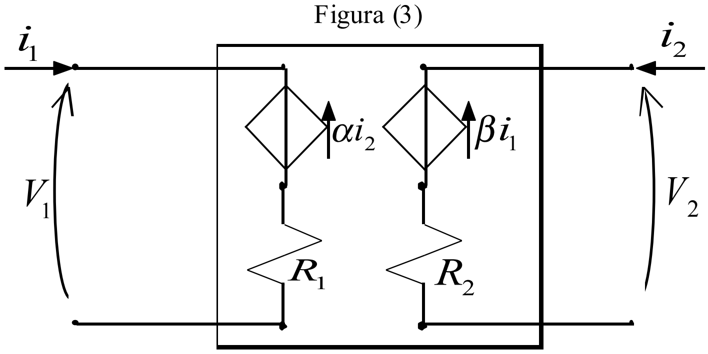
$$\begin{cases} v_1 - i_2 - 4i_1 - i_2 - i_1 = 0 \\ v_2 - 2i_2 - i_1 - i_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 5i_1 + 2i_2 \\ v_2 = i_1 + 3i_2 \end{cases}$$

Ovviamente, un discorso analogo potrà essere fatto per un doppio bipolo come quello rappresentato nella precedente figura (2); in questo caso sarà però necessario utilizzare un generatore controllato in tensione. Nelle seguenti due figure, la figura (3) e la figura (4), vediamo, rispettivamente, un doppio bipolo che rappresenta abbastanza bene qualunque matrice $\underline{R}$ e un doppio bipolo che rappresenta abbastanza bene qualunque matrice $\underline{G}$. Soffermiamoci, in particolare, sul doppio bipolo di figura (3): applicando la LKV alle due maglie rappresentate dalle due porte del doppio bipolo, si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} v_1 = \alpha i_2 + R_1 i_1 \\ v_2 = \beta i_1 + R_2 i_2 \end{cases}$$

$$R_{Ing} = \frac{v_1}{i_1}$$

Figura (3)

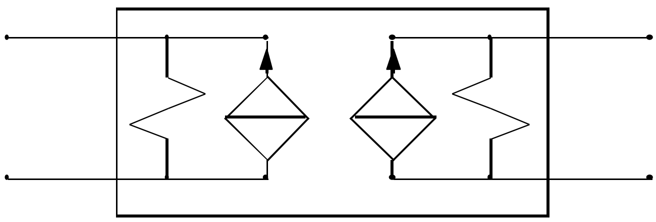


Osserviamo come l'ultimo sistema scritto già rappresenti la rappresentazione R del doppio bipolo in questione, dove tale matrice sia la seguente:

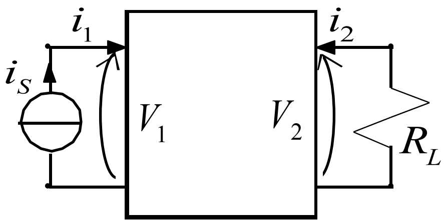
$$\underline{R} = \begin{bmatrix} R_1 & \alpha \\ \beta & R_2 \end{bmatrix}$$

Un discorso assolutamente equivalente si può fare per il doppio bipolo rappresentato in figura (4), che può rappresentare quasi ogni matrice G.

Figura (4)



Mescolando, infine, la porta 1 del doppio bipolo di figura (3) e la porta 2 del doppio bipolo di figura (4), si possono ricavare dei doppi bipoli che permettono di gestire bene le rappresentazioni ibride.
Un doppio bipolo in quanto tale non ha particolare importanza in quanto lo scopo dei doppi bipoli è quello di essere collegati ad una rete, ovvero di essere collegati ad una sorgente da una parte e ad un carico dall'altra. Consideriamo dunque la seguente situazione:



Si supponga di conoscere la matrice R associata a questo doppio bipolo (un discorso assolutamente identico potrà essere fatto per il caso duale che prevede che ci sia un generatore di tensione e che si conosca la matrice G). Una prima domanda che possiamo porci è quale sia l'impedenza vista effettivamente dal generatore sorgente, ovvero che resistenza viene vista dal generatore a causa della presenza del doppio bipolo (un'altra domanda che ci si potrebbe porre è quale sia il guadagno di corrente ottenuto grazie al doppio bipolo). Cerchiamo dunque la resistenza equivalente. Come prima cosa esplicitiamo, a partire dalla conoscenza della matrice R, il sistema di equazioni che rappresentano la rappresentazione implicita del doppio bipolo:

$$\begin{cases} v_1 = r_{11} i_1 + r_{12} i_2 \\ v_2 = r_{21} i_1 + r_{22} i_2 \end{cases}$$

A questo sistema dobbiamo aggiungere il sistema delle equazioni caratteristiche del particolare doppio bipolo in analisi; nel nostro caso si avrà:

$$\begin{cases} i_1 = i_S \\ v_2 = -R_L i_2 \end{cases}$$

Innanzitutto osserviamo come si sia in presenza di quattro equazioni in quattro incognite e come, quindi, il problema sia effettivamente risolvibile. La resistenza che stiamo cercando (che si chiama anche impedenza d'ingresso) sarà data dalla relazione:

Ricaviamo dunque la corrente che entra nella porta 2 sostituendo la seconda equazione del secondo sistema nella seconda equazione del primo sistema e, dopo aver esplicitato per la corrente citata, ottenendo:

$$i_2 = \frac{-r_{21} i_S}{r_{22} + R_L}$$

Ricaviamo ora la tensione alla porta 1 sostituendo la prima equazione del secondo sistema nella prima equazione del primo sistema:

$$v_1 = r_{11} i_S + r_{12} i_2$$

Combinando ora assieme le ultime due relazioni scritte e dividendo tutto per la corrente che entra nella porta 1 (che poi equivale alla corrente generata dalla sorgente), si ottiene:

$$\frac{v_1}{i_S} = \frac{r_{11}(r_{22} + R_L) - r_{21} r_{12}}{r_{22} + R_L} = R_{Ing}$$

Un caso più interessante è sicuramente quello in cui non vengono usati dei generatori ideali ma vengono usati dei generatori reali che, quindi, hanno anche una loro resistenza interna che deve essere contata insieme all'impedenza d'ingresso.
Concludiamo il nostro discorso sui doppi bipoli, in particolare sui generatori pilotati, vedendo come questi possono essere gestiti quando siano presenti in una rete che si sta tentando di risolvere con la MNA. Vediamo dunque tali generatori pilotati uno per volta:

Figura (a)

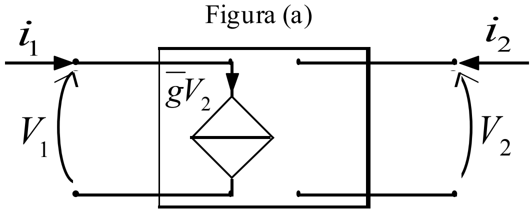


Figura (b)

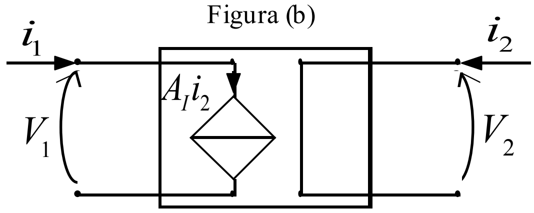


Figura (c)

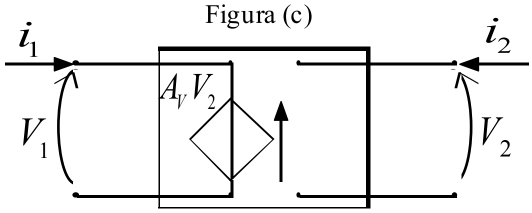
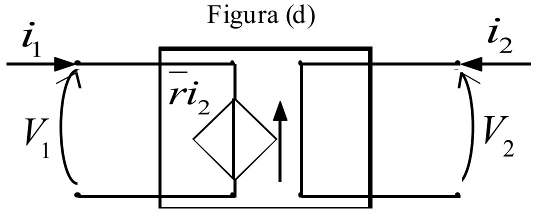


Figura (d)



Consideriamo dunque, per primo, il generatore di corrente pilotato in tensione (rappresentato in figura (a)). Le due equazioni caratteristiche di tale doppio bipolo sono raccolte nel seguente sistema:

$$\begin{cases} i_1 = \overline{g} v_2 \\ i_2 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema, però, è già la rappresentazione G del doppio bipolo dove sia:

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 0 & \overline{g} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vediamo ora il caso del generatore di corrente pilotato in corrente (rappresentato in figura (b)). Le equazioni caratteristiche di questo doppio bipolo sono le seguenti:

$$\begin{cases} i_1 = A_I i_2 \\ v_2 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema, però, è già la rappresentazione H′ del doppio bipolo in analisi, dove sia:

$$\underline{H}^1 = \begin{bmatrix} 0 & A_I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vediamo ora il caso del generatore di tensione pilotato in tensione (rappresentato in figura (c)). Le equazioni caratteristiche di questo doppio bipolo sono le seguenti:

$$\begin{cases} i_2 = 0 \\ v_1 = A_V v_2 \end{cases}$$

Tale sistema, però, è già la rappresentazione H del doppio bipolo in analisi, dove sia:

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} 0 & A_V \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vediamo, infine, il caso del generatore di tensione pilotato in corrente (rappresentato in figura (d)). Le equazioni caratteristiche di questo doppio bipolo sono le seguenti:

$$\begin{cases} v_1 = \bar{r} i_2 \\ v_2 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema, però, è già riconoscibile come la rappresentazione R del doppio bipolo in analisi, dove sia:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Come si è già detto in precedenza, quindi, solo il generatore di corrente pilotato in tensione ammette la rappresentazione G, ed è l'unico facilmente gestibile con la MNA.

Lezione numero 11
8 Aprile 1999

Elementi reattivi. Transitori del primo ordine.

Fino ad ora abbiamo sempre visto reti formate esclusivamente da elementi tempoinvarianti e lineari. Introduciamo ora la variabile tempo nello studio delle reti. Pensiamo, innanzitutto, ad una rete composta solo da resistori e da generatori (di corrente o di tensione) che generino una corrente o una tensione non costante ma variabile nel tempo. I metodi risolutivi per gestire tali situazioni sono assolutamente identici ai metodi visti per le situazioni tempoinvarianti; l'unica differenza consisterà nel fatto che, utilizzando, per esempio, la MNA, con dei generatori di corrente che generano la corrente A(t) e dei generatori di tensione che generano la tensione E(t), si otterranno, come soluzioni, dei potenziali anch'essi funzione del tempo: e(t). Fin qui, dunque, l'estensione alla tempovarianza non comporta nessun problema particolare. Introduciamo ora due nuovi elementi che possono far parte dei circuiti: gli elementi reattivi. Tali elementi, di cui vediamo una rappresentazione nelle due seguenti figure, prendono il nome di condensatore (figura 1) e di induttore (figura 2):

Figura (1)

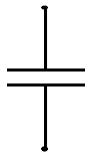
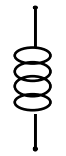
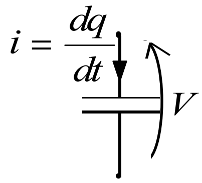


Figura (2)



Le rappresentazioni di questi due elementi sono indicative della loro composizione fisica: il condensatore più semplice, infatti, è composto da due piastre metalliche (dette armature) poste parallelamente vicine ad una distanza molto piccola, l'induttore, invece, si ottiene tramite avvolgimenti di materiale conduttore. Occorre sottolineare subito due concetti particolarmente importanti: quando si applica la LKC ad una superficie chiusa, bisogna prestare attenzione al fatto che questa superficie chiusa non tagli il condensatore passando per la zona di vuoto che separa le due armature; analogamente, quando applichiamo la LKV ad una maglia che contiene anche un induttore, dobbiamo prestare attenzione al fatto che la linea scelta per valutare la differenza di potenziale non passi all'interno delle spire (gli avvolgimenti) dell'induttore. Vediamo ora quali sono le leggi caratteristiche del condensatore e dell'induttore. Nel caso dei resistori e dei generatori, le leggi caratteristiche erano tutte funzioni della corrente e della tensione. Nel caso del condensatore e dell'induttore le cose sono leggermente diverse. Soffermiamoci prima sul condensatore.



Se battezziamo q la carica che si concentra sulle armature del condensatore, la relazione caratteristica per un condensatore è, genericamente, la seguente:

$$f(q,v)=0$$

Una rappresentazione implicita come questa è, però, particolarmente difficile da gestire e quindi, con un discorso analogo a quello fatto per i resistori a suo tempo, si preferiscono le due seguenti rappresentazioni esplicite:

$$q = f_1(v)$$
$$v = f_2(q)$$

In particolare, poi, nel caso in cui il condensatore soddisfi alla convenzione di segno con la quale è stato rappresentato nell'ultima immagine, verrà sempre utilizzata una relazione del tipo:

$$q = Cv$$

dove la grandezza C che appare prende il nome di capacità e si misura in Farad (F). Si ricordi, infine, la validità della relazione:

$$\frac{dq}{dt} = i$$

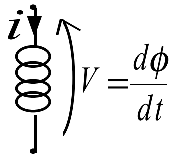
Vediamo ora invece di caratterizzare in maniera completa l'induttore. Se battezziamo ϕ il flusso del campo magnetico (detto anche impulso di tensione) la relazione caratteristica per un induttore è, genericamente, la seguente:

$$f(\phi,i)=0$$

Una rappresentazione implicita come questa è, come prima, particolarmente difficile da gestire e quindi si preferiscono le due seguenti rappresentazioni esplicite:

$$\phi = f_1(i)$$
$$i = f_2(\phi)$$

In particolare, poi, nel caso in cui l'induttore soddisfi la seguente convenzione di segno:



verrà sempre utilizzata una relazione del tipo:

$$\phi = Li$$

dove la grandezza L che appare prende il nome di induttanza e si misura in Henry (H). Si osservi, infine, che il flusso ϕ è il duale della carica rispetto alla tensione e quindi vale la relazione:

$$\frac{d\phi}{dt} = v$$

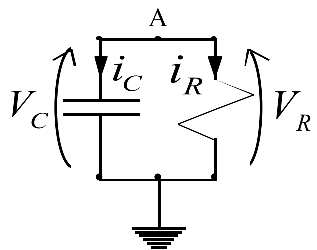
Dall'elettromagnetismo siamo giustificati nel classificare questi due nuovi elementi come degli elementi conservativi che conservano l'energia nel campo elettrico (il condensatore) o nel campo magnetico (l'induttore). Quelli che abbiamo fin qui visto sono, ovviamente, il condensatore e l'induttore ideali. Per modellizzare, ad esempio, il condensatore reale dobbiamo collegare in serie al condensatore ideale una resistenza piccola che rappresenta la resistenza propria dei fili conduttori dei quali è composto tale elemento, inoltre sarà necessario collegare in parallelo al condensatore ideale una resistenza molto grossa che rappresenta la possibilità (piuttosto remota, infatti la resistenza è grande) che alcune cariche attraversino lo spazio vuoto tra le due armature. L'induttore reale è molto più complicato da modellizzare.
Vediamo ora come affrontare lo studio di reti che contengano questi elementi. Tanto per iniziare ci occuperemo di reti che presentano un solo elemento reattivo per volta (per questo motivo si parlerà di transitori del primo ordine). Come prima cosa dobbiamo riportare le espressioni caratteristiche di questi elementi in funzione di corrente e tensione in modo che siano compatibili con le relazioni caratteristiche dei resistori e dei generatori che già sappiamo utilizzare. Questo può essere fatto tramite semplici derivate; derivando infatti la relazione caratteristica di un condensatore (supponendo che la capacità C sia una costante indipendente dal tempo) si ottiene:

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

Derivando, invece, la relazione caratteristica di un induttore (considerando l'induttanza L una costante indipendente dal tempo) si ottiene:

$$v = L\frac{di}{dt}$$

Consideriamo ora il seguente semplice circuito:



Come prima cosa applichiamo una LKV all'unica maglia presente nel circuito, ottenendo:

$$v_C = v_R$$

Applichiamo ora una LKC al nodo indicato in figura con la lettera A; si otterrà:

$$i_C = -i_R$$

La legge di Ohm relativa al resistore presente nel circuito sarà:

$$v_R = Ri_R$$

dove R sia la resistenza del resistore. La relazione costitutiva relativa al condensatore presente nel circuito, detta C la capacità del condensatore, sarà:

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

Abbiamo dunque quattro equazioni in quattro incognite e questo è benaugurante ai fini della risoluzione del circuito. Combiniamo ora tra di loro la LKV, la LKC e la legge di Ohm relativa al resistore, ottenendo la relazione:

$$v_C = -Ri_C$$

Combiniamo ora quest'ultima relazione con l'equazione caratteristica del condensatore, ottenendo:

$$\frac{dv_C}{dt} = -v_C \frac{1}{RC}$$

Da ora in poi si supporrà che la resistenza e la capacità siano entrambe positive oppure entrambe negative. Riconosciamo l'ultima relazione scritta come un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti; dunque per risolverla sarà indispensabile conoscere le condizioni iniziali. Supponiamo, dunque, che la tensione sul condensatore al tempo iniziale sia data dalla seguente relazione:

$$v_C(t=0) = V_0$$

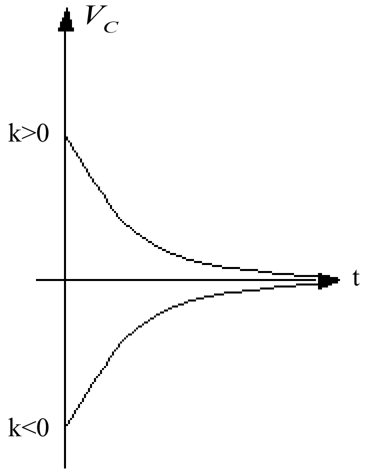
Possiamo ora risolvere l'equazione differenziale ottenendo:

$$v_C(t) = ke^{-\frac{1}{RC}t}$$

Inserendo in questo risultato generico le condizioni iniziali prima indicate si ottiene la soluzione particolare che sarà:

$$v_C(t) = V_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

La correttezza formale della soluzione è comprensibile pensando che, dal punto di vista fisico, noi ci aspettiamo che, collegando il condensatore con il resistore, attraverso quest'ultimo inizi a scorrere della corrente che scaricherà il condensatore; in effetti, graficando la soluzione generale precedentemente ottenuta, otteniamo il seguente grafico:

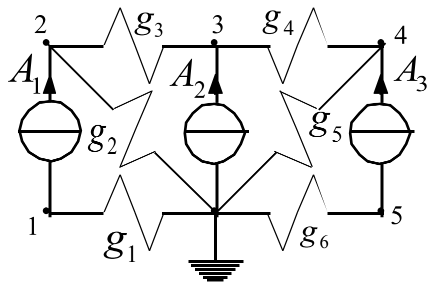


In questo grafico si osserva come, sia che k sia positivo, sia che k sia negativo, la tensione tende a zero in entrambi i casi con il passare del tempo e dunque, come avevamo previsto dal punto di vista fisico, il condensatore si scarica. Concludiamo osservando che, affinchè la soluzione abbia senso, l'esponenziale deve avere, come esponente, un numero puro; ciò è possibile solo se il prodotto RC ha le dimensioni di un tempo. In effetti il prodotto RC esprime con che velocità il condensatore si scarica.

Esempi sulla MNA con i generatori pilotati.

Ci occupiamo ora di semplici esempi che sfruttano la MNA.

Esprimiamo, per iniziare, la forma matriciale del sistema risolutivo che si ottiene applicando la NA al seguente circuito:

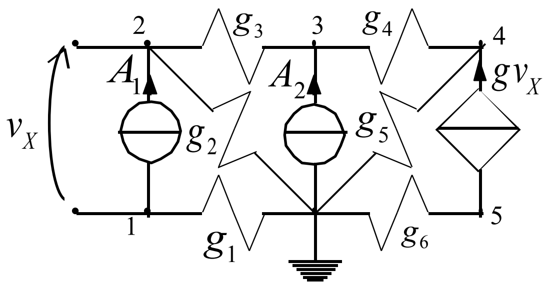


Sfruttiamo il metodo ottico già citato che ci permette di compilare molto in fretta la matrice dei coefficienti (somma delle conduttanze afferenti al nodo sulla diagonale e conduttanze di ramo cambiate di segno fuori dalla diagonale) e otteniamo:

$$\begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (g_2+g_3) & -g_3 & 0 & 0 \\ 0 & -g_3 & (g_3+g_4) & -g_4 & 0 \\ 0 & 0 & -g_4 & (g_4+g_5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ -A_3 \end{bmatrix}$$

Per quanto riguarda i segni degli elementi del vettore dei termini noti, si osservi che questi saranno positivi quando sono entranti nel nodo a cui si riferisce la riga del vettore.

Vediamo ora la forma matriciale del sistema risolutivo che si ottiene applicando la NA al seguente circuito:



Le prime tre righe del sistema risolutivo di questo circuito sono uguali alle rispettive righe del sistema risolutivo del circuito dell'esercizio precedente; per quanto riguarda le rimanenti due righe del sistema, tenendo conto della validità della relazione:

$$v_X = e_2 - e_1$$

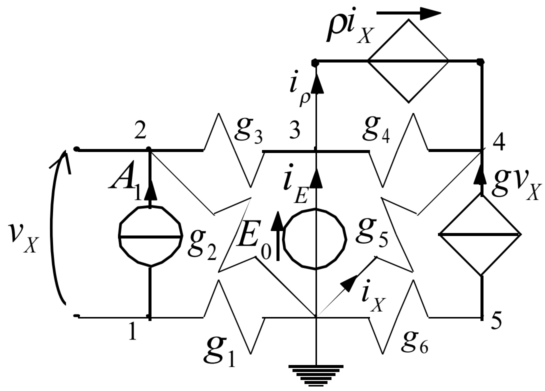
si otterrà:

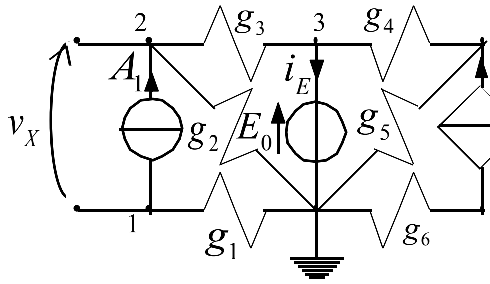
$$\begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (g_2+g_3) & -g_3 & 0 & 0 \\ 0 & -g_3 & (g_3+g_4) & -g_4 & 0 \\ g & -g & -g_4 & (g_4+g_5) & 0 \\ -g & g & 0 & 0 & g_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 \\ A_1 \\ A_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vediamo adesso la forma matriciale del sistema risolutivo che si ottiene applicando la MNA al circuito rappresentato nel seguito. Siccome nel circuito in analisi c'è un generatore di tensione, la NA non potrà essere utilizzata; bisognerà invece utilizzare la MNA, dobbiamo dunque aggiungere una equazione in più e una incognita in più: la corrente che attraversa il generatore di tensione. L'equazione che esprime la presenza nel circuito del generatore di tensione sarà la seguente:

$$e_3 = E_0$$

Il sistema risultante avrà, come matrice dei coefficienti, una matrice ottenuta orlando di una riga e di una colonna la matrice risolutiva dell'esercizio precedente.

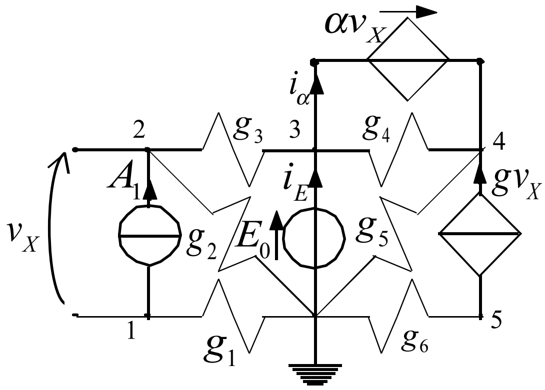




Il sistema risolutivo avrà dunque la seguente forma:

$$\begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (g_2+g_3) & -g_3 & 0 \\ 0 & -g_3 & (g_3+g_4) & -g_4 \\ g & -g & -g_4 & (g_4+g_5 \\ -g & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cerchiamo ora la forma matriciale del sistema risolutivo che si ottiene applicando la MNA al seguente circuito:



In questo caso è stato aggiunto, rispetto all'esercizio precedente, un ulteriore generatore di tensione e quindi si dovrà aggiungere una ulteriore riga ed una ulteriore colonna (si noti, inoltre, la variazione del verso della corrente che attraversa il generatori indipendente di tensione); si introduce dunque, come incognita, la corrente che passa nel generatore di tensione pilotato e, come equazione, quella che esprime il legame tra questo generatore e la rete nella quale è inserito, ovvero:

$$e_4 - e_3 = \alpha(e_2 - e_3)$$

La rappresentazione matriciale del sistema risolutivo sarà dunque la seguente:

$$\begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (g_2+g_3) & -g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_3 & (g_3+g_4) & -g_4 & 0 & -1 & 1 \\ g & -g & -g_4 & (g_4+g_5) & 0 & 0 & -1 \\ -g & g & 0 & 0 & g_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -\alpha & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ i_E \\ i_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 \\ A_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esprimiamo, infine, la forma matriciale del sistema risolutivo che si ottiene applicando la MNA al circuito rappresentato nel seguito:

Osserviamo che, in questo caso, la corrente che pilota il generatore di tensione è la medesima corrente che attraversa il resistore numero 5; con questa considerazione, l'equazione che esprime la presenza del generatore di tensione pilotato sarà la seguente:

$$e_4 - e_3 = \rho i_5$$

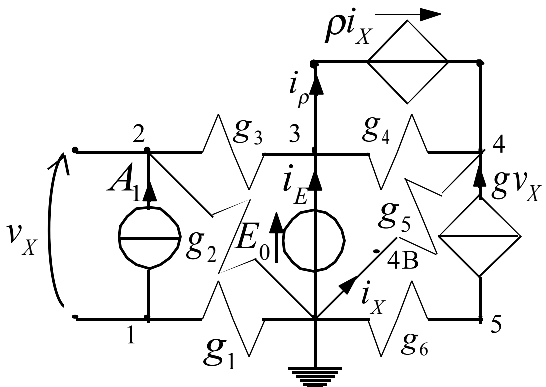
ovvero:

$$e_4 - e_3 = -\rho g_5 e_4$$

Questo mi permetterebbe di scrivere il seguente sistema risolutivo:

$$\begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (g_2+g_3) & -g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_3 & (g_3+g_4) & -g_4 & 0 & -1 & 1 \\ g & -g & -g_4 & (g_4+g_5) & 0 & 0 & -1 \\ -g & g & 0 & 0 & g_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & (1+\rho g_5) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ i_E \\ i_\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 \\ A_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Questo procedimento, però, non è il procedimento MNA. Ciò è comprensibile pensando che il procedimento MNA è stato ideato per la risoluzione computerizzata e un computer non sarebbe in grado di fare l'osservazione che ci ha permesso di ottenere il sistema di sette equazioni in sette incognite, ovvero non sarebbe in grado di osservare che la corrente che pilota il generatore è in questo caso uguale alla corrente che attraversa il resistore numero 5. Per utilizzare rigorosamente il procedimento MNA dobbiamo aggiungere il nodo 4B, aggiungere quindi come incognite la corrente che attraversa il generatore di tensione pilotato in corrente ma anche la corrente che pilota il generatore e il potenziale al nuovo nodo inserito. Inoltre bisogna comportarsi come se tra i nodi 0 e 4B ci fosse un generatore di tensione indipendente che generi una tensione nulla, questo significa che dovremo inserire una equazione anche per rappresentare tale generatore. Dobbiamo dunque applicare l'MNA al seguente circuito:



Applichiamo dunque l'NA a tale circuito e aggiungiamo le tre seguenti equazioni che tengono conto dei tre generatore di tensione che dobbiamo considerare sul circuito:

$$\begin{cases} e_3 = E_0 \\ e_{4B} = 0 \\ e_4 - e_3 = \rho i_X \end{cases}$$

Il sistema risolutivo con il metodo MNA avrà dunque la seguente forma:

$$
\begin{bmatrix}
g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & (g_2+g_3) & -g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -g_3 & (g_3+g_4) & -g_4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
g & -g & -g_4 & (g_4+g_5) & -g_5 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -g_5 & g_5 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-g & g & 0 & 0 & 0 & g_6 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_{4B} \\ e_5 \\ i_E \\ i_X \\ i_\rho \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -A_1 \\ A_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

In questo modo abbiamo ottenuto una matrice più grande di quella di prima ma abbiamo usato rigorosamente la MNA.

Transitori del primo ordine. Gli interruttori.

Come abbiamo visto nella lezione numero 11, la presenza di elementi attivi in una rete (tipicamente tali elementi sono i condensatori e gli induttori, detti anche elementi con memoria in quanto ricordano l'integrale del loro passato) fa si che i sistemi risolutivi di tali circuiti contengano equazioni differenziali del tipo:

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) = 0$$

dove x è una grandezza elettrica tipica dei circuiti elettrici (può essere la tensione, la corrente, la carica, etc…). Abbiamo altresì già visto come, più semplicemente, ci si trovi solitamente di fronte a particolare equazioni differenziali che hanno la seguente forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)$$

Dall'Analisi sappiamo che equazioni di questo tipo si chiamano autonome se il tempo non appare esplicitamente, si dicono invece non autonome se il tempo appare.

Quando ci troviamo davanti ad un circuito che presenta un elemento dinamico bisogna innanzitutto procedere allo studio dell'elemento dinamico (come visto, appunto, nella lezione numero 11) e poi trattare il resto del circuito come tale, ovvero con le solite metodiche con le quali abbiamo fino ad ora trattato i circuiti adinamici. Studiare l'elemento dinamico significa risolvere l'equazione differenziale ad esso associata, ad ogni elemento dinamico, infatti, è associata una equazione differenziale e quindi, in generale, risolvere un circuito dinamico significa risolvere un sistema di equazioni differenziali; nel caso di un'unica equazione si dovrà risolvere un problema di questo tipo:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t) \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$$

ricordiamo, infatti, come una soluzione effettiva di una equazione differenziale sia possibile solo tramite la conoscenza delle condizioni iniziali. Risolvendo un sistema di questo tipo per ogni elemento dinamico ricaviamo, per ogni elemento, la variazione temporale di una coordinata. Possiamo dunque rappresentare tale andamento su un piano (t,x) e ottenere la caratteristica del bipolo adinamico in questione. Quando gli elementi dinamici sono più di uno, è anche possibile ricavare l'andamento della coordinata associata ad un elemento in funzione delle coordinate associate agli altri elementi (ovviamente questo metodo risulta comodo solo quando le dimensioni del sistema di equazioni differenziali da risolvere è minore o uguale a 3, in caso contrario la rappresentazione grafica è impossibile). In questo caso la linea che si individua prende il nome di traiettoria e lo spazio nella quale tale traiettoria viene disegnata prende il nome di spazio di stato. Data una certa condizione iniziale, la traiettoria può essere convergente o divergente; in questo secondo caso si parla di sistema instabile.

Concentriamoci ora sui sistemi con una singola equazione differenziale lineare (detti transitori del primo ordine) con i quali avremo più spesso a che fare: si avranno dunque problemi del tipo seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + e(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Vediamo dunque come, a partire da questo problema, siano possibili tre sottocasi:

•) l'equazione (più in generale il sistema se gli elementi dinamici sono più di uno) può essere non autonomo qualora sia esplicitamente presente l'elemento e(t);

•) l'equazione (o il sistema) può essere autonomo non omogeneo nel caso in cui l'elemento e(t) sia in realtà una costante k;

•) l'equazione (o il sistema) può essere autonomo omogeneo qualora la costate k sia nulla.

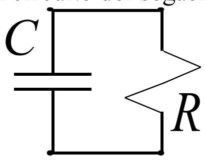
Per iniziare mettiamoci nel caso di un sistema del prim'ordine (quindi con un unico elemento dinamico) autonomo omogeneo (un sistema di questo tipo modellizza per un circuito nel quale non siano presenti generatori indipendenti). Si avrà dunque un sistema del tipo:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Come abbiamo già visto nella lezione numero 11, qualora l'unico elemento dinamico presente sia un condensatore la coordinata x è, in effetti, la tensione sul condensatore e quindi si avrà:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = Av_C \\ v_C(0) = v_0 \end{cases}$$

Per quanto riguarda la costante moltiplicativa A (ci si riferirà sempre ad equazioni a coefficienti costanti perché i tempi di risposta di un circuito sono talmente rapidi da poter sempre approssimare tutti gli elementi come tempoinvarianti) dobbiamo osservare che, escluso il condensatore, la rete in questione dovrà essere composta solo da resistori e quindi, ricavando la resistenza equivalente, si arriva ad un circuito del seguente tipo:



Come visto nella lezione numero 11, un circuito di questo tipo porta all'equazione:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = -\dfrac{1}{RC} v_C \\ v_C(0) = v_0 \end{cases}$$

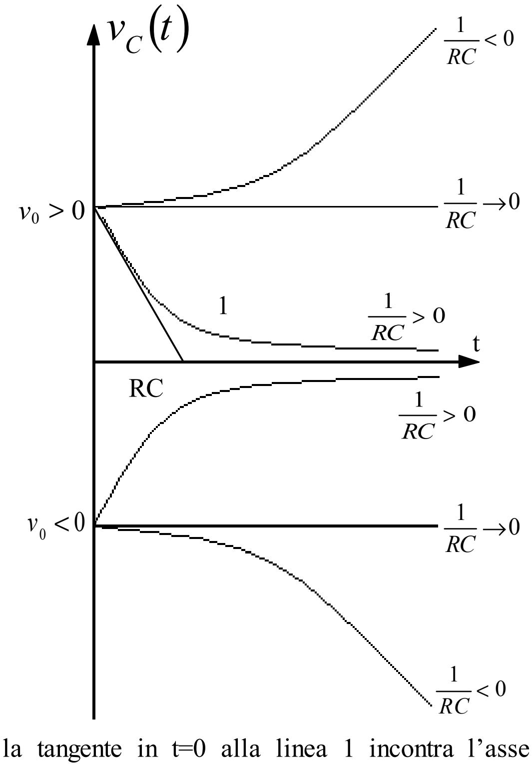
La soluzione generale di tale sistema è la seguente:

$$v_C(t) = ke^{-\frac{1}{RC}t}$$

tenendo poi conto delle condizioni iniziali si ottiene la soluzione particolare che è la seguente:

$$v_C(t) = v_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Graficando questa funzione si ottiene:



Dimostriamo analiticamente che la tangente in t=0 alla linea 1 incontra l'asse della ascisse nel punto t=RC. Se deriviamo la soluzione dell'equazione differenziale otteniamo, infatti:

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{v_0}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

il valore di tale derivata nel punto di intersezione con l'asse delle ascisse sarà dunque:

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{v_0}{RC}$$

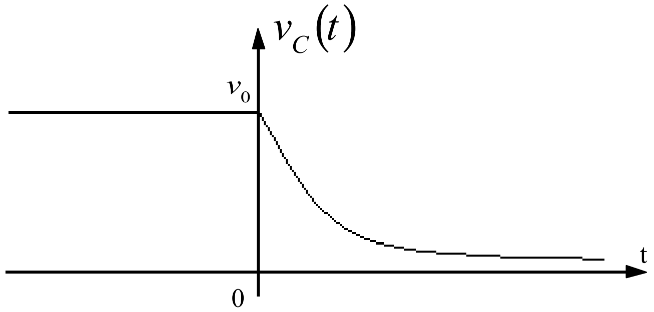
Abbiamo così trovato la pendenza della retta tangente in t=0 alla curva 1; valutiamo ora l'equazione di tale retta:

$$v_C = -\frac{v_0}{RC}t + v_0$$

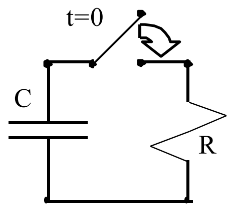
Valutiamo ora l'intersezione di questa retta con l'asse delle ascisse:

$$\begin{cases} v_C = -\frac{v_0}{RC}t + v_0 \\ v_C = 0 \end{cases} \Rightarrow t = RC \quad \text{c.v.d.}$$

Abbiamo dunque dimostrato che RC è una costante di tempo; in particolare, RC è una costante di tempo che mi dice quanto velocemente la curva 1 va a zero, ovvero quanto velocemente il condensatore si scarica.
Consideriamo ora il grafico seguente:



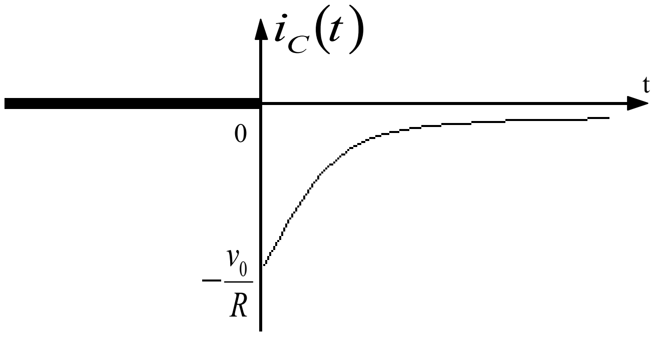
L'analisi di tale grafico ci suggerisce la seguente interpretazione: fino al tempo t=0 avevamo un condensatore carico isolato, al tempo t=0 tale condensatore è stato posto in contatto con un resistore, ha iniziato a circolare corrente e il condensatore si è scaricato. Dal punto di vista circuitale ciò significa avere un circuito del tipo seguente:



Il nuovo simbolo introdotto rappresenta un interruttore che si chiude all'istante t=0 permettendo alla corrente di iniziare a fluire e al condensatore di scaricarsi. Ricordiamo ora la relazione caratteristica di un condensatore, combiniamola con il risultato trovato per l'equazione differenziale che stiamo analizzando e troviamo la corrente che fluisce nel condensatore:

$$i_C(t) = C\frac{dv_C}{dt} = -\frac{v_0}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Se vogliamo graficare anche l'andamento della corrente in funzione del tempo, osservando che prima dell'istante t=0 ho un circuito aperto, avrò dunque il seguente grafico:



Osserviamo quindi che il grafico della corrente presenta una discontinuità in corrispondenza del punto angoloso presente sul grafico della tensione; siccome, però, tale discontinuità è una discontinuità finita, ha ancora senso la relazione:

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(t)dt$$

Un discorso assolutamente identico, fatto a proposito dell'induttore, ci porterà ad osservare una discontinuità nel grafico della tensione in corrispondenza di un punto angoloso nel grafico della corrente.

Equilibrio e stabilità di un sistema. Visione energetica degli elementi dinamici.

Consideriamo un caso generico in cui si analizza un circuito che contenga un numero n di elementi dinamici. Come già detto lo studio di questo tipo di circuiti consiste nella risoluzione di un sistema di equazioni differenziali. Un sistema di equazioni differenziali (noi ci occuperemo quasi esclusivamente di equazioni differenziali lineari e, per il momento, omogenee) può essere espresso in forma matriciale come segue:

$$\underline{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \underline{A}\,\underline{x}$$

dove $\underline{x}$ è un vettore di dimensioni n mentre $\underline{A}$ è una matrice quadrata di ordine n. Data dunque questa equazione differenziale andiamo a valutare i punti di equilibrio; i punti di equilibrio sono quelli per i quali è valida la seguente relazione:

$$\underline{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = 0$$

Nel caso, quindi, di un sistema di equazioni differenziali omogenee, la relazione precedentemente scritta equivale alla seguente:

$$\underline{A}\,\underline{x} = 0$$

Siamo, dunque, in una situazione molto facile da gestire; da questa equazione, tra l'altro, si nota come i punti di equilibrio non dipendano dalle condizioni iniziali (tali condizioni influiscono, semmai, sul particolare punto di equilibrio che si potrà raggiungere ma non sui potenziali punti di equilibrio presenti). Nel caso in cui si avesse un sistema di equazioni differenziali non lineari, la forma matriciale del sistema sarebbe la seguente:

$$\underline{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \underline{F}(\underline{x})$$

e quindi i punti di equilibrio si ricaverebbero tramite la risoluzione di un'equazione matriciale del tipo:

$$\underline{F}(\underline{x}) = 0$$

Torniamo però al caso lineare. Per risolvere la relazione che esplicita i punti di equilibrio dobbiamo tener presente due casi possibili:

- il primo caso è quello in cui la matrice $\underline{A}$ è non singolare: in questo caso l'unico punto di equilibrio è l'origine e quindi si avrà:

$$\underline{x}_{Eq} = 0$$

- il caso in cui la matrice $\underline{A}$ è singolare; in questo caso, se la matrice $\underline{A}$ ha rango n-1, ci saranno infinite soluzioni che soddisfano all'equazione in questione. Dal punto di vista geometrico, nel caso in cui si stia lavorando con uno spazio di dimensione 2 (ovvero nel caso in cui il sistema comprende due equazioni differenziali) lo spazio delle soluzioni sarà un piano e i punti di equilibrio saranno tutti i punti di una retta passante per l'origine (generalizzando al caso ad n dimensioni si parla di un sottospazio di dimensione n-1, appunto)

Per il momento noi ci soffermeremo solo sul primo caso.

Una volta stabiliti quali siano i punti di equilibrio del sistema dobbiamo valutare la stabilità dell'equilibrio. Per studiare il problema della stabilità torniamo all'equazione matriciale:

$$\underline{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \underline{A}\,\underline{x}$$

corredata delle segenti condizioni al contorno (anch'esse in forma matriciale):

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

La soluzione di questa equazione, nel nostro caso, sarà dunque:

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t}\,\underline{x}_0$$

Supponiamo ora che la matrice $\underline{A}$ sia scomponibile come segue:

$$\underline{A} = \underline{U}\,\underline{D}\,\underline{U}^*$$

dove $\underline{U}$ è la matrice colonna dei vettori mentre $\underline{D}$ è la matrice diagonale degli autovalori. Si arriverà allora all'espressione:

$$e^{\underline{A}t} = \underline{U}e^{\underline{D}t}\underline{U}^*$$

dove sia:

$$e^{\underline{D}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

e si avrà quindi:

$$x_i(t) = \sum_i k_{ij} e^{\lambda_i t}$$

Il succo di questi discorsi di pura algebra lineare è che i punti di equilibrio dipendono dagli autovalori della matrice $\underline{A}$. Ciò significa che, se vogliamo fare delle considerazioni sulla stabilità dell'equilibrio, dobbiamo andare a considerare gli autovalori della matrice $\underline{A}$. Supponiamo dunque che si siano trovati n autovalori dalla matrice $\underline{A}$ (siamo quindi ancora nel generico caso n-dimensionale); gli n autovalori trovati potranno essere in parte reali e in parte complessi coniugati; analizziamo, per iniziare, gli autovalori reali:

-) tutti gli auotvalori negativi implicano un esponenziale con esponente negativo e quindi tendono a stabilizzare il sistema;

-) gli autovalori nulli portano a delle costanti, se avessi tutti autovalori nulli mi troverei nel caso di un sistema semplicemente stabile (la stabilità semplice coincide concettualmente con la stabilità indifferente);

-) gli autovalori positivi implicano degli esponenziali divergenti, basta dunque anche un solo autovalore positivo per far sì che il sistema diverga.

Per quanto riguarda, invece, gli autovalori complessi coniugati, ricordiamo come un numero complesso possa essere espresso come un esponenziale (che esplicita la parte reale) moltiplicato per una funzione limitata; ciò significa che quello che domina la stabilità o meno è la parte reale; sarà dunque necessario trattare gli autovalori complessi coniugati prendendone solo la parte reale, osservare se questa è positiva, negativa o nulla e fare le stesse considerazioni prima viste per gli autovalori reali.

Accenniamo ora semplicemente al caso dello studio della stabilità dell'equilibrio nel caso dei sistemi non lineari. Come già si è detto i punti di equilibrio andrebbero ricercati tramite la relazione:

$$F(x) = 0$$

Si noti come ci siamo messi, per semplicità, nel caso monodimensionale; ovviamente il discorso si può ampliare anche al caso n-dimensionale. La funzione F, dunque, è una funzione non lineare e, in quanto tale, l'equazione che la contiene non viene risolta. Con dei metodi numerici si possono però cercare degli zeri di tale funzione, linearizzare tale funzione nell'intorno di tali zeri, trovandosi dunque di fronte a relazioni del tipo:

$$\frac{dx}{dt} = J\big|_{P_0} x$$

dove J è uno jacobiano. A questo punto possiamo trattare quest'ultima relazione come un'equazione differenziale lineare; è però ovvio che tutte le osservazioni che facciamo hanno una validità limitata all'intorno del punto di zero, non c'è quindi modo di avere delle informazioni globalizzate.

Torniamo ora più strettamente a parlare di elementi dinamici e vediamo come si comportano, dal punto di vista energetico, i condensatori e gli induttori; incominciamo con l'analizzare i condensatori. Ricordiamo innanzitutto una relazione fondamentale legata ai condensatori che è la seguente:

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

Osserviamo ora che il fatto che un condensatore carico permetta alla corrente di corcolare una volta che il condensatore viene collegato, per esempio, con una resistenza, significa che il condensatore ha, in qualche modo, immagazzinato una certa energia che libera quando viene collegato con il resistore. Il nostro scopo è ora quello di valutare tale energia. Un modo comodo di farlo può essere quello di integrare la potenza ovvero di considerare una relazione del tipo:

$$E_C(t) = \int_{-\infty}^{t} v_C i_C dt$$

Supponendo di avere un condensatore lineare di capacità C e ricordando la relazione che lega corrente e tensione sul condensatore, tale relazione può essere così riscritta:

$$E_C(t) = \int_{t_0}^{t} v_C C\frac{dv_C}{dt}dt = \int_{v_C(t_0)=0}^{v_C(t)} Cv_C dv_C = \frac{Cv_C^2(t)}{2}$$

Dobbiamo osservare due cose importanti: la prima è che gli estremi di integrazione non comprendono più l'infinito, l'estremo inferire è infatti riferito ad un tempo per il quale si sa che la tensione sul condensatore è nulla; la seconda è che l'energia del condensatore, pur essendo in origine un integrale sul tempo, perde completamente la dipendenza che lega la tensione al tempo; ora, infatti, importa solo il valore della tensione in quel dato istante. Un altro modo per esprimere l'energia di un condensatore prevede di sfruttare le due seguenti relazioni:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{e} \quad q = Cv$$

Sostituendo queste due relazioni nell'integrale della potenza si ottiene:

$$E_C(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{q}{C}\frac{dq}{dt}dt = \int_{q(t_0)=0}^{q(t)} \frac{q}{C}dq = \frac{q^2(t)}{2C}$$

Anche in questo caso valgono le due osservazioni fatte per il caso precedente.
Con un discorso assolutamente analogo possiamo gestire anche il caso duale, ovvero il caso dell'induttore. Anche in questo caso si partirà dall'equazione di integrazione della potenza (che, di per sé, è assolutamente generica); si deve poi tener conto della seguente relazione, tipica dell'induttore:

$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

Combinando dunque questa relazione con l'integrale della potenza si ottiene:

$$E_L(t) = \int_{-\infty}^{t} v_L i_L dt = \int_{t_0}^{t} i_L L\frac{di_L}{dt}dt = \int_{i_L(t_0)=0}^{i_L(t)} L i_L di_L = \frac{L i_L^2(t)}{2}$$

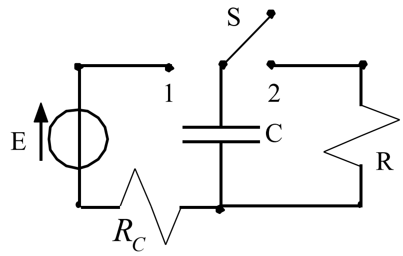
Se vogliamo affrontare dal punto di vista energetico anche il resistore vediamo, invece, che le cose cambiano leggermente; ricordiamo infatti come la relazione caratteristica di un resistore sia:

$$v_R = Ri_R$$

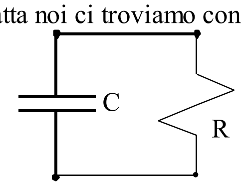
Combinando questa relazione con l'integrale della potenza si ottiene:

$$E_R(t) = \int_{-\infty}^{t} v_R i_R dt = \int_{t_0}^{t} R i_R^2(t)dt$$

Appare dunque evidente come, in questo caso, la dipendenza diretta dal tempo non si elimina.
Vediamo ora due esempi di esercizi con i transitori del primo ordine.
Si supponga, inizialmente, di avere il seguente circuito:



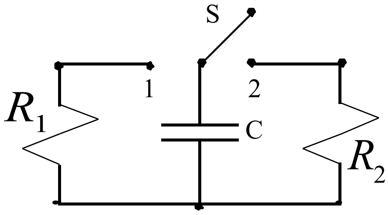
L'interruttore S è fermo sulla posizione 1 da tempo immemore, quanto basta perché, se esiste un equilibrio possibile, questo sia stato raggiunto; al tempo t=0 l'interruttore scatta e si porta istantaneamente nella posizione 2. Mentre l'interruttore era settato nella posizione 1, essendo stato raggiunto l'equilibrio, nel circuito formato dalla maglia di sinistra non scorre più corrente, dunque non ci sarà caduta di tensione sul resistore in serie al generatore di tensione e quindi, semplicemente attraverso una LKV, si arriva a dire che la tensione sul condensatore è uguale alla tensione sul generatore di tensione. Quando l'interruttore scatta noi ci troviamo con un circuito del tipo:



Questo circuito è assolutamente identico a quello che abbiamo analizzato nella lezione numero 11, l'unica differenza è che il dato iniziale che ci permette di risolvere in maniera univoca l'equazione differenziale che si otterrà sarà il seguente:

$$v_C(0) = E$$

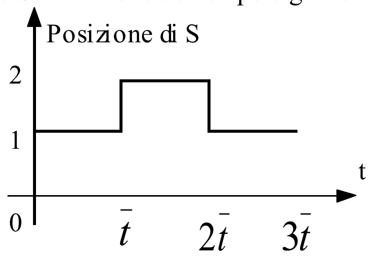
Vediamo ora un esempio un po' più complicato; consideriamo dunque il seguente circuito:



E' richiesto di graficare l'andamento della tensione e della corrente sul condensatore sapendo che il dato iniziale è:

$$v_C(0) = v_0$$

sapendo che la resistenza del resistore 1 è negativa, che la capacità del condensatore e la resistenza del resistore 2 sono positive e che la posizione dell'interruttore S in funzione del tempo è graficata nel modo seguente:



Studiamo il primo intervallo, ovvero studiamo il tratto:

$$0 \le t < \bar{t}$$

Per valutare la tensione in questo intervallo devo, nuovamente, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = -\dfrac{1}{R_1 C} v_C \\ v_C(0) = v_0 \end{cases}$$

Da questo sistema si ricava:

$$v_C(t) = v_0 e^{-\frac{t}{R_1 C}}$$

Dunque, l'andamento della corrente sarà:

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{v_0}{R_1} e^{-\frac{t}{R_1 C}}$$

Il valore della corrente all'inizio di questo intervallo sarà:

$$i_C(0) = -\frac{v_0}{R_1} = i_0$$

I valori della corrente e delle tensione alla fine dell'intervallo di tempo che stiamo valutando saranno, invece:

$$v_C(\bar{t}) = v_0 e^{-\frac{\bar{t}}{R_1 C}} = v_1 \qquad \text{e} \qquad i_C(\bar{t}) = -\frac{v_0}{R_1} e^{-\frac{\bar{t}}{R_1 C}} = i_1$$

Passiamo ora al secondo intervallo, ovvero all'intervallo temporale:

$$\bar{t} \le t < 2\bar{t}$$

Per valutare la tensione in questo intervallo devo, nuovamente, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = -\dfrac{1}{R_2 C} v_C \\ v_C(\bar{t}) = v_0 e^{-\frac{\bar{t}}{R_1 C}} \end{cases}$$

Da questo sistema si ricava:

$$v_C(t - \bar{t}) = v_0 e^{-\frac{\bar{t}}{R_1 C}} e^{-\frac{t-\bar{t}}{R_2 C}}$$

Dunque, l'andamento della corrente sarà:

$$i_C\left(t-\bar{t}\right)=C\frac{dv_C\left(t-\bar{t}\right)}{dt}=-\frac{v_0}{R_2}e^{-\frac{\bar{t}}{R_1C}}e^{-\frac{t-\bar{t}}{R_2C}}$$

Il valore della corrente nell'estremo temporale inferiore di questo intervallo sarà:

$$i_C\left(\bar{t}\right)=-\frac{v_0}{R_2}e^{-\frac{\bar{t}}{R_1C}}=i_{2i}$$

I valori della corrente e delle tensione alla fine dell'intervallo di tempo che stiamo valutando saranno:

$$v_C\left(2\bar{t}\right)=v_0e^{-\frac{\bar{t}}{R_1C}-\frac{\bar{t}}{R_2C}}=v_2 \qquad \text{e} \qquad i_C\left(2\bar{t}\right)=-\frac{v_0}{R_2}e^{-\frac{\bar{t}}{R_1C}-\frac{\bar{t}}{R_2C}}=i_2$$

Siamo infine giunti al terzo intervallo, ovvero all'intervallo temporale:

$$2\bar{t}\le t<3\bar{t}$$

Per valutare la tensione in questo intervallo devo, nuovamente, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases}\dfrac{dv_C}{dt}=-\dfrac{1}{R_1C}v_C\\ v_C\left(2\bar{t}\right)=v_0e^{-\frac{\bar{t}}{R_1C}-\frac{\bar{t}}{R_2C}}\end{cases}$$

Da questo sistema si ricava:

$$v_C\left(t-2\bar{t}\right)=v_0e^{-\frac{\bar{t}}{R_1C}-\frac{\bar{t}}{R_2C}}e^{-\frac{t-2\bar{t}}{R_1C}}$$

Dunque, l'andamento della corrente sarà:

$$i_C\left(t-2\bar{t}\right)=C\frac{dv_C\left(t-2\bar{t}\right)}{dt}=-\frac{v_0}{R_1}e^{-\frac{\bar{t}}{R_1C}-\frac{\bar{t}}{R_2C}}e^{-\frac{t-2\bar{t}}{R_1C}}$$

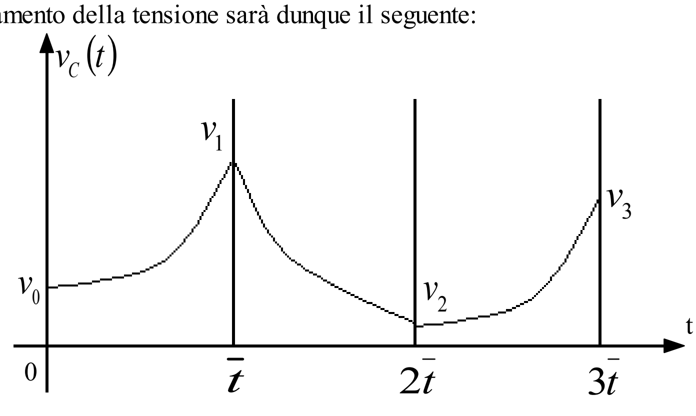
Valutiamo, ancora una volta, il valore della corrente nell'estremo inferiore di questo intervallo:

$$i_C\left(2\bar{t}\right)=-\frac{v_0}{R_1}e^{-\frac{\bar{t}}{R_1C}-\frac{\bar{t}}{R_2C}}=i_{3i}$$

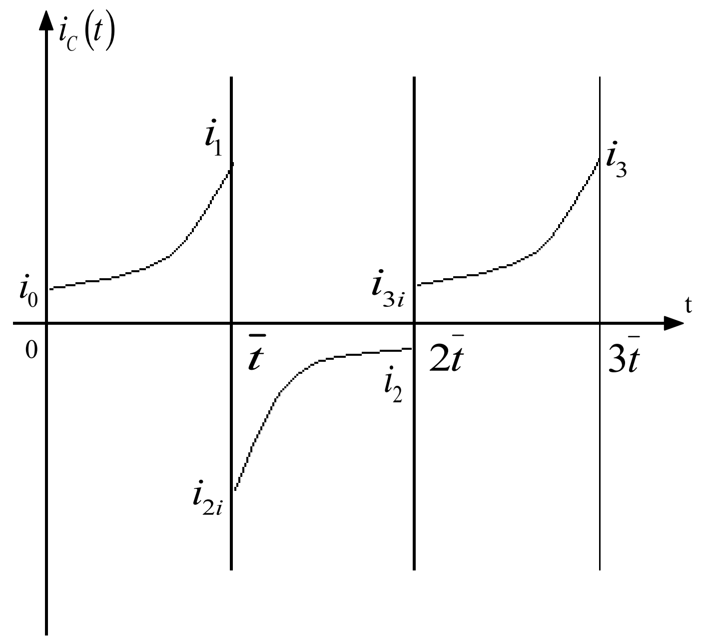
Infine, i valori della corrente e delle tensione alla fine dell'intervallo di tempo che stiamo valutando saranno:

$$v_C\left(3\bar{t}\right)=v_0e^{-\frac{2\bar{t}}{R_1C}-\frac{\bar{t}}{R_2C}}=v_3 \qquad \text{e} \qquad i_C\left(3\bar{t}\right)=-\frac{v_0}{R_1}e^{-\frac{2\bar{t}}{R_1C}-\frac{\bar{t}}{R_2C}}=i_3$$

Il grafico relativo all'andamento della tensione sarà dunque il seguente:

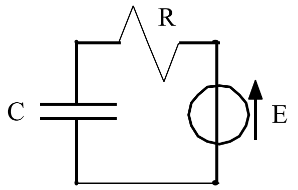


Per quanto riguarda, invece, il grafico della corrente, osserviamo che, anche senza fare i conti, partendo dal grafico della tensione e ricordando che la corrente è legata alla derivata della tensione, possiamo in generale ricavare qualitativamente l'andamento del grafico della corrente semplicemente osservando la pendenza del grafico della tensione.

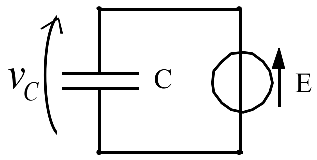

$i_C(t)$
i_1
i_3
i_0
i_{3i}
t
0
$\bar{t}$
$2\bar{t}$
$3\bar{t}$
i_2
i_{2i}

Transitori del primo ordine in presenza di generatori.

Fino ad ora abbiamo analizzato i casi nei quali un unico elemento attivo fosse collegato ad una rete lineare completamente resistiva che non comprendesse generatori di alcuna sorta, in questo caso la parte adinamica del circuito poteva essere ridotta ad un unico resistore e noi dovevamo dunque risolvere un circuito formato da un elemento dinamico collegato con un resistore. Mettiamoci ora nel caso in cui un unico elemento dinamico sia collegato ad una rete lineare composta da resistori e da generatori di qualunque tipo (di tensione o di corrente, indipendenti o pilotati); quello che succede è che, in questo caso, la parte adinamica del circuito non potrà essere ridotta ad un unico resitore ma ad un resistore collegato in serie con un generatore di tensione oppure in parallelo ad un generatore di corrente. A livello pratico, dunque, bisognerà cercare l'equivalente Thevenin o Norton della parte adinamica del circuito e ridurre il circuito iniziale ad un circuito che, nel caso si sia scelto l'equivalente Thevenin, sarà di questo tipo:



La prima cosa che dobbiamo chiederci è se il circuito è ben posto o meno; un circuito potrebbe non essere ben posto, ad esempio, se la resistenza presente nel circuito precedentemente disegnato fosse nulla, in quel caso, infatti, il circuito sarebbe equivalente al circuito seguente:



In questo caso osserviamo che, applicando una LKV all'unica maglia presente nel circuito si ottiene:

$$v_C = E$$

Si avrà dunque un sistema senza dinamica infatti, ricordando la relazione che lega la corrente e la tensione nel condensatore, si ricava:

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = 0$$

In questa situazione abbiamo allora una degenerazione, nel senso che non è possibile imporre delle condizioni iniziali arbitrarie (infatti qualunque condizione al contorno che imporrebbe una tensione iniziale sul condensatore diversa da E sarebbe un assurdo). Un altro caso di degenerazione si ha, ad esempio, quando nel circuito sono presenti delle maglie di condensatori (caso, comunque, che non trattiamo ora). Mettiamoci dunque in un caso in cui il circuito in questione non presenta degenerazioni e osserviamo che la corrente che circola nel resistore è la medesima corrente che passa nel condensatore e quindi la caduta di tensione sul resistore sarà:

$$v_R = Ri_C$$

Applicando una LKV a questo circuito si ottiene, quindi:

$$v_C + Ri_C - E = 0$$

Ricordando il legame tra la corrente e la tensione di un condensatore, posso riscrivere la relazione precedente come segue:

$$v_C + RC\frac{dv_C}{dt} - E = 0$$

Esplicitando dunque tale equazione rispetto alla derivata della tensione sul condensatore si ottiene:

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{RC}v_C + \frac{E}{RC}$$

Abbiamo dunque trovato una equazione differenziale lineare non omogenea; sappiamo quindi che, per risolverla, dobbiamo prima trovare la soluzione dell'omogenea associata e poi sommare a questa una soluzione particolare. L'equazione omogenea associata all'equazione in analisi è la seguente:

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{RC}v_C$$

Si tratta dunque della medesima equazione che avevamo trovato per i transitori in assenza di generatori, sappiamo dunque trovarne facilmente la soluzione che sarà:

$$v_{Co}(t) = ke^{-\frac{t}{RC}}$$

Per trovare la soluzione particolare ci sono due modi:

- Il primo metodo consiste nell'applicare meccanicamente i metodi dell'analisi matematica: si dovrà allora inserire una seconda costante h ottenendo, complessivamente, una soluzione del tipo:

  $$v_C(t) = ke^{-\frac{t}{RC}} + h$$

  Le costanti h e k andranno poi esplicitate tenendo conto della condizione iniziale
- Il secondo modo si può applicare soltanto se l'equazione in questione è stabile ovvero, nel nostro caso, se vale la relazione:

  $$\frac{1}{RC} > 0$$

  In questo caso possiamo andiamo a vedere cosa succede a regime, ovvero quando la corrente si è fermata. Quando la corrente si è fermata la caduta di tensione sul resistore è nulla e quindi la tensione sul condensatore vale E. Diciamo allora che la soluzione particolare sarà:

  $$\lim_{t\to\infty} v_C(t) = E$$

Soffermiamoci sul secondo di questi due metodi che porta alla seguente soluzione complessiva:

$$v_C(t) = ke^{-\frac{t}{RC}} + E$$

A questo punto bisognerà introdurre la condizione iniziale che potrà essere del tipo:

$$v_C(0) = v_0$$

Applicando questa condizione iniziale alla soluzione complessiva si ottiene:

$$k + E = v_0$$

dalla quale si ricava:

$$k = v_0 - E$$

La soluzione finale del circuito sarà dunque la seguente:

$$v_C(t) = (v_0 - E)e^{-\frac{t}{RC}} + E$$

Una soluzione come questa indica che la tensione ha inizialmente il valore dato dalle condizioni iniziali e poi, con il passare del tempo, si avvicina asintoticamente ad E. Se il sistema fosse stato instabile la soluzione, partendo anch'essa dal valore dato dalle condizioni iniziali, divergerebbe tendendo subito all'infinito (si potrebbe pensare che, anche nel caso in cui il sistema fosse instabile, la soluzione sia quella trovata per il caso di sistema stabile ma in questo caso la E sarebbe assolutamente trascurabile). Vediamo ora di quanto è variata l'energia immagazzinata nel condensatore; ricordando la relazione

$$E_C(t) = \frac{Cv^2(t)}{2}$$

e osservando che, nel caso in analisi, si ha:

$$\begin{cases} v_C(0) = v_0 \\ v_C(\infty) = E \end{cases}$$

si ha che la variazione dell'energia del condensatore sarà:

$$\Delta E_C(0,\infty) = \frac{CE^2}{2} - \frac{Cv_0^2}{2}$$

Un'altra grandezza che possiamo valutare è la potenza erogata dal generatore che, ovviamente, si troverà come prodotto tra la tensione e la corrente sul generatore; in questo caso, però, la corrente sul generatore equivale alla corrente sul condensatore che, nota la tensione, è facilmente calcolabile ed è:

$$i_C(t) = C\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{R}(v_0 - E)e^{-\frac{t}{RC}}$$

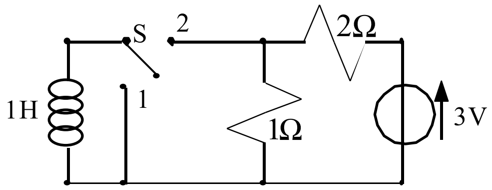
La potenza erogata dal generatore sarà dunque:

$$W(t) = Ei_C(t) = -\frac{E}{R}(v_0 - E)e^{-\frac{t}{RC}}$$

Per trovare l'energia fornita dal generatore si potrà ora integrare la potenza tra -∞ e +∞ (si osservi che, essendo la corrente nulla per t<0, tali estremi di integrazione diventano automaticamente 0 e +∞); avremo allora:

$$E_G(t)=\int_0^{+\infty}-\frac{E}{R}(v_0-E)e^{-\frac{t}{RC}}dt=-EC(v_0-E)$$

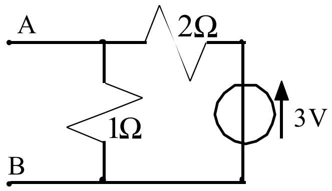
Vediamo ora un esempio applicativo abbastanza completo: si consideri, dunque, il seguente circuito:



L'interruttore S è fermo da tempo immemore nella posizione 1; al tempo t=0 scatta nella posizione 2. Studiare l'andamento della corrente nell'induttore. Valutare in quale istante dallo scatto dell'interruttore la corrente nell'induttore vale 2A. Le condizioni iniziali di questo problema sono le seguenti:

$$i_l(0)=i_0=3A$$

Cerco la soluzione sfruttando l'equivalente Thevenin. Dovrò valutare l'equivalente Thevenin del bipolo rappresentato nella seguente figura:



Per valutare l'equivalente Thevenin devo valutare, innanzitutto, la resistenza equivalente, per far questo spengo il generatore di tensione ottenendo il bipolo di figura (a). A questo punto si nota che i due resistori sono collegati in parallelo – figura (b)-, posso dunque ridurli ad uno solo ottenendo il bipolo di figura (c):

Figura (a)

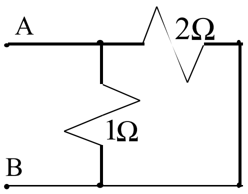


Figura (b)

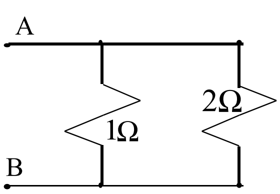
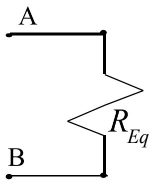


Figura (c)



La resistenza equivalente sarà data dalla relazione:

$$R_{Eq}=\left(\frac{1}{2}+1\right)^{-1}=\frac{2}{3}\Omega$$

Per valutare la tensione a vuoto osserviamo che, tale tensione, equivale alla caduta di tensione sul resistore da 1Ω. Dunque consideriamo il circuito della seguente figura (d); possiamo osservare che i due resistori sono collegati in serie e quindi, riducendoli ad uno, si ottiene il circuito di figura (e).

Figura (d)

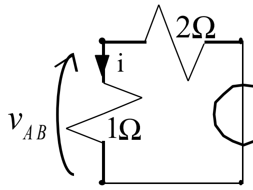
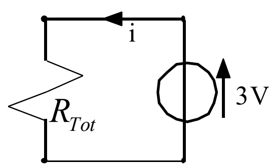


Figura (e)



Ovviamente sarà:

$$R_{Tot}=(2\Omega)+(1\Omega)=3\Omega$$

Ora osserviamo che, in figura (e), la LKV mi dice che la caduta di tensione sul resistore da 3Ω equivale alla tensione generata dal generatore di tensione. Possiamo dunque facilmente ricavare la corrente che circola in tale circuito:

$$i=\frac{(3V)}{R_{Tot}}=\frac{(3V)}{(3\Omega)}=1A$$

Questa corrente è la medesima che circola nel circuito di figura (d) e quindi si può facilmente ricavare la caduta di tensione sul resistore da 1Ω:

$$v_{AB}=(1\Omega)i=(1\Omega)(1A)=1V$$

L'equivalente di Thevenin che stavamo cercando è quindi il bipolo rappresentato in figura (f) che, collegato con l'induttore, ci porta al circuito di figura (g).

Figura (f)

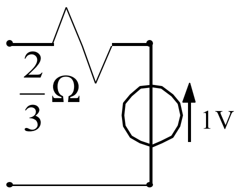
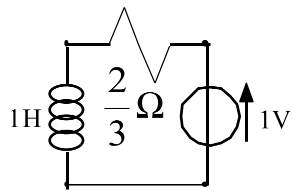


Figura (g)



Applichiamo ora la LKV al circuito della figura (g), ottenendo:

$$v_l + v_R + (1V) = 0$$

Supponendo che la corrente sia diretta in senso antiorario nel circuito, la relazione caratteristica dell'induttore sarà la seguente:

$$v_l = (1H)\frac{di_l}{dt} = \frac{di_l}{dt}$$

mentre la legge di Ohm applicata al resistore, tenendo conto che la corrente che lo attraversa è la stessa che attraversa l'induttore, sarà:

$$v_R = \frac{2}{3} i_l$$

Quindi, la relazione precedentemente trovata con la LKV, diventa:

$$\frac{di_l}{dt} = -\frac{2}{3} i_l + 1$$

La soluzione generale di questa equazione differenziale sarà:

$$i_l(t) = ke^{-\frac{2}{3}t}$$

Cerchiamo ora la soluzione particolare mettendoci nella situazione di regime, ovvero nella situazione nella quale tutte le derivate sono nulle, ovvero nella situazione nella quale:

$$\frac{di_l}{dt} = 0$$

ovvero:

$$-\frac{2}{3} i_l + 1 = 0$$

da cui si ricava:

$$i_l = \frac{3}{2}$$

Questa è, appunto, la soluzione particolare dell'equazione. Mettiamo ora assieme la soluzione generale e la soluzione particolare ottenendo:

$$i_l(t) = ke^{-\frac{2}{3}t} + \frac{3}{2}$$

Combiniamo ora questa forma della soluzione con le condizioni iniziali ottenendo:

$$k + \frac{3}{2} = 3$$

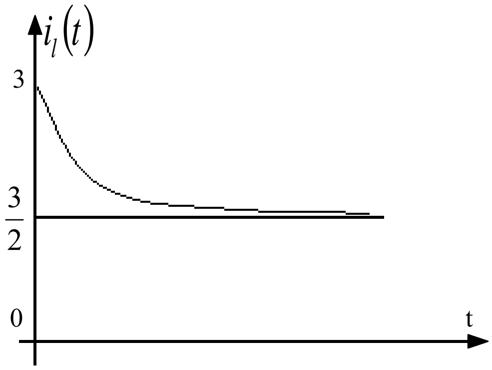
Da cui si ricava:

$$k = \frac{3}{2}$$

e quindi la soluzione finale che stiamo cercando sarà:

$$i_l(t) = \frac{3}{2} e^{-\frac{2}{3}t} + \frac{3}{2}$$

Graficamente avremo dunque:



Se vogliamo ora stabilire in quale istante la corrente nell'induttore vale 2A, dobbiamo usare la seguente relazione:

$$2 = \frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}t} + \frac{3}{2}$$

Da questa relazione si ricava:

$$e^{-\frac{2}{3}t} = \frac{1}{3}$$

Passando quindi ai logaritmi si ottiene:

$$-\frac{2}{3}t = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

Da cui si ricava:

$$t = -\frac{3}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

Transitori degli ordini superiori.

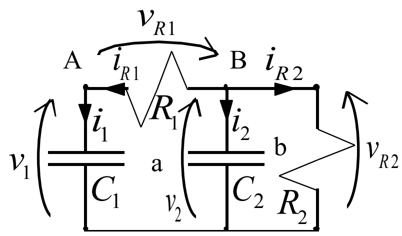
Abbiamo già visto come, per sistemi di ordine n senza la presenza di generatori indipendenti o pilotati, il sistema di equazioni differenziali che descrive il circuito possa essere scritto tramite la seguente relazione matriciale:

$$\underline{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \underline{A}\,\underline{x}$$

La soluzione di questo tipo di sistemi avrà la seguente forma:

$$\underline{x(t)} = \sum_i k_i \underline{\eta}_i e^{\lambda_i t}$$

dove le k sono costanti mentre gli η sono gli autovettori associati agli autovalori i-esimi. Queste soluzioni, ovviamente, possono essere stabili o instabili a seconda del segno degli autovalori. Noi ci occuperemo prevalentemente dei transitori del secondo ordine, vediamo quindi un esempio tramite il seguente circuito:



Applicando la LKV alla maglia "b" si ricava:

$$v_2 = v_{R2}$$

Possiamo dunque esprimere come segue la corrente attraverso il resistore numero 2:

$$i_{R2} = \frac{v_2}{R_2}$$

Applicando, invece, la LKV alla maglia "a" si ricava:

$$v_{R1} = v_2 - v_1$$

e quindi possiamo esprimere la corrente che attraversa il resistore numero 1 come segue:

$$i_{R1} = \frac{v_2 - v_1}{R_1}$$

Tenendo conto della forma con la quale abbiamo espresso le correnti attraverso i resistori, applicando la LKC ai nodi A e B si ottiene la seguente coppia di relazioni:

$$\begin{cases} i_1 = \dfrac{v_2 - v_1}{R_1} \\ i_2 = \dfrac{v_2 - v_1}{R_1} + \dfrac{v_2}{R_2} \end{cases}$$

Se in una delle due relazioni di tale sistema la corrente si fosse semplificata e si fosse ottenuta una relazione del tipo:

$$v_1 = \alpha v_2$$

allora il circuito non sarebbe più stato di ordine 2. Tale relazione avrebbe preso il nome di relazione di degenerazione. Le relazioni di degenerazione si trovano quando il sistema presenta maglie di condensatori, insiemi di taglio di induttori oppure quando sono presenti generatori pilotati. Torniamo ora al sistema che stiamo analizzando. E' giunto ora il momento di tener conto delle relazioni costitutive dei due condensatori:

$$\begin{cases} i_1 = C_1 \dfrac{dv_1}{dt} \\ i_2 = C_2 \dfrac{dv_2}{dt} \end{cases}$$

Combinando i due sistemi si ottiene il seguente sistema risolutivo:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_1}{dt} = -\dfrac{v_1}{R_1C_1} + \dfrac{v_2}{R_1C_1} \\ \dfrac{dv_2}{dt} = \dfrac{v_1}{R_1C_2} - v_2\left(\dfrac{1}{R_1C_2} + \dfrac{1}{R_2C_2}\right) \end{cases}$$

Da ora in poi, per alleggerire la notazione, considereremo dei valori numerici:

$$\begin{cases} R_1 = R_2 = 1\Omega \\ C_1 = C_2 = 1F \end{cases}$$

Usando questi valori numerici il sistema risolutivo si può riscrivere nella seguente forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dv_1}{dt} \\ \dfrac{dv_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Giunti a questo punto dobbiamo cercare gli autovalori della matrice dei coefficienti: ciò significa risolvere l'equazione:

$$\det\left(\lambda \underline{I} - \underline{A}\right) = 0$$

Nel nostro caso tale equazione diventa:

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 0$$

ovvero:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

Risolvendo tale equazione si trovano gli autovalori della matrice che, nel nostro caso, saranno:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -0{,}4 \wedge \lambda_2 = -2{,}6$$

Osserviamo che entrambi gli autovalori sono negativi e quindi il sistema è stabile. Ora dobbiamo trovare gli autovettori associati agli autovalori trovati; dobbiamo quindi risolvere due relazioni del tipo:

$$\underline{A}\underline{\eta}_i = \lambda_i \underline{\eta}_i$$

Dunque, per il primo autovalore si avrà:

$$\underline{A}\underline{\eta}_1 = \lambda_1 \underline{\eta}_1$$

ovvero, esplicitando gli elementi che costituiscono questa relazione:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \end{bmatrix} = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \begin{bmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \end{bmatrix}$$

Ricaviamo la prima equazione di questo sistema che sarà:

$$-\eta_{11} + \eta_{12} = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\eta_{11}$$

dalla quale si ricava:

$$\eta_{12} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\eta_{11}$$

Dato dunque arbitrariamente un valore unitario al primo elemento di questo autovettore si ottiene:

$$\underline{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

Analogamente, per il secondo autovalore si avrà:

$$\underline{A}\underline{\eta}_2 = \lambda_2 \underline{\eta}_2$$

ovvero, esplicitando gli elementi che costituiscono questa relazione:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{21} \\ \eta_{22} \end{bmatrix} = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \begin{bmatrix} \eta_{21} \\ \eta_{22} \end{bmatrix}$$

Ricaviamo la prima equazione di questo sistema che sarà:

$$-\eta_{21}+\eta_{22}=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\eta_{21}$$

dalla quale si ricava:

$$\eta_{22}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\eta_{21}$$

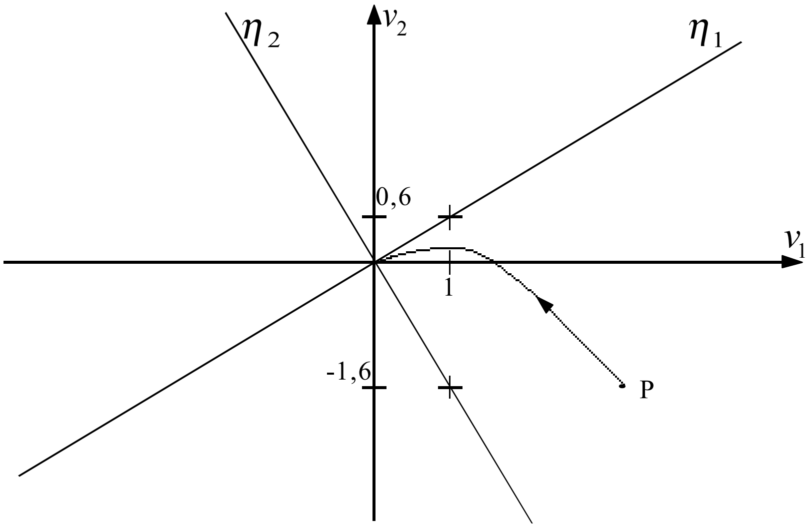
Dato dunque, arbitrariamente, un valore unitario al primo elemento di questo autovettore si ottiene:

$$\underline{\eta}_2=\begin{bmatrix}1\\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}$$

Possiamo allora, finalmente, esprimere la soluzione del circuito dato:

$$\begin{bmatrix}v_1(t)\\ v_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}k_1e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t}+\begin{bmatrix}1\\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}k_2e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}t}$$

Ovviamente le due costanti k dipendono dalle condizioni iniziali. Vediamo ora la rappresentazione grafica del sistema. Nel grafico seguente si possono vedere i due autovettori (le due rette) e una traiettoria. Si noti dunque che una qualsiasi traiettoria che parte da un qualunque punto P (che rappresenta le condizioni iniziali) sarà inizialmente diretta parallelamente con l'autovettore numero 2 in quanto tale autovettore è quello che tende più rapidamente a zero (essendo un esponenziale negativo con l'esponente in modulo maggiore). Solo quando l'autovettore "più veloce" è diventato oramai trascurabile, la traiettoria gira come l'autovettore "più lento".



Si osservi che, nel caso in analisi, i due autovettori risultano ortogonali tra di loro: ciò è un caso particolare dovuto al fatto che la matrice che abbiamo analizzato era simmetrica. Vogliamo ora dimostrare che, partendo da una condizione iniziale che corrisponda ad un punto P posto su uno dei due autovettori, la traiettoria ricalcherà tale eutovettore. Per dimostrare questo ci chiediamo quando le traiettorie possono essere rettilinee. Innanzitutto osserviamo che, essendo l'origine il punto di equilibrio, una traiettoria rettilinea dovrà per forza passare per l'origine; l'espressione analitica di una traiettoria rettilinea nel piano di stato prima visto dovrà avere la seguente forma:

$$v_1=mv_2$$

Per ottenere una relazione di questo tipo si dovrà avere:

$$\underline{v}(t)=\underline{k}e^{\lambda t}$$

Da questa, infatti, si possono ricavare le due seguenti relazioni:

$$\begin{cases}v_1(t)=k_1e^{\lambda t}\\ v_2(t)=k_2e^{\lambda t}\end{cases}$$

Dividendo tra di loro queste due relazioni si ottiene:

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)}=\frac{k_1}{k_2}=m$$

Abbiamo, quindi, nuovamente trovato la relazione caratteristica di una retta nel piano di stato. Torniamo quindi all'ultima relazione matriciale scritta e deriviamola ottenendo:

$$\underline{\left(\frac{dv}{dt}\right)} = \lambda \underline{k} e^{\lambda t}$$

Confrontando le ultime due relazioni matriciali scritte si ottiene:

$$\underline{\left(\frac{dv}{dt}\right)} = \lambda \underline{v}$$

La prima relazione matriciale scritta durante questa lezione, applicata al caso dei condensatori e quindi con le tensioni come variabili di stato, era la seguente:

$$\underline{\left(\frac{dv}{dt}\right)} = \underline{A}\underline{v}$$

Sottraendo ora, membro a membro, le ultime due relazioni scritte, si ottiene, per un particolare valore della tensione:

$$(\lambda \underline{I} - \underline{A})\underline{\bar{v}} = 0$$

ovvero:

$$\underline{B}\underline{\bar{v}} = 0$$

Quest'ultima relazione coincide sostanzialmente con un'equazione agli autovalori. L'ultima relazione scritta ci dice che il particolare valore della tensione scelto appartiene allo spazio nullo di B ovvero il sottospazio definito da tutti i vettori che si annullano nel prodotto con B; simbolicamente si avrà:

$$\underline{v} \in \ker(B)$$

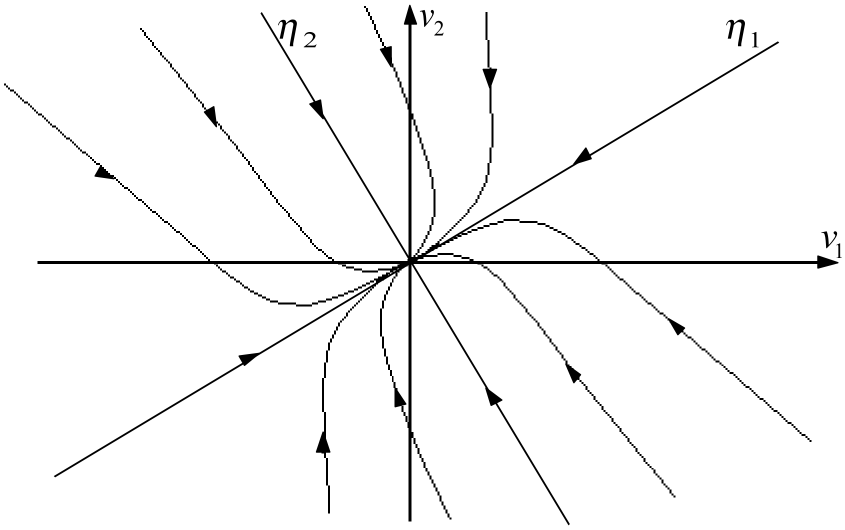
L'ultima relazione matriciale scritta ha una soluzione non banale solo se il determinante della matrice B è nullo; ritroviamo dunque la relazione:

$$\det(\underline{B}) = \det(\lambda \underline{I} - \underline{A}) = 0$$

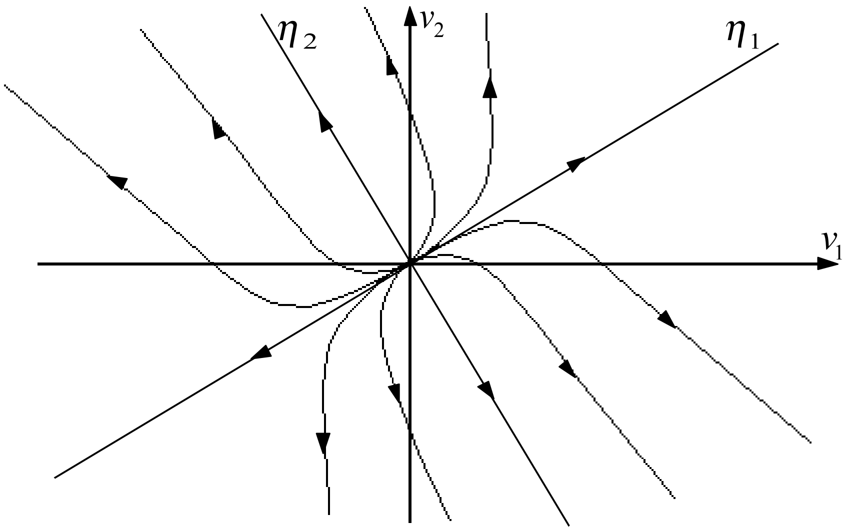
che è la medesima relazione che mi permette di trovare gli autovalori. Dunque abbiamo dimostrato che, cercando le traiettorie rettilinee si ritrovano gli autovettori e quindi se una condizione iniziale corrisponde con un punto P su un autovettore, la traiettoria viaggerà su tale autovettore. Rimangono ora da vedere altri possibili casi nei quali gli autovalori sono coincidenti oppure complessi coniugati.

Tipi di equilibrio.

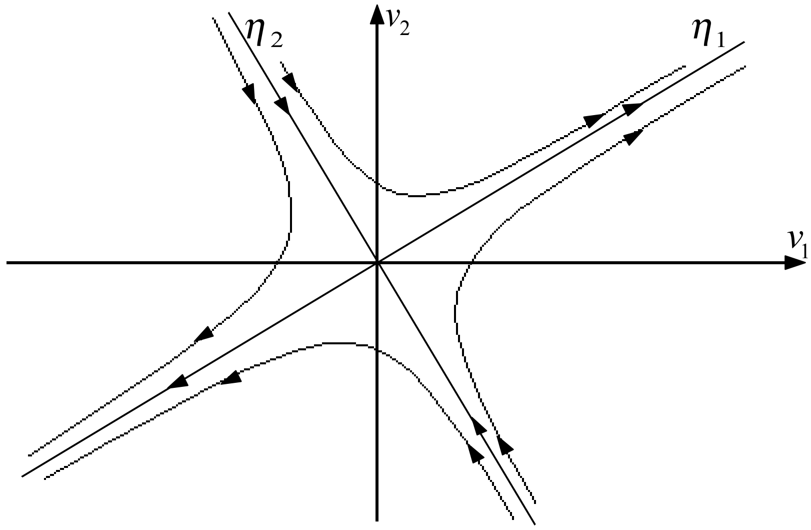
Nell'esempio visto durante l'ultima lezione abbiamo analizzato il caso di un sistema nel quale gli autovalori erano entrambi reali ed entrambi negativi; la rappresentazione grafica sul piano di stato aveva la seguente forma:



In questo caso l'origine, che è un punto di equilibrio, prende il nome di nodo stabile. Nel caso in cui gli autovalori fossero stati reali ma entrambi positivi, la rappresentazione grafica sul piano di stato sarebbe stata la seguente:



In questo caso l'origine prende il nome di nodo instabile. Nel caso in cui gli autovalori, pur essendo reali, siano uno positivo ed uno negativo, la rappresentazione grafica sul piano di stato sarà:



Questa configurazione prende il nome di sella e, per come è stata rappresentata, risulta evidente che l'autovettore associato all'autovalore positivo è il numero 1. Mettiamoci infine nel caso in cui gli autovalori siano complessi coniugati. In questo caso sarebbe possibile dimostrare che, se l'autovalore è complesso, anche l'autovettore ad esso associato è complesso e quindi, avendo due autovalori complessi coniugati, si avranno anche due autovettori complessi coniugati. Risulta allora indispensabile chiarire che cosa si intende per autovettore complesso: un autovettore compleso avrà la seguente struttura (ricordando che, in elettrotecnica, l'unità immaginaria viene indicata con la lettera "j" invece che con la lettera "i"):

$$\underline{\eta} = \underline{\eta}_{\mathrm{Re}} + j\underline{\eta}_{\mathrm{Im}} = \begin{bmatrix} \eta_{1\,\mathrm{Re}} \\ \eta_{2\,\mathrm{Re}} \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} \eta_{1\,\mathrm{Im}} \\ \eta_{2\,\mathrm{Im}} \end{bmatrix}$$

In questo caso la soluzione generica del sistema differenziale avrà la seguente forma:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ke^{\lambda t}\underline{\eta} + \bar{k}e^{\bar{\lambda} t}\underline{\bar{\eta}} = 2\,\mathrm{Re}\left\{ke^{\lambda t}\underline{\eta}\right\}$$

Esplicitiamo ora le componenti reali e complesse dell'autovalore, dell'autovettore e della costante moltiplicativa k:

$$\begin{cases} \lambda = a + j\omega \\ \underline{\eta} = \underline{\eta}_{\mathrm{Re}} + j\underline{\eta}_{\mathrm{Im}} \\ k = |k|e^{j\vartheta} \end{cases}$$

dove si è indicato con θ lo sfasamento di k. A questo punto possiamo scrivere:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2\,\mathrm{Re}\left\{ke^{\lambda t}\underline{\eta}\right\} = 2\,\mathrm{Re}\left\{|k|e^{j\vartheta}e^{(a+j\omega)t}\left(\underline{\eta}_{\mathrm{Re}} + j\underline{\eta}_{\mathrm{Im}}\right)\right\} = 2\,\mathrm{Re}\left\{|k|e^{at}e^{j(\omega t+\vartheta)}\left(\underline{\eta}_{\mathrm{Re}} + j\underline{\eta}_{\mathrm{Im}}\right)\right\}$$

Ora ricordiamo la relazione fondamentale dei numeri complessi secondo la quale:

$$e^{jx} = \cos x + j\,\mathrm{sen}\,x$$

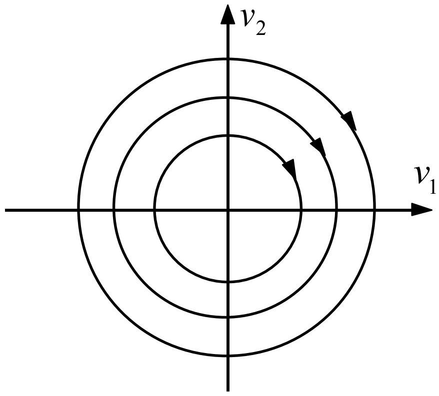
Possiamo dunque scrivere:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2\,\mathrm{Re}\left\{|k|e^{at}e^{j(\omega t+\vartheta)}\left(\underline{\eta}_{\mathrm{Re}} + j\underline{\eta}_{\mathrm{Im}}\right)\right\} = 2\,\mathrm{Re}\left\{|k|e^{at}\left[\cos(\omega t+\vartheta) + j\,\mathrm{sen}(\omega t+\vartheta)\right]\left(\underline{\eta}_{\mathrm{Re}} + \underline{\eta}_{\mathrm{Im}}\right)\right\}$$

A questo punto è semplice isolare la sola parte reale; avremo quindi:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2\,\mathrm{Re}\left\{|k|e^{at}\left[\cos(\omega t+\vartheta) + j\,\mathrm{sen}(\omega t+\vartheta)\right]\left(\underline{\eta}_{\mathrm{Re}} + \underline{\eta}_{\mathrm{Im}}\right)\right\} = 2|k|e^{at}\left[\underline{\eta}_{\mathrm{Re}}\cos(\omega t+\vartheta) - \underline{\eta}_{\mathrm{Im}} sin(\omega t+\vartheta)\right]$$

Possiamo notare la validità di quanto era già stato detto in precedenza parlando dell'equilibrio: ovvero che, in presenza di autovalori complessi, la stabilità del sistema è data dal segno della parte reale degli autovalori; dall'ultima relazione, infatti, si nota che la stabilità o meno dell'equilibrio è data solo dalla "a". Supponiamo ora di avere degli autovalori immaginari puri (dove "a" sia nulla), supponiamo, per semplicità che i due autovettori risultanti siano gli assi coordinati e che le costanti moltiplicative siano le stesse per entrambi gli autovettori; la rappresentazione grafica di questa situazione sarà quella rappresentata nella seguente figura:



Questo tipo di equilibrio si chiama centro. Se una certa condizione iniziale corrisponde con un punto P sul grafico di un centro, la traiettoria passante per il punto P tornerà in quel punto dopo un giro; dunque un sistema che origina un grafico di questo tipo è un sistema che conserva l'energia. Dal punto di vista circuitale, un sistema che conserva l'energia non deve contenere resistori e quindi sarà del tipo rappresentato dalla seguente figura (a). Ovviamente tale rappresentazione è solamente ideale poiché ogni induttore, essendo fatto di filo, ha una sua resistenza interna ed ogni condensatore, per quanto buono possa essere, ha sempre delle perdite; per questo motivo la rappresentazione schematica più calzante della realtà è quella rappresentata in figura (b). I circuiti concettualmente più importanti sono però quelli del tipo rappresentato in figura (c) nei quali si è trascurata la perdita del condensatore ma non la resistenza interna dell'induttore.

Figura (a)

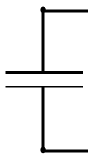


Figura (b)

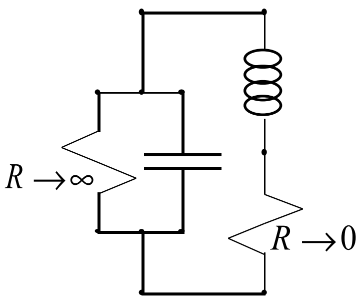
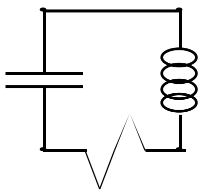
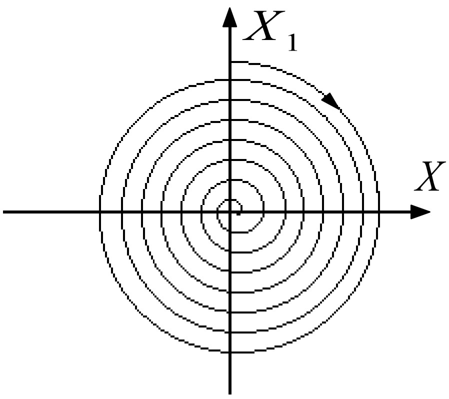


Figura (c)

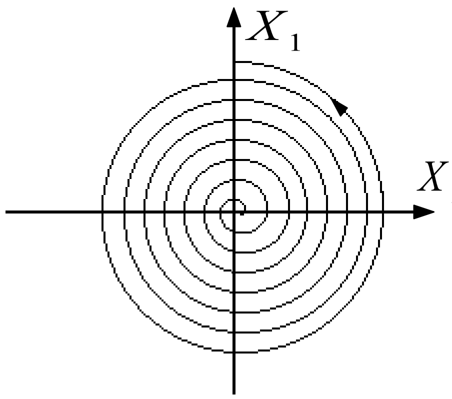


Il grafico della traiettoria del circuito di figura (c) sarà il seguente:

Caso (a)

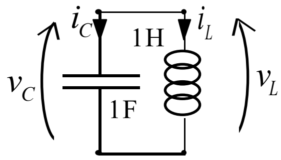


Caso (b)



Nel caso (a) si parla di fuoco stabile mentre nel caso (b) si parla di fuoco instabile. Abbiamo così esaurito tutti i possibili casi di equilibrio per i sistemi del secondo ordine lineari tempo-invarianti senza l'apporto dei generatori (si tratta dunque di sistemi autonomi). Ovviamente la presenza, sugli assi, delle tensioni era puramente indicativa poiché sugli assi ci può essere una coppia qualunque di variabili di stato.

Vediamo ora alcuni esempi pratici; iniziamo con l'analizzare il seguente circuito:



Le condizioni iniziali siano le seguenti:

$$\begin{cases} v_C(0) = 1V \\ i_L(0) = 0A \end{cases}$$

Applicando la LKC ad un nodo qualsiasi del circuito si ottiene:

$$i_C = -i_L$$

Applicando invece la LKV all'unica maglia del circuito si ottiene:

$$v_C = v_L$$

Dobbiamo trovare le equazioni di stato ovvero delle equazioni che contengano soltanto le variabili di stato e le loro derivate. Osservando la LKC si osserva che la corrente nel condensatore non è una variabile di stato e quindi la esprimiamo sfruttando la relazione caratteristica del condensatore:

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

ottenendo così:

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{C}i_L$$

Osservando ora la LKV si osserva che la tensione sull'induttore non è una variabile di stato e quindi la esprimiamo tramite la relazione caratteristica dell'induttore:

$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

ottenendo così:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}v_C$$

Quindi il sistema delle equazioni di stato sarà:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = -\dfrac{1}{C}i_L \\ \dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{1}{L}v_C \end{cases}$$

Esprimendo questo sistema in forma matriciale e sostituendo i valori numerici che vengono forniti dal problema si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dv_C}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

Cerchiamo gli autovalori associati alla matrice dei coefficienti che appare nella relazione precedente; risolviamo dunque la seguente equazione:

$$\det(\lambda \underline{I} - \underline{A}) = 0$$

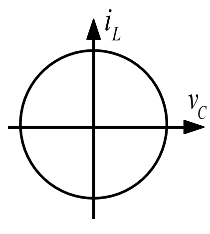
che, nel caso in questione, equivale all'equazione:

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

I due autovalori associati saranno dunque:

$$\lambda_{1,2} = \pm j$$

la rappresentazione grafica sul piano di stato sarà quindi la seguente:



Dimostriamo ora come un sistema di questo tipo conservi l'energia: l'energia immagazzinata dal condensatore è data dalla relazione:

$$E_C = \frac{1}{2} v_C^2$$

mentre l'energia immagazzinata dall'induttore è data dalla relazione:

$$E_L = \frac{1}{2} i_L^2$$

Quindi, l'energia complessiva immagazzinata nel circuito sarà:

$$E_{Tot} = \frac{1}{2}\left(v_C^2 + i_L^2\right)$$

Per dimostrare che questo sistema conserva l'energia devo dimostrare che la derivata temporale dell'energia totale immagazzinata nel sistema è nulla. Osserviamo innanzitutto come tale derivata possa essere riscritta:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial v_C}\frac{dv_C}{dt} + \frac{\partial E}{\partial i_L}\frac{di_L}{dt}$$

Osservando la forma nella quale è stata precedentemente scritta l'energia totale del sistema si comprende come quest'ultima relazione si possa riscrivere nella forma:

$$\frac{dE}{dt} = v_C \frac{dv_C}{dt} + i_L \frac{di_L}{dt}$$

Combinando ora quest'ultima relazione con le due equazioni di stato si ottiene:

$$\frac{dE}{dt} = v_C\left(-i_L\right) + i_L v_C = 0$$

Abbiamo quindi dimostrato che l'energia in questo circuito si conserva. Osserviamo ora che, con un circuito conservativo, è facilmente ricavabile l'equazione della traiettoria: nel nostro caso possiamo partire dalla seguente relazione (che abbiamo appena dimostrato):

$$E = \frac{1}{2}\left(v_C^2 + i_L^2\right) = const.$$

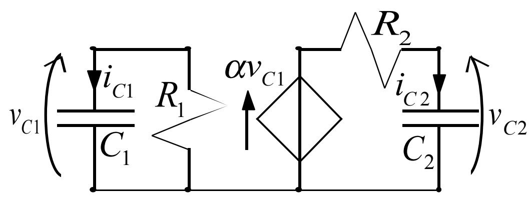
Sfruttando le condizioni iniziali si ricava:

$$E(0) = \frac{1}{2}$$

Siccome l'energia si conserva possiamo uguagliare le ultime due relazioni scritte ottenendo l'equazione della traiettoria:

$$v_C^2 + i_L^2 = 1$$

Analizziamo ora il seguente circuito:



Si tratta di un circuito particolarmente semplice poiché, come possiamo notare, la maglia di sinistra è indipendente dal resto del circuito. Come prima cosa osserviamo quindi che la corrente che attraversa i due resistori è la medesima che passa, rispettivamente, nei due condensatori; ciò fa sì che le due cadute di tensione sui resistori siano date dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} v_{R1} = R_1 i_{C1} \\ v_{R2} = R_2 i_{C2} \end{cases}$$

Applichiamo ora la LKV alla maglia di sinistra, ottenendo:

$$v_{C1} + v_{R1} = 0$$

ovvero:

$$v_{C1} + R_1 i_{C1} = 0$$

La corrente nel primo condensatore non è una variabile di stato e quindi la esprimo sfruttando la relazione caratteristica del condensatore:

$$i_{C1} = C_1 \frac{dv_{C1}}{dt}$$

Combinando le ultime due relazioni si ottiene:

$$\frac{dv_{C1}}{dt} = -\frac{1}{R_1 C_1} v_{C1}$$

Questa è la prima equazione di stato. Per trovare la seconda equazione di stato uso la LKV alla maglia di destra ottenendo:

$$v_{C2} + v_{R2} - \alpha v_{C1} = 0$$

Ricordando l'espressione precedentemente trovata per la caduta di tensione sul secondo resistore, la precedente equazione può essere così riscritta:

$$v_{C2} + R_2 i_{C2} - \alpha v_{C1} = 0$$

La corrente nel secondo condensatore non è una variabile di stato e quindi la esprime sfruttando la relazione caratteristica del condensatore:

$$i_{C2} = C_2 \frac{dv_{C2}}{dt}$$

Combinando le ultime due relazioni scritte si ottiene:

$$\frac{dv_{C2}}{dt} = \frac{\alpha}{R_2 C_2} v_{C1} - \frac{1}{R_2 C_2} v_{C2}$$

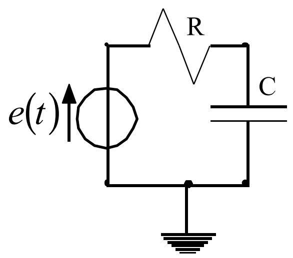
Questa è la seconda equazione di stato. Il sistema di stato, in forma matriciale, sarà dunque il seguente:

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_{C1}}{dt} \\ \frac{dv_{C2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ \frac{\alpha}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix}$$

Si osservi che la matrice dei coefficienti di questo sistema è una matrice triangolare che, quindi, presenta, sulla diagonale, i suoi autovalori; possiamo dunque osservare che, se tutte le capacità e tutte le resistenze sono positive, entrambi gli autovalori sono reali e negativi e quindi siamo nel caso di un nodo stabile.

Forzanti tempovarianti. I fasori

Fino ad ora abbiamo visto in dettaglio circuiti contenenti due elementi attivi e nessun generatore; in precedenza ci eravamo anche occupati di circuiti contenenti un unico elemento attivo e dei generatori costanti nel tempo. Da oggi inizieremo a trattare circuiti che presentano un elemento attivo e dei generatori tempovarianti. Da ora in poi, quindi, considereremo circuito del tipo:



dove sia:

$$e(t) = b^* \cos(\omega t)$$

Da un sistema di questo tipo si otterrà una equazione differenziale risolutiva che avrà la seguente forma:

$$\frac{dx}{dt} = ax + b\cos(\omega t)$$

E' importante osservare che le costanti che moltiplicano il coseno non sono le stesse, anche se sono tra loro legate, mentre la frequenza ω che appare nelle due relazioni precedentemente scritte è la medesima. Mettiamoci ora nel caso in cui il sistema in questione sia stabile (ovvero nel caso in cui il coefficiente "a" sia negativo); la soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione che stiamo trattando sarà del tipo:

$$x_{Omo.}(t) = k_0 e^{at}$$

A questa soluzione dovremo poi aggiungere la soluzione particolare. Supponiamo che la soluzione particolare sia la seguente:

$$x_{Part.}(t) = k_1 \cos(\omega t + \varphi)$$

Per prima cosa dobbiamo vedere se una soluzione particolare di questo tipo è accettabile o meno: per fare questo dobbiamo sostituire la soluzione particolare nell'equazione differenziale risolutiva ricordando però la relazione trigonometrica secondo la quale:

$$k_1 \cos(\omega t + \varphi) = k_1 \cos\varphi \cos(\omega t) - k_1 sin\varphi sin(\omega t)$$

Sostituendo dunque nell'equazione differenziale risolutiva si otterrà:

$$-\omega k_1 \cos\varphi sin(\omega t) - \omega k_1 sin\varphi \cos(\omega t) = ak_1 \cos\varphi \cos(\omega t) - ak_1 sin\varphi sin(\omega t) + b\cos(\omega t)$$

Affinché i due membri dell'ultima relazione scritta siano uguali, i coefficienti del coseno e del seno di ωt devono essere uguali in entrambi i membri. Uguagliando quindi i coefficienti si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} ak_1 \cos\varphi + b = -\omega k_1 sin\varphi \\ ak_1 sin\varphi = \omega k_1 \cos\varphi \end{cases}$$

Dalla seconda equazione di questo sistema si ricava:

$$sin\varphi = \frac{\omega}{a}\cos\varphi$$

Sostituiamo ora quest'ultima relazione nella prima equazione del sistema che stiamo analizzando, ottenendo:

$$ak_1 \cos\varphi + b = -\frac{\omega^2 k_1}{a}\cos\varphi$$

da cui si ricava:

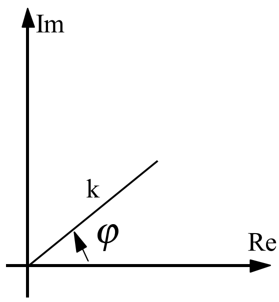
$$\cos\varphi = -\frac{ab}{(a^2+\omega^2)k_1}$$

Una volta trovata l'espressione per il coseno possiamo sostituirla nell'equazione che esprimeva il seno in funzione del coseno e ottenere:

$$sin\varphi = -\frac{\omega b}{(a^2+\omega^2)k_1}$$

Le due espressioni trovate per il seno e il coseno devono però sempre sottostare alla relazione fondamentale secondo la quale:

$$sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$
Nel caso in questione questa espressione coincide con la seguente:
$$\frac{\omega^2 b^2}{\left(a^2+\omega^2\right)^2 k_1^2} + \frac{a^2 b^2}{\left(a^2+\omega^2\right)^2 k_1^2} = 1$$
che si traduce nella seguente condizione sulla costante:
$$k_1 = \sqrt{\frac{b^2}{a^2+\omega^2}}$$
Una volta soddisfatta questa condizione la soluzione particolare che abbiamo scelto è accettabile. La soluzione complessiva dell'equazione differenziale di partenza sarà dunque la seguente:
$$x(t) = k_0 e^{at} + k_1 \cos(\omega t + \varphi)$$
Osserviamo ora che, se effettivamente il sistema è stabile, la soluzione dell'omogenea associata si esaurisce rapidamente (essendo un esponenziale decrescente) e quindi, a regime, rimane solo la soluzione particolare. Da ora in poi ci metteremo quindi in una situazione di sistema stabile e di transitorio esaurito, studieremo quindi il comportamento a regime e quindi studieremo solo la soluzione particolare. Siccome la soluzione particolare è una sinusoide, dobbiamo costruirci un metodo che ci permetta di rappresentare in maniera comoda le sinusoidi. Dobbiamo dunque gestire funzioni del tipo:
$$x(t) = k\cos(\omega t + \varphi)$$
Appare quindi evidente che, per descrivere funzioni di questo tipo, abbiamo bisogno di tre numeri: k, ω e φ (ovviamente i φ possibili sono infiniti ma se noi valutiamo solo l'intervallo da 0 a 2π ne abbiamo uno solo). Dobbiamo però osservare un'altra cosa: se avessimo un sistema lineare che contiene resistori, induttori e condensatori al quale sono collegati n generatori tempovarianti, l'equazione differenziale risolutiva sarebbe del tipo:
$$\frac{dx}{dt} = Ax + \sum_{i=1}^{n} b_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$
Dunque, per risolvere tale sistema, dobbiamo, di volta in volta, spegnere tutti i generatori meno uno, calcolare la soluzione con un solo generatore e poi sommare tutte le soluzione che abbiamo trovato (si applica dunque il principio di sovrapposizione). Questo significa che, di volta in volta, ci si ritrova ad affrontare nuovamente equazioni del tipo:
$$\frac{dx}{dt} = ax + b\cos(\omega t)$$
ovvero si ha a che fare con una sola frequenza per volta. Se dunque fissiamo la frequenza ω, abbiamo che la sinusoide viene descritta da due numeri soltanto: k e φ (in questo modo si otterranno, ovviamente, classi isofrequenziali di sinusoidi). I due numeri che mi servono per descrivere una sinusoide li utilizzo ora per costruire un numero complesso in forma polare: avrò dunque:
$$E = ke^{j\varphi} = k\cos\varphi + jksin\varphi$$
Dal punto di vista grafico si avrà:



Abbiamo così definito il fasore E. Data quindi una sinusoide possiamo ricavare il fasore corrispondente:
$$k\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow ke^{j\varphi}$$
Affinché il fasore sia un buon modo per rappresentare le sinusoidi deve però essere possibile anche fare il passaggio inverso, ovvero partire da un fasore e ricavare la sinusoide associata. In effetti dobbiamo osservare che, per passare dalla sinusoide al fasore non c'è nessun problema ma, per passare dal fasore alla sinusoide, bisogna conoscere la frequenza ω. Se si conosce la frequenza si può tornare alla sinusoide corrispondente tramite la seguente relazione:
$$\mathrm{Re}\left\{ke^{j\varphi}e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{ke^{j(\omega t+\varphi)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{k\cos(\omega t+\varphi) + jsin(\omega t+\varphi)\right\} = k\cos(\omega t+\varphi)$$
Dato quindi un fasore e una frequenza possiamo ricavare la sinusoide corrispondente:

$$\begin{cases} ke^{j\varphi} \\ \omega \end{cases} \Rightarrow k\cos(\omega t + \varphi)$$

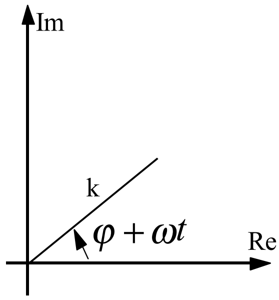
Prima di poter descrivere le sinusoidi tramite i fasori dobbiamo essere certi che i fasori siano degli operatori lineari ovvero che la somma di fasori corrisponda con il fasore della somma; dobbiamo dunque dimostrare che:

$$\mathrm{Re}\{k_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega t}\} + \mathrm{Re}\{k_2 e^{j\varphi_2} e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{(k_1 e^{j\varphi_1} + k_2 e^{j\varphi_2})e^{j\omega t}\}$$

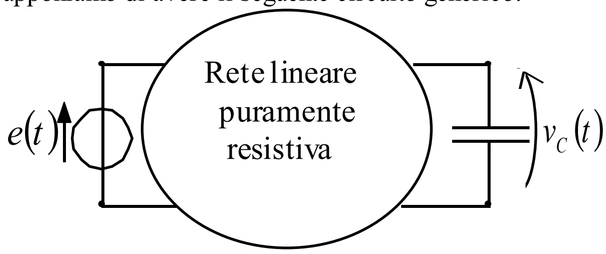
In effetti questa relazione si dimostra semplicemente sviluppando i calcoli. Inoltre vale la proprietà del prodotto con una costante (tipica degli operatori lineari) a patto che la costante in gioco sia reale. Infine si potrebbe dimostrare la seguente relazione che coinvolge le derivate:

$$\frac{d}{dt}\left(ke^{j\varphi}\right) = j\omega ke^{j\varphi}$$

Abbiamo dunque un operatore lineare biunivoco (in quanto ad una sinusoide è associato un solo fasore e ad un fasore, corredato di una frequenza, è associata una sola sinusoide) che mi permette di trasformare tutte le soluzioni sinusoidali in numeri complessi più facilmente gestibili. Una schematizzazione grafica di quello che accade è la seguente:



La sinusoide non è altro che la proiezione del fasore in movimento sull'asse delle ascisse. Si osservi che quando ci sono più fasori che hanno tutti la stessa frequenza, possiamo considerare fermo il sistema. Vediamo ora di applicare il discorso sui fasori ai circuiti. Supponiamo di avere il seguente circuito generico:



Supposto che il sistema sia stabile e ponendosi ad un istante tale che mi permetta di considerare esaurito il transitorio si avrà:

$$e(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow v_C(t) = B\cos(\omega t + \varphi_1)$$

In generale, qualunque grandezza elettrica del circuito in questione sarà espressa da una relazione del tipo:

$$x(t) = C\cos(\omega t + \varphi_C)$$

Le leggi di Kirchhoff, dunque, valgono anche per i fasori e quindi, e questo sarà quello che vedremo prossimamente, è possibile costruire un'elettrotecnica sinusoidale.

Lezione numero 19
6 Maggio 1999

LKC ed LKV con i fasori. Ammettenza e impedenza.

Nella scorsa lezione abbiamo accennato al fatto che le leggi di Kirchhoff valgono anche con i fasori, ciò permette di costruire un'elettrotecnica sinusoidale; dimostriamo ora in dettaglio che la LKC e la LKV valgano anche con i fasori. Torniamo quindi a considerare la relazione già vista secondo la quale:

$$\frac{dx}{dt} = ax + b\cos(\omega t)$$

Anche nel caso di un sistema con più elementi attivi, supponendo che il sistema sia stabile, dopo un certo tempo, a transitorio esaurito, la soluzione rimanente sarà del tipo:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \\ \dots \\ A_n\cos(\omega t + \varphi_n) \end{bmatrix}$$

Una soluzione di questo tipo significa che le tensioni su tutti i condensatori e le correnti in tutti gli induttori sono di tipo sinusoidale. Siccome, però, le grandezze di stato permettono (tramite la LKC e la LKV) di ricostruire tutte le grandezze del circuito, se tutte le variabili di stato sono sinusoidali allora tutte le grandezze elettriche del circuito saranno anch'esse sinusoidali con la medesima frequenza ω. Ogni grandezza del circuito potrà quindi essere espressa tramite una fasore. Ricordiamo ora l'espressione vettoriale della LKC:

$$\underline{Q}\,\underline{i} = 0$$

Se le correnti sono una funzione del tempo, questa relazione può semplicemente essere riscritta nella forma:

$$\underline{Q}\,\underline{i}(t) = 0$$

Nel caso in cui le funzioni del tempo in questione siano delle sinusoidi si può riscrivere la relazione precedente nella forma:

$$\underline{Q}\begin{bmatrix} \mathrm{Re}\{B_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega t}\} \\ \mathrm{Re}\{B_2 e^{j\varphi_2} e^{j\omega t}\} \\ \dots \\ \mathrm{Re}\{B_n e^{j\varphi_n} e^{j\omega t}\} \end{bmatrix} = 0$$

L'unicità nella relazione tra i fasori e le sinusoidi e il fatto che la matrice $\underline{Q}$ sia un operatore lineare mi permettono di scrivere la relazione precedente sotto forma di fasori:

$$\underline{Q}\begin{bmatrix} B_1 e^{j\varphi_1} \\ B_2 e^{j\varphi_2} \\ \dots \\ B_n e^{j\varphi_n} \end{bmatrix} = 0$$

ovvero, sinteticamente:

$$\underline{Q}\,\underline{\bar{i}} = 0$$

Dunque, la LKC vale anche con i fasori. Un discorso analogo si può fare con la LKV, si parte dunque dalla relazione vettoriale:

$$\underline{v} = \underline{Q}^T\,\underline{e}$$

e si arriva alla relazione tra fasori:

$$\underline{\bar{v}} = \underline{Q}^T\,\underline{\bar{e}}$$

Quindi anche la LKV vale anche con i fasori. Dopo aver parlato delle leggi di Kirchhoff dobbiamo trovare delle relazioni che, nel campo dei fasori, leghino tensioni e correnti tra di loro; nel campo del tempo (parlare di fasori significa mettersi nel campo delle frequenze) tali relazioni erano la legge di Ohm e le leggi caratteristiche di condensatori ed induttori. Nel campo dei fasori definiamo dunque l'impedenza, che sarà una funzione di $j\omega$ e che è così definita:

$$Z(j\omega) = \frac{\bar{v}}{\bar{i}}$$

Osserviamo quindi il resistore: la sua relazione caratteristica nel dominio del tempo era:

$$v = Ri$$

La sua relazione caratteristica nel dominio delle frequenze sarà:

$$\bar{v} = R\bar{i}$$

Dunque, per il resistore, l'impedenza sarà così definita:

$$Z(j\omega) = \frac{\bar{v}}{\bar{i}} = R$$

Per quanto riguarda, invece, il condensatore, la sua relazione caratteristica nel dominio del tempo è:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C}i$$

nel dominio delle frequenze, ricordando la regola sulle derivate che è stata definita con i fasori, la legge caratteristica del condensatore diventa:

$$j\omega\bar{v} = \frac{1}{C}\bar{i}$$

Dunque, per il condensatore, l'impedenza sarà così definita:

$$Z(j\omega) = \frac{\bar{v}}{\bar{i}} = \frac{1}{j\omega C}$$

Per l'induttore, infine, la relazione caratteristica nel dominio del tempo era:

$$v = L\frac{di}{dt}$$

nel dominio delle frequenze tale relazione caratteristica diventa:

$$\bar{v} = j\omega L\bar{i}$$

e quindi, per l'induttore, l'impedenza sarà così definita:

$$Z(j\omega) = \frac{\bar{v}}{\bar{i}} = j\omega L$$

Osserviamo dunque come, nel caso dei condensatori e degli induttori, l'impedenza vari con il variare della frequenza, in particolare, nel dominio della frequenza, i condensatori possono essere utilizzati come dei resistori che variano la loro impedenza al variare della frequenza. Già nel dominio del tempo si era visto come gli elementi potessero essere descritti in funzione della corrente o in funzione della tensione; nel caso dei resistori questa doppia visione ci aveva permesso di definire la resistenza R e la conduttanza G; tale doppia visione si può usare anche con i fasori e ci porta alla definizione dell'ammettenza:

$$Y(j\omega) = \frac{\bar{i}}{\bar{v}} = \frac{1}{Z(j\omega)}$$

Nel caso dei resistori si avrà dunque:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)} = G$$

Nel caso dei condensatori si avrà:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)} = j\omega C$$

Infine, nel caso degli induttori si avrà:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)} = \frac{1}{j\omega L}$$

Concludiamo questa lezione accennando ad una rappresentazione molto importante a livello ingegneristico: la rappresentazione ingresso-uscita. Molto spesso, infatti, dal punto di vista pratico, non si conosce la reale composizione di un circuito ma si conosce solo la relazione tra un ingresso che viene fornito ed un'uscita che viene misurata. La rappresentazione ingresso-uscita può essere fatta a partire dal seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + bu(t) \\ y = Cx \end{cases}$$

dove y è l'uscita che misuriamo mentre u è l'ingresso fornito.