Indice delle esercitazioni
(Ing. Rossato)

Potenza. Convenzioni. Caratteristiche.
Si consideri una carica positiva soggetta solo alle forze di un campo elettrico

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

dalla quale relazione possiamo ovviamente ricavare che:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Possiamo valutare il lavoro infinitesimo svolto dalle forze del campo per spostare di un tratto infinitesimo la nostra carica sonda tramite la relazione:

$$dL = \vec{F} \cdot \vec{dr} = q\vec{E} \cdot \vec{dr}$$

Passiamo ora al lavoro finito; siccome il campo elettrostatico è conservativo è assolutamente irrilevante la scelta del percorso che porta la carica da un punto iniziale A ad un punto finale B, il lavoro sarà dunque dato dalla relazione:

$$L = q\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dr}$$

Ricordiamo inoltre la nota relazione che lega il campo elettrico e il potenziale:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad v}$$

Combinando queste due ultime relazioni si ottiene:

$$L_{AB} = -q\int_A^B -\vec{E} \cdot \vec{dr} = -q\int_A^B \overrightarrow{grad v} \cdot \vec{dr} = -q(v_A - v_B) = -qv_{BA} = qv_{AB}$$

Ricordiamo ora la definizione di potenza espressa come lavoro per unità di tempo, si avrà dunque:

$$P = \frac{dL}{dt} = v_{AB}\frac{dq}{dt} = v_{AB}i$$

In elettrotecnica l'unità di misura della potenza non è il watt perché spesso si fanno considerazioni energetiche che non hanno riscontro fisico e quindi non ha senso usare il watt, si usa quindi il volt-ampere (VA). Ricordando la relazione che esprime la legge di Ohm:

$$v = Ri$$

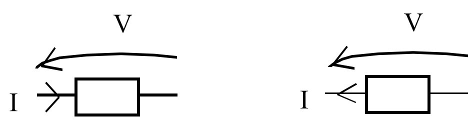
dalla quale, ovviamente, si ricava:

$$R = \frac{v}{i}$$

si possono ottenere, combinando queste ultime due relazioni con la definizione di potenza prima data, due diverse espressioni che esprimono la potenza:

$$P = vi = Ri^2 = \frac{v^2}{R}$$

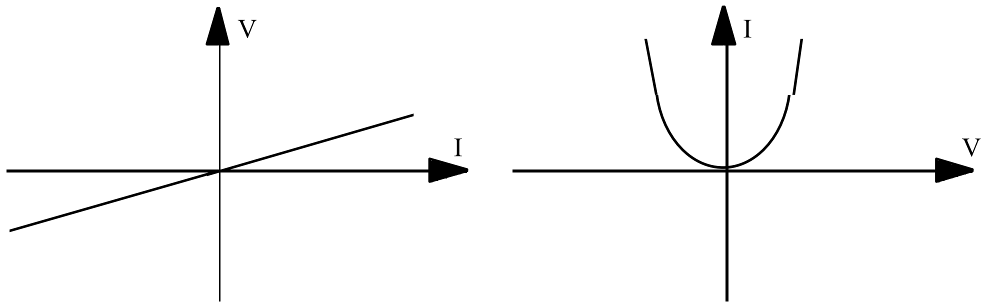
Vediamo ora quali sono le convenzioni di segno utilizzate in elettrotecnica; tali convenzioni sono essenziali per poter disegnare in maniera completa una rete. Vediamo dunque le due convenzioni principali, la convenzione di segno degli utilizzatori e la convenzione di segno dei generatori, che vediamo rappresentate di seguito:



Utilizzatori   Generatori

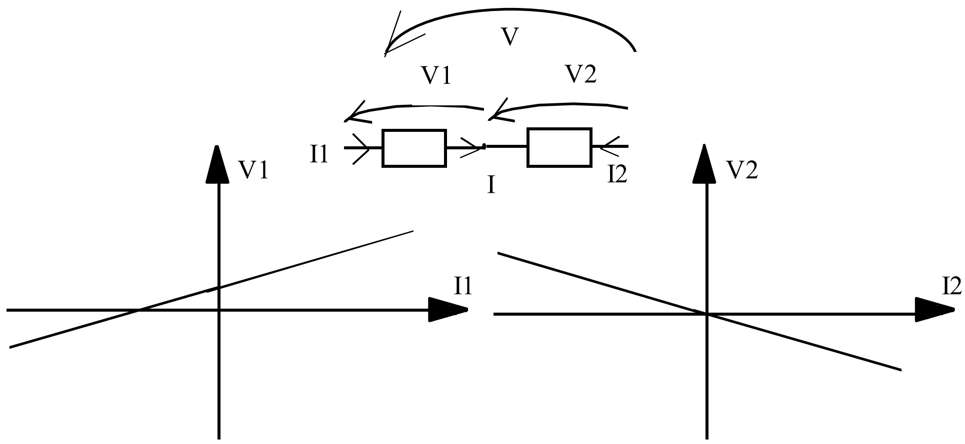
Con la convenzione degli utilizzatori una potenza positiva implica che la potenza venga assorbita dal bipolo mentre, con la convenzione dei generatori, una potenza positiva significa che la potenza è generata dal bipolo. Le convenzioni di segno utilizzate vanno sempre indicate quando si disegna la caratteristica di un bipolo; qui di seguito si potranno vedere due esempi di caratteristiche particolarmente semplici. Il primo esempio riguarda un bipolo lineare per il quale vediamo come la potenza sia sempre positiva (sia nel primo che nel terzo quadrante), questo significa che il bipolo è passivo (si stabilisce dunque che, con la convenzione degli utilizzatori, potenza maggiore di zero diventi la condizione di passività del bipolo). La seconda caratteristica riguarda un bipolo non lineare nel quale c'è una dipendenza quadratica della corrente dalla tensione. In questo caso, usando la convenzione degli utilizzatori, possiamo dire che il bipolo si comporta passivamente nel primo quadrante (essendo positiva la potenza) mentre è attivo nel secondo quadrante (dove la potenza è negativa).
Sempre parlando di convezioni rivediamo velocemente le due leggi di Kirchhoff indicando delle convenzioni di segno comode da utilizzare:

- LKC: la somma algebrica delle correnti entranti in una superficie chiusa è nulla; si consiglia in questo caso di considerare positive le correnti entranti nella superficie.
- LKV: la somma algebrica delle tensioni lungo un percorso chiuso (una maglia) è nulla; si consiglia di considerare positive le tensioni delle quali, percorrendo la maglia nel verso indicato, si incontra prima la punta della freccia.



Vediamo ora come si trasformano le caratteristiche quando cambia il segno delle convenzioni: quando cambia la convenzione riguardante il segno della corrente (si passa, per esempio, da I a –I) la caratteristica viene riflessa rispetto all'asse della tensione; quando cambia la convenzione riguardante il segno della tensione (si passa, per esempio, da V a –V) la caratteristica viene riflessa rispetto all'asse della corrente; quando viene invertito il nome degli assi (l'asse della corrente diventa quello della tensione e viceversa) la caratteristica viene riflessa rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Vediamo alcuni esempi pratici.

Data la seguente connessione in serie di due bipoli e le rispettive caratteristiche, disegnare la caratteristica del bipolo equivalente.



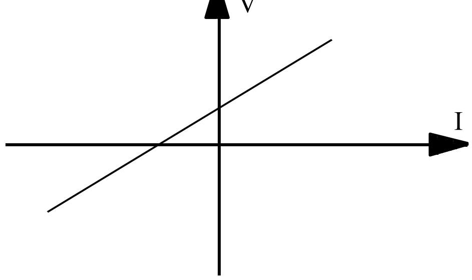
Applicando la LKC al nodo comune tra i due bipoli si ottiene:

$$i_1 + i_2 = 0 \Rightarrow i_1 = -i_2 = i$$

Appare inoltre ovvio come si abbia:

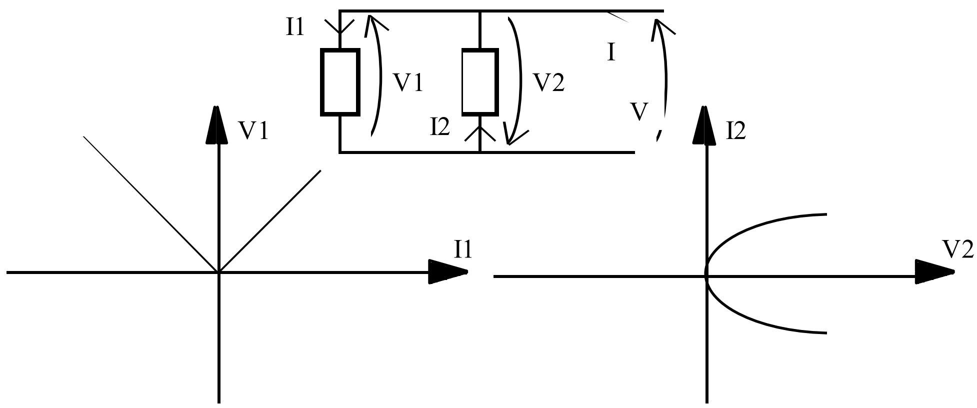
$$v = v_1 + v_2$$

Come prima cosa si dovrà ribaltare la caratteristica del secondo bipolo rispetto alla corrente perché I2 è controversa rispetto ad I e ad I1. A questo punto è possibile sommare a pari corrente (siccome siamo nel caso di un collegamento in serie) ed ottenere la caratteristica del bipolo equivalente:



Si osserva, tramite questo esercizio, che la somma di due bipoli passivi da ancora un bipolo passivo (la zona di potenza positiva relativa alla caratteristica del primo bipolo componente è la medesima della caratteristica del bipolo risultante).

Data la seguente connessione in parallelo di due bipoli e le rispettive caratteristiche, disegnare la caratteristica del bipolo equivalente.



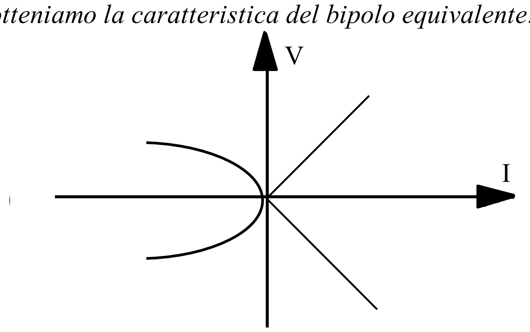
Applicando la LKV alle due maglie del circuito si arriva ad affermare che:

$$v_1 = -v_2 = v$$

Inoltre, sfruttando la LKC applicata al nodo denominato in figura con la lettera A, si ottiene:

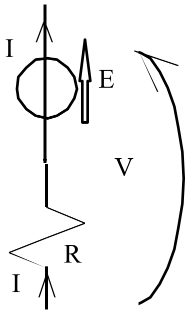
$$i = i_1 - i_2$$

Per prima cosa rendiamo compatibili le due caratteristiche scambiando gli assi della caratteristica del primo bipolo (simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante). Come secondo passo ribalto la caratteristica del secondo bipolo rispetto al potenziale siccome V2 è controverso rispetto a V1 (simmetria rispetto all'asse della corrente). Infine si ribalta la caratteristica del secondo bipolo anche rispetto alla corrente perché I1 è controverso rispetto ad I2 (simmetria rispetto all'asse delle tensioni che, a cause della simmetria della figura, non porta a variazioni sensibili della figura). Siamo dunque pronti a sommare a parità di tensione (visto che stiamo parlando di una connessione in parallelo) e otteniamo la caratteristica del bipolo equivalente:



Generatori reali. Il diodo. Partitore di tensione e di corrente.

Dopo aver visto, nelle lezioni e nell'esercitazione svolte fino ad ora, il resistore, il generatore di tensione e il generatore di corrente ideali e le loro caratteristiche, mettiamo in serie un generatore ideale di tensione ed un resistore e otteniamo il generatore reale di tensione:



Applicando la LKC all'unico nodo evidenziato in figura ricaviamo che la corrente che passa nei due bipoli è la stessa; applicando invece la LKV si ottiene la seguente espressione relativa alle tensioni:

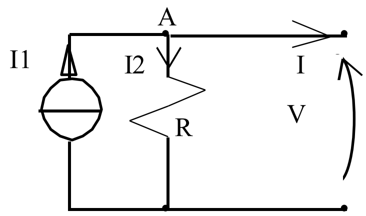
$$v = E - Ri$$

La potenza erogata da questo bipolo è dunque complessivamente data dalla relazione:

$$P = vi = Ei - Ri^2$$

Da tale espressione vediamo come la potenza erogata dal generatore reale sia composta da due contributi: il contributo positivo che prende il nome di potenza erogata dal generatore, e un termine negativo che prende il nome di potenza assorbita dal generatore a causa della resistenza interna. Appare dunque ovvio che, ai fini pratici, un generatore reale di tensione viene considerato tanto migliore quanto minore è la resistenza interna.

Come dalla serie di un generatore di tensione e un resistore si ottiene un generatore reale di tensione, così dal parallelo di un generatore di corrente e un resistore si ottiene un generatore reale di corrente:



In questo caso, applicando la LKV, si ottiene che la caduta di tensione sui due bipoli è la stessa; per quanto riguarda, invece, le correnti, applicando la LKC al nodo indicato con la lettera A, si ottiene:

$$i_{Tot} = i_1 - i_2$$

Combinando questa relazione con la legge di Ohm caratteristica del resistore e ricordando che la caduta di tensione sul resistore corrisponde con la tensione misurata all'esterno del bipolo si ottiene:

$$i_{Tot} = i_1 - \frac{v}{R}$$

Anche in questo caso, dunque, la potenza (come del resto anche la corrente) è composta da due contributi: un contributo positivo detto potenza (o corrente) generata e un contributo negativo detto potenza (o corrente) dissipata dalla resistenza interna:

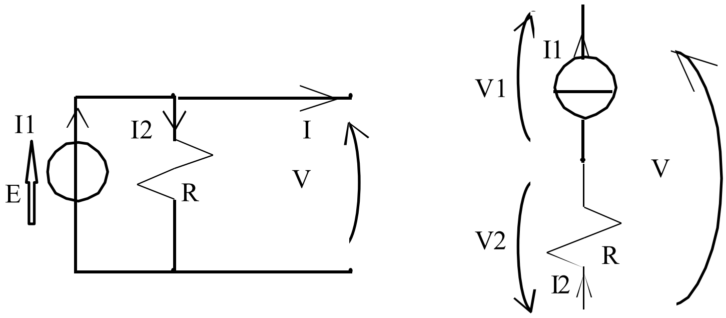
$$P = vi = vi_1 - \frac{v^2}{R}$$

E' dunque evidente che, nel caso dei generatori reali di corrente, un buon generatore deve avere una resistenza interna molto alta.

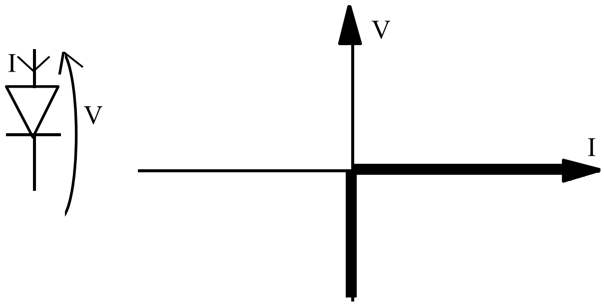
Dopo aver analizzato la serie di un generatore di tensione e di un resistore e il parallelo di un generatore di corrente e di un resistore, analizziamo il parallelo tra un resistore e un generatore di tensione. La relazione costitutiva di un generatore di tensione è la seguente:

$$v = E \qquad (\forall i)$$

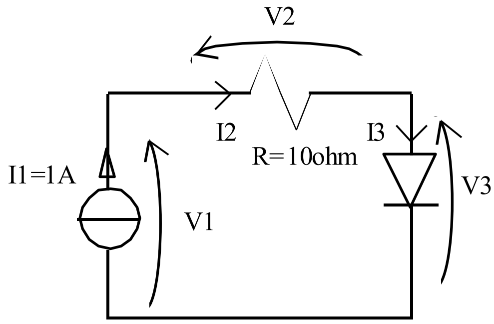
Siccome il valore della corrente che circola nel resistore non influisce assolutamente con la determinazione della tensione, è sempre possibile trascurare le resistenze in parallelo con un generatore di tensione (se viene richiesta la corrente circolante in quel resistore si potrà reinserirlo alla fine e valutare la corrente in funzione della resistenza e della caduta di tensione). Con un discorso perfettamente identico si arriva a dire che è sempre possibile trascurare i resistori in serie con un generatore di corrente.



In base a quanto fin qui visto possiamo dire che la corrente su un generatore di tensione è sempre ignota così come è sempre ignota la tensione su un generatore di corrente.
Andiamo ora a vedere un altro bipolo importante nella costituzione dei circuiti: il diodo. Un diodo è un bipolo che permette il passaggio della corrente in un solo senso: in particolare il diodo permette le correnti positive alle quali associa tensione nulla e le tensioni negative alle quali associa corrente nulla; quindi il diodo proibisce le tensioni positive e le correnti negative. Un diodo ha sempre potenza nulla e quindi non si può stabilire se sia un bipolo passivo o attivo; viene comunque considerato un bipolo utilizzatore. Il simbolo grafico del diodo e la sua caratteristica sono rappresentati di seguito:



<u>Dato il seguente circuito valutare tutte le correnti e tutte le tensioni presenti:</u>



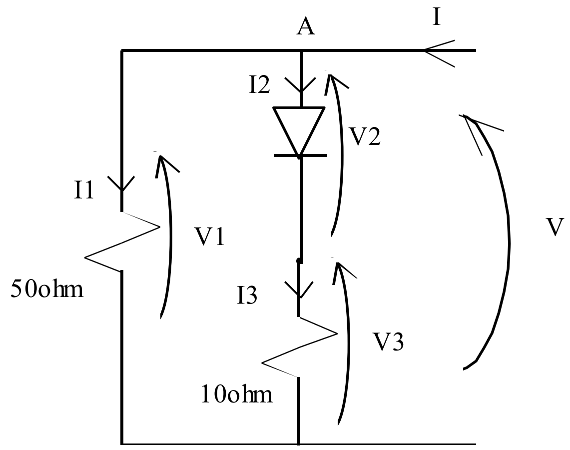
La corrente I1 imposta dal generatore di corrente attraversa anche il resistore (e si può dunque dire che I1 corrisponde con I2) e il diodo (dunque anche I3 corrisponde con I1). Si osserva che la corrente ha un verso coerente con il diodo e quindi il diodo permette alla corrente di circolare. Per la definizione data del diodo, però, la tensione sul diodo deve essere nulla (quindi V3 è nulla). Conoscendo la corrente I2 e la resistenza data nei dati, la tensione V2 può essere valutata utilizzando la legge di Ohm applicata al resistore, si avrà quindi:

$$v_2 = Ri_2 = (10\Omega)(1A) = 10V$$

Applichiamo ora la LKV all'unica maglia presente nel circuito, ottenendo:

$$v_1 = v_2 + v_3 = (10V) + (0V) = 10V$$

<u>Analizzare con il metodo analitico e con il metodo delle caratteristiche il seguente circuito:</u>



Per prima cosa vediamo il metodo analitico. Applicando la LKV posso facilmente osservare come la tensione V1 sia uguale alla tensione V imposta ai morsetti del bipolo complessivo, sfruttando dunque la legge di Ohm applicata al bipolo resistore 1 posso ricavare la corrente I1 che sarà data dalla relazione:

$$i_1 = \frac{v_1}{R_1} = \frac{v}{R_1} = \frac{v}{50\Omega}$$

Osserviamo ora che, quando siamo in presenza di diodi, per proseguire con la risoluzione di un circuito dobbiamo porre delle condizioni; nel caso attuale potremo avere tre casi distinti:

- *Se la corrente I2 è positiva (ciò è possibile se la tensione V è a sua volta positiva) il diodo permette il passaggio di corrente ma su di esso non ci sarà caduta di tensione quindi, applicando ancora la LKV, si ricava che tutta la tensione V cade sul secondo resistore. Inoltre avremo, applicando la LKC al nodo che collega il diodo con il resistore 3, che I2 corrisponde con I3. Possiamo dunque ricavare I3 (e di conseguenza I2) applicando la legge di Ohm sul resistore 3. Si avrà dunque:*

$$i_3 = i_2 = \frac{v_3}{R_3} = \frac{v}{R_3} = \frac{v}{10\Omega}$$

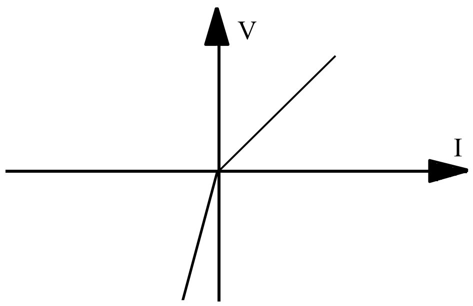
  Applichiamo ora la LKC al nodo indicato in figura con la lettera A, ottenendo:

$$i = i_1 + i_2 = \frac{v}{50\Omega} + \frac{v}{10\Omega} = \frac{6 \cdot v}{50\Omega}$$

- *Se I2 è negativa il problema non è risolubile a causa della presenza del diodo che vieta le correnti negative.*
- *Se I2 è nulla si avrà di riflesso che anche I3 è nulla e quindi è nulla anche V3. Rimarrà, per quanto riguarda le correnti:*

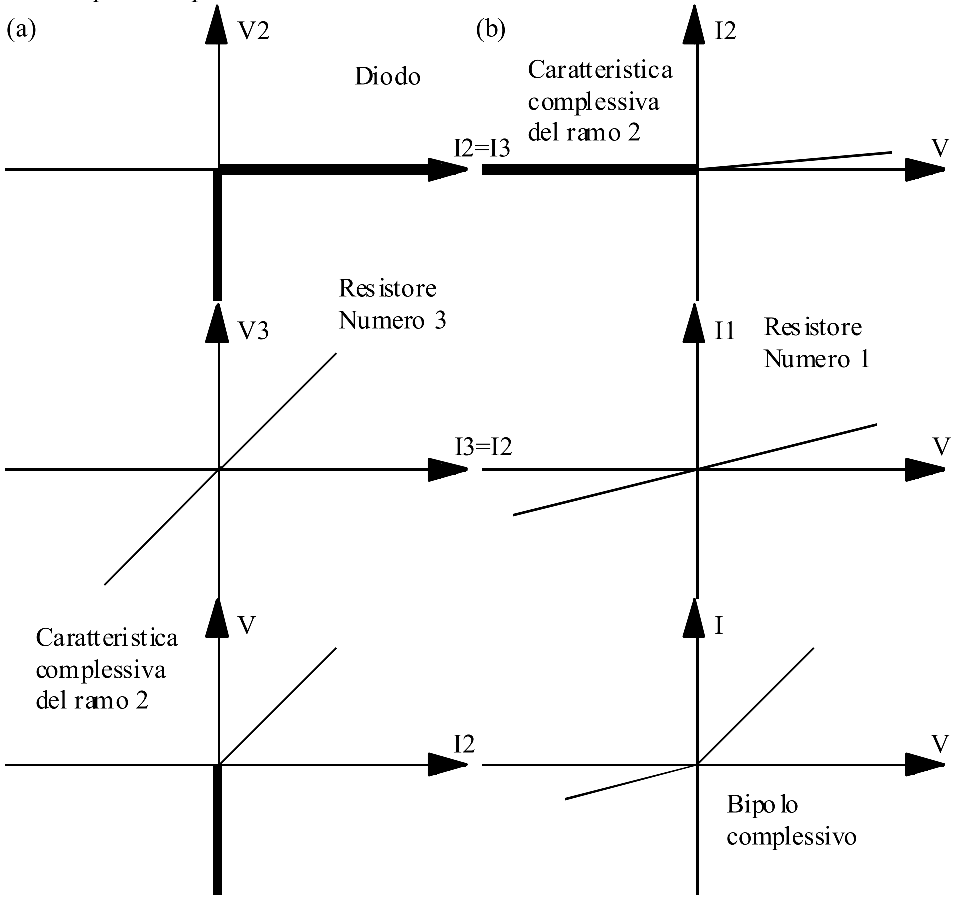
$$i = i_1 + i_2 + i_3 = i_1$$

In base ai risultati ottenuti dalla risoluzione analitica del circuito si può costruire la seguente caratteristica del bipolo complessivo:

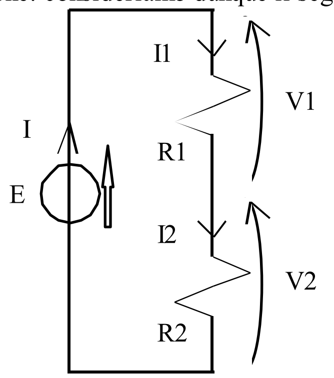


In generale possiamo dire che, quando il circuito contiene dei diodi, il bipolo risultante non è più lineare ma è lineare a tratti come in questo caso; inoltre, se il bipolo contiene solo elementi passivi, come appunto nel caso in questione, il bipolo si dice omogeneo e la sua caratteristica passa per l'origine degli assi, se invece nel bipolo ci sono anche dei generatori, il bipolo diventa non omogeneo e la sua caratteristica, in generale, non passerà per l'origine degli assi.
Risolviamo ora il circuito utilizzando il metodo delle caratteristiche. Occupiamoci prima, colonna (a) della figura seguente, del ramo di circuito che contiene la serie del diodo e del resistore. Si rappresentano dunque le due caratteristiche e poi le si somma a parità di corrente, essendo un collegamento in serie. Nella colonna (b) della figura, invece, è stata presa la caratteristica trovata nella colonna (a) e la si è capovolta in modo da poterla sommare a parità di tensione con la caratteristica rappresentativa del ramo del circuito che contiene solo il resistore (essendo questi due

rami collegati in parallelo. A parte l'orientamento del grafico, la caratteristica risultante è identica a quella disegnata per rappresentare il bipolo complessivo trovato tramite la risoluzione analitica del circuito.



Concludiamo vedendo due formule che possono tornare particolarmente utili durante gli esercizi di risoluzione delle reti e che vanno sotto il nome di formula del partitore di tensione e formula del partitore di corrente. Iniziamo con l'analizzare la formula del partitore di tensione: consideriamo dunque il seguente circuito:



Se applichiamo la LKC possiamo facilmente ricavare che:

$$i = i_1 = i_2$$

Applicando invece la LKV all'unica maglia del circuito si ottiene:

$$E = v_1 + v_2$$

Combinando dunque la legge di Ohm relativa ai due resistori con la LKV si ottiene:

$$E = R_1 i_1 + R_2 i_2 = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2)i$$

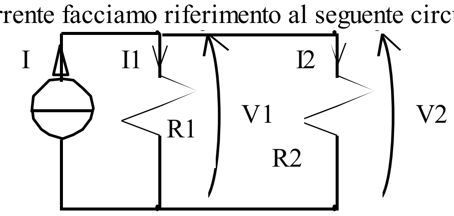
Da questa relazione dunque si può esprimere la corrente come segue:

$$i = i_1 = i_2 = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

Se vogliamo dunque calcolare la caduta di tensione su uno dei resistori dovremo moltiplicare la tensione generata dal generatore per la resistenza del resistore che ci interessa e poi dividere per la somma di tutte le resistenze in gioco; per i due resistori del nostro esempio si avrà infatti:

$$v_1 = E\frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad\qquad v_2 = E\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Questa relazione è ovviamente generalizzabile ad un qualsiasi numero di resistori.
Per quanto riguarda il partitore di corrente facciamo riferimento al seguente circuito:



Se applichiamo la LKV possiamo facilmente ricavare che:

$$v = v_1 = v_2$$

dove V è la caduta di tensione sul generatore (usando, ovviamente, la convenzione dei generatori). Applicando invece la LKC ad un nodo del circuito si ottiene:

$$i = i_1 + i_2$$

Combinando dunque la legge di Ohm relativa ai due resistori con la LKC si ottiene:

$$i = \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} = v\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = v\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

Da questa relazione dunque si può esprimere la tensione come segue:

$$v = v_1 = v_2 = i\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Se vogliamo allora calcolare la corrente su uno dei resistori dovremo moltiplicare la corrente generata dal generatore per la resistenza del resistore che non ci interessa e poi dividere per la somma di tutte le resistenze in gioco; per i due resistori del nostro esempio si avrà infatti:

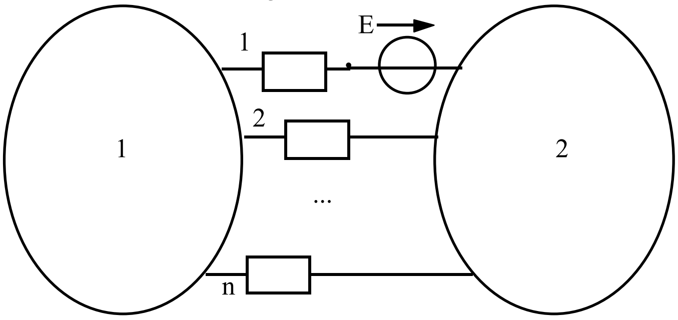
$$i_1 = \frac{v}{R_1} = i\frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad\qquad i_2 = \frac{v}{R_2} = i\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Anche questa relazione è ovviamente generalizzabile ad un qualsiasi numero di resistori.

Shift dei generatori. Teorema di Millman.

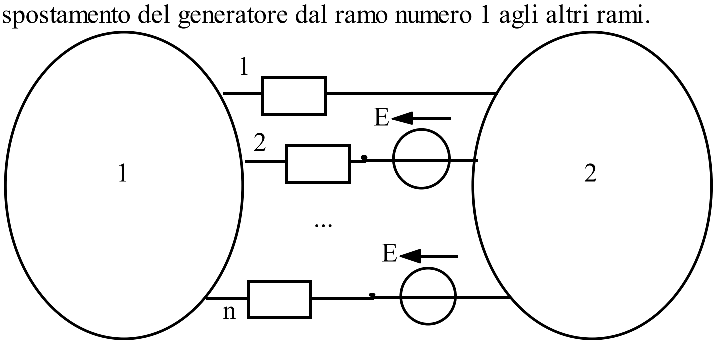
Uno strumento importante per semplificare l'analisi di un circuito è lo spostamento dei generatori in esso contenuti; vediamo dunque come si può procedere. Occupiamoci, per iniziare, dei generatori di tensione. Si inizia considerando un circuito composto da due parti (1 e 2 in figura 1) collegate tra di loro da un numero n di rami; ogni ramo contiene un bipolo generico, mentre il ramo numero 1 contiene anche un generatore di tensione.

Figura 1



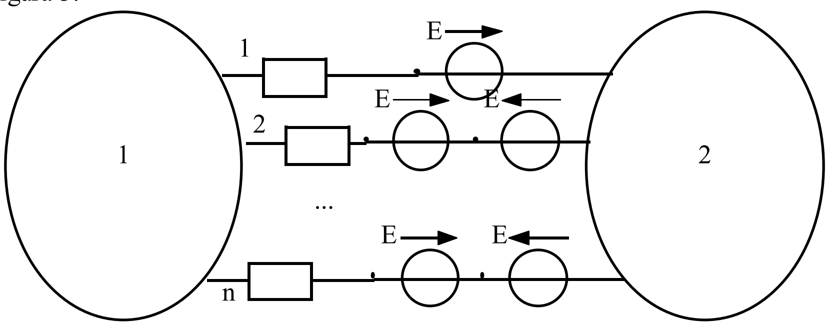
Lo shift dei generatori prevede che tale circuito sia equivalente ad un circuito (rappresentato in figura 2) nel quale ogni ramo, tranne il ramo numero 1, contiene un generatore, di tensione uguale, controverso rispetto al generatore di partenza. Il risultato ottenuto è lo spostamento del generatore dal ramo numero 1 agli altri rami.

Figura 2



Per dimostrare l'uguaglianza tra i due sistemi si può pensare, partendo dalla situazione rappresentata in figura 2, di aggiungere su ogni ramo un generatore di tensione E diretto dal sottosistema 1 al sottosistema 2, si ottiene così la situazione rappresentata in figura 3.

Figura 3



E' allora evidente che le coppie di generatori controversi poste sui rami da 2 ad n si annullano e rimane solo il generatore sul ramo 1; si è tornati dunque, come volevasi dimostrare, al caso rappresentato in figura 1. Ovviamente lo shift dei generatori può essere fatto anche con i generatori di corrente, avremo infatti una situazione duale rispetto alla precedente. Consideriamo dunque una rete dalla quale spuntano n morsetti (come rappresentato in figura 4) e supponiamo che un generatore di corrente colleghi i morsetti 1 ed n. Tale generatore di corrente può essere tolto dal circuito a patto di inserire n-1 generatori di corrente che colleghino il nodo n al nodo n-1 e così via fino al nodo 1 (come mostrato in figura 5). Questo metodo dello shift dei generatori è molto utile per riorganizzare i generatori presenti su una rete da risolvere in modo da rendere più agevole il metodo risolutivo. Un esempio pratico di spostamento di generatori in un pezzo di rete è mostrato in figura 6.

Figura 4

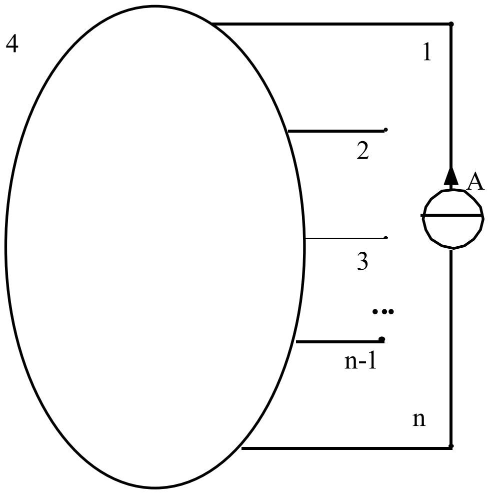
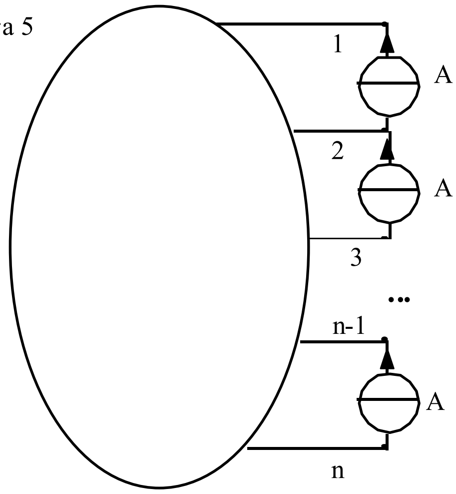


Figura 5



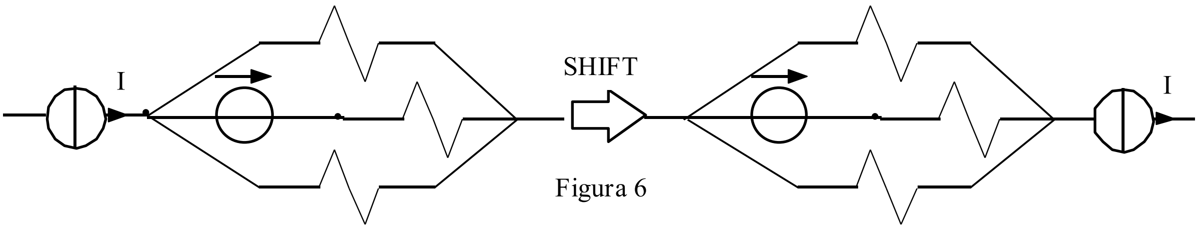


Figura 6

Vediamo ora un esempio numerico che ci permette di apprezzare l'utilità del metodo dello shift dei generatori. *Si consideri dunque il circuito disegnato in figura (a) del quale sia richiesto di calcolare la tensione sul generatore di corrente. Se volessimo risolvere questo circuito così com'è, utilizzando il metodo dell'analisi nodale modificata, dovremmo risolvere un sistema composto da 13 equazioni. Vediamo dunque come semplificare il circuito per poterlo risolvere in modo più agile. Come prima cosa osserviamo che le resistenze da 5 e da 30 ohm sono collegate in serie, le sostituiamo dunque con una resistenza equivalente ottenendo il circuito semplificato rappresentato in figura (b)*

Figura (a)

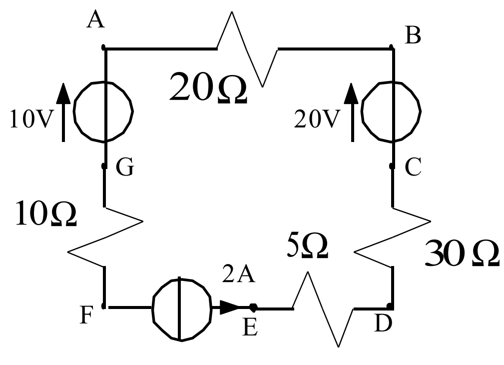
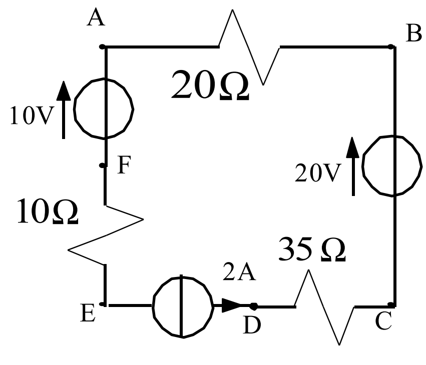


Figura (b)



Già questa prima semplificazione ha reso più semplice il lavoro poiché adesso dovremmo gestire solo 11 equazioni, invece di 13. Utilizziamo ora il metodo dello shift dei generatori e facciamo scorrere il generatore di tensione da 10V oltre la resistenza da 20Ω; otteniamo così la configurazione mostrata in figura (c). Ora notiamo che i due generatori di tensione sono collegati in serie e quindi possiamo sostituirli con un unico generatore di tensione da 10V (diretto come era diretto quello da 20V); si vede, però, che anche i due resistori da 20Ω e da 10Ω sono ora in serie, quindi sostituiamo anche loro con un resistore equivalente di resistenza 30Ω. Si è giunti alla configurazione rappresentata in figura (d) che è decisamente più semplice di quella di partenza poiché impone di dover gestire solo 7 equazioni invece di 13. A questo punto utilizziamo nuovamente lo shift dei generatori, applicato questa volta al generatore di corrente che viene fatto scorrere oltre il resistore da 30Ω per ottenere la configurazione mostrata in figura (e). Ora ci troviamo nuovamente con due resistenze (da 30Ω e da 35Ω) in serie che vengono sostituite con un unico resistore da 65Ω. Si è così giunti alla configurazione rappresentata in figura (f).

Figura (c)

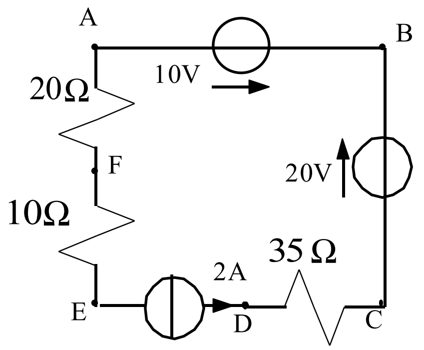


Figura (d)

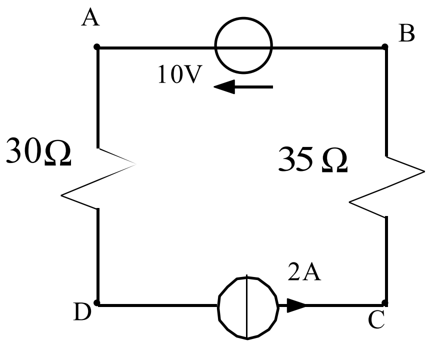


Figura (e)

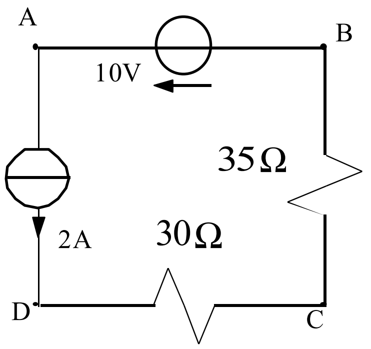
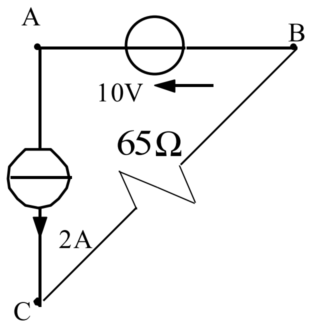


Figura (f)



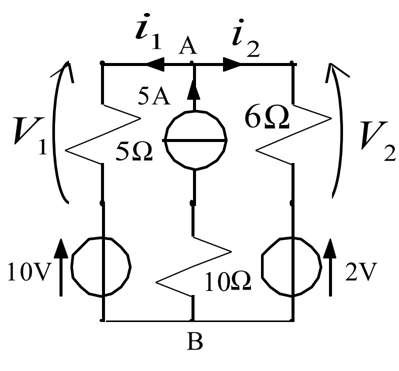
Siamo arrivati dunque ad una situazione molto semplificata perché ora sarebbero sufficienti soltanto 4 equazioni (delle 13 di partenza); in realtà, data la natura della rete, ci accorgiamo subito che la corrente che circola nel circuito non può che essere di 2A. Conoscendo la resistenza del resistore equivalente possiamo utilizzare la legge di Ohm applicata al resistore e otteniamo la caduta di tensione su tale bipolo che sarà di 130V. A questo punto basta utilizzare la LKV all'unica maglia del circuito per ricavare la tensione sul generatore di corrente:

$$v_X = -10V + 130V = 120V$$

Si osservi dunque che, in fin dei conti, è stato necessario risolvere un'unica equazione!

Concludiamo questa esercitazione parlando del teorema di Millman. Tale teorema è molto comodo da utilizzare quando è necessario risolvere reti che presentino due nodi principali. Vediamo prima, grazie al prossimo esempio, come si potrebbe risolvere un circuito di questo tipo senza usare il teorema di Millman.

<u>Dato il circuito rappresentato nella figura seguente, valutare la tensione presente tra il nodo A e il nodo B.</u>



Si utilizzi come incognita la corrente che esce dal nodo A andando nella maglia di sinistra. Applicando la LKC al nodo A si otterrà:

$$i_2 = (5A) - i_1$$

Possiamo ora calcolare la tensione tra i nodi A e B utilizzando la maglia di sinistra; si otterrà:

$$v_{AB} = v_1 + (10V) = (5\Omega)i_1 + (10V)$$

Ricalcoliamo ora la medesima tensione tra i nodi A e B utilizzando, questa volta, la maglia di destra; si ricava:

$$v_{AB} = v_2 + (2V) = (6\Omega)i_2 + (2V) = (6\Omega)[(5A) - i_1] + (2V)$$

Uguagliando le due espressioni trovate per la tensione tra il nodo A e il nodo B, si ricava la corrente che circola nella maglia di sinistra:

$$i_1 = 2A$$

Una volta trovata tale corrente la si può sostituire in una qualsiasi delle relazioni che mi danno la tensione tra il nodo A e il nodo B, trovando così la soluzione al quesito:

$$v_{AB} = 20V$$

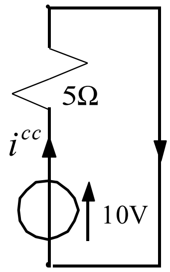
Il teorema di Millman propone, per la risoluzione di un problema come quello appena risolto, la seguente relazione:

$$v_{AB} = \frac{\sum_k i_k^{cc}}{\sum_l g_l}$$

dove l'esponente "cc" associato alle correnti indica che si tratta delle correnti di cortocircuito. Il teorema di Millman, dunque, mi dice che la tensione ai due nodi principali del circuito è uguale alla somma delle correnti di cortocircuito associate ai vari percorsi che connettono i due nodi principali, divisa per la somma delle conduttanze dei medesimi percorsi. Vediamo subito un esempio pratico:

<u>Risolvere nuovamente l'ultimo problema presentato utilizzando il teorema di Millman.</u>

Il passaggio più complesso di questa risoluzione consiste nel calcolo delle correnti di cortocircuito. Per calcolare la corrente di cortocircuito associata al ramo di sinistra del circuito precedentemente disegnato, si prende il ramo di sinistra e lo si cortocircuita ottenendo la seguente situazione:



Si può dunque valutare come segue la corrente di corto circuito associata a questo ramo:

$$i_{Sin}^{cc} = \frac{10V}{5\Omega} = 2A$$

Con un metodo assolutamente identico si può valutare anche la corrente di cortocircuito associata al ramo di destra:

$$i_{Des}^{cc} = \frac{2V}{6\Omega} = \frac{1}{3}A$$

Per quanto riguarda il ramo centrale, la corrente di cortocircuito è ovviamente quella imposta dal generatore di corrente mentre la conduttanza è nulla poiché abbiamo già visto come una resistenza in serie ad un generatore di corrente sia trascurabile.

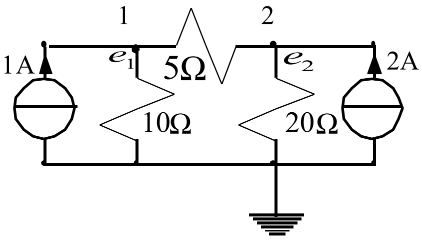
Possiamo quindi a questo punto applicare l'equazione che esprime il teorema di Millman, dalla quale si ricava:

$$v_{AB} = \frac{\sum_k i_k^{cc}}{\sum_l g_l} = \frac{(2A) + \left(\frac{1}{3}A\right) + (5A)}{\left(\frac{1}{5}S\right) + \left(\frac{1}{6}S\right) + (0S)} = 20V$$

Sovrapposizione degli effetti.

Per capire il valore del metodo risolutivo che sfrutta la sovrapposizione degli effetti risolviamo prima un esercizio con il metodo classico dell'analisi nodale.

Risolvere il seguente circuito sfruttando il metodo dell'analisi nodale:



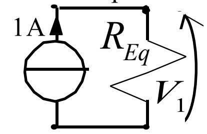
Come prima cosa applichiamo le LKC ai nodi 1 e 2 ottenendo le due seguenti equazioni:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = 1A \\ i_3 - i_2 = 2A \end{cases}$$

Queste due equazioni fissano le convenzioni di segno che verranno utilizzate; a questo punto, essendo questa una rete che si può risolvere con la NA, posso esprimere direttamente il sistema risolutivo in forma di matrice costruendo la matrice dei coefficienti con il metodo "a vista" (che si basa, come sappiamo, sulle conduttanze che afferiscono ai vari nodi); si otterrà dunque:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{10}+\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5}+\frac{1}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1A \\ 2A \end{bmatrix}$$

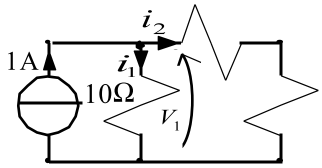
Ora vediamo come sarebbe stato possibile risolvere il medesimo circuito sfruttando il metodo della sovrapposizione degli effetti. Per usare questo metodo dobbiamo, per prima cosa, spegnere uno dei generatori di corrente, supponiamo dunque di spegnere il generatore di corrente di destra. Il circuito si riduce ad essere composto dal solo generatore di sinistra collegato con dei resistori. Compattiamo ora il circuito osservando che i resistori possono essere sostituiti da un solo bipolo resistivo tramite delle semplici riduzioni serie e parallelo; si otterrà così il seguente circuito semplificato:



Dove la resistenza equivalente avrà il seguente valore:

$$R_{Eq} = \left\{ \frac{1}{(10\Omega)} + \frac{1}{[(5\Omega)+(20\Omega)]} \right\}^{-1} = 7{,}14\Omega$$

Siccome la corrente che circola in questo circuito è di 1A, possiamo facilmente ricavare che la caduta di tensione sulla resistenza equivalente è di 7,14V. Riespandiamo ora il circuito, ottenendo:

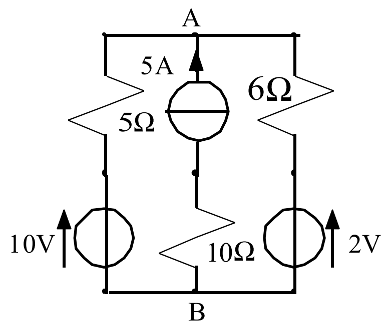


La caduta di tensione sul resistore da 10Ω sarà ovviamente ancora uguale a 7,14V; questo mi permette di ricavare che la corrente che circola in quel bipolo equivale a 0,714A. Per differenza posso poi ricavare la corrente che circola negli altri due resistori, che sarà:

$$i_2 = (1A) - i_1 = (1A) - (0{,}714A) = 0{,}286A$$

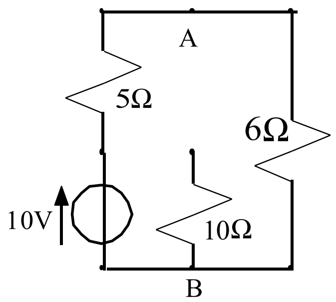
Giunti a questo punto dobbiamo rifare tutto il discorso supponendo di riattaccare il generatore di corrente di destra staccando quello di sinistra; trovati poi i risultati anche del secondo caso, bisogna sommarli, ottenendo così il risultato complessivo. Vediamo ora un esempio numerico completo che sfrutta il metodo della sovrapposizione degli effetti.

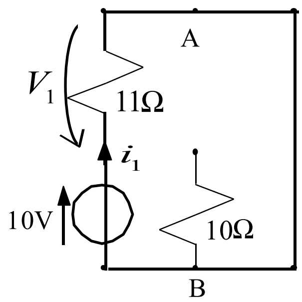
Calcolare la tensione tra i nodi A e B del seguente circuito:



Usiamo il metodo della sovrapposizione degli effetti, dunque (come mostrato in figura (a)) stacchiamo il generatore di corrente e il generatore di tensione di destra, in questo modo nel ramo centrale, essendoci un circuito aperto, non scorrerà corrente (e quindi la caduta di tensione sul resistore di quel ramo sarà nulla), le due resistenze da 5Ω e 6Ω si trovano ora in serie, quindi possono essere sostituite con un unico resistore da 11Ω (vedi figura (b)).

Figura (a) Figura (b)





Tramite una LKV all'unica maglia attiva del circuito di figura (b) si può ricavare la caduta di tensione sul resistore da 11Ω: ovviamente tale caduta di tensione sarà pari alla tensione generata dal generatore. Nota tale caduta di tensione possiamo ora ricavare la corrente che attraversa il resistore da 11Ω:

$$i_1 = \frac{v_1}{(11\Omega)} = \frac{(10V)}{(11\Omega)} = \frac{10}{11}A$$

Tale corrente sarà anche la corrente che circola nel resistore da 6Ω che si vede in figura (a); possiamo dunque valutare la caduta di tensione su questo resistore che poi, come si ricava da una LKV sulla maglia di destra, equivale alla tensione tra i nodi A e B:

$$v_{AB}^1 = (6\Omega)i_1 = (6\Omega)\left(\frac{10}{11}A\right) = \frac{60}{11}V$$

Riattacchiamo ora il generatore di tensione di destra e stacchiamo il generatore di corrente e il generatore di tensione di sinistra. Abbiamo una situazione perfettamente identica a quella appena valutata, anche in questo caso dovremo prima compattare il circuito e poi riespanderlo come si è fatto prima. Possiamo dunque riscrivere direttamente le ultime due relazioni trovate; ovviamente, la caduta di tensione sul resistore equivalente sarà pari alla tensione generata dal generatore di destra e quindi si avrà:

$$i_1 = \frac{v_2}{(11\Omega)} = \frac{(2V)}{(11\Omega)} = \frac{2}{11}A$$

Analogamente, la tensione tra i nodi A e B sarà in questo caso uguale alla caduta di tensione sul resistore da 5Ω e quindi si avrà:

$$v_{AB}^2 = (5\Omega)i_2 = (5\Omega)\left(\frac{2}{11}A\right) = \frac{10}{11}V$$

Riaccendiamo, infine, il generatore di corrente e spegniamo entrambi i generatori di tensione ottenendo la configurazione di figura (c). In questa situazione ci accorgiamo che i due resistori da 5Ω e da 6Ω sono collegati in parallelo e quindi li sostituisco (si veda la figura (d)) con un resistore equivalente di resistenza:

$$R_{Eq} = \left[\frac{1}{(5\Omega)} + \frac{1}{(6\Omega)}\right]^{-1} = \frac{30}{11}\Omega$$

Figura (c)

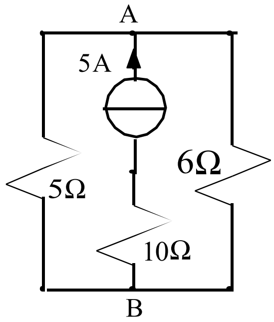
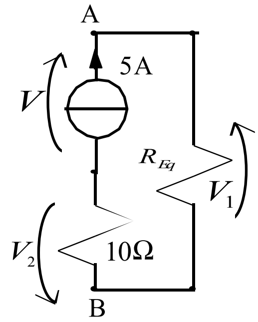


Figura (d)



Guardando il circuito di figura (d) vediamo come, essendo nota la corrente, possiamo ricavare la caduta di tensione sui due resistori, in particolare a noi interessa la caduta di tensione sul resistore equivalente:

$$v_1 = R_{Eq}(5A) = \left(\frac{30}{11}\Omega\right)(5A) = \frac{150}{11}V$$

A questo punto, applicando una LKV al circuito di figura (d), si ottiene la tensione tra il nodo A e il nodo B:

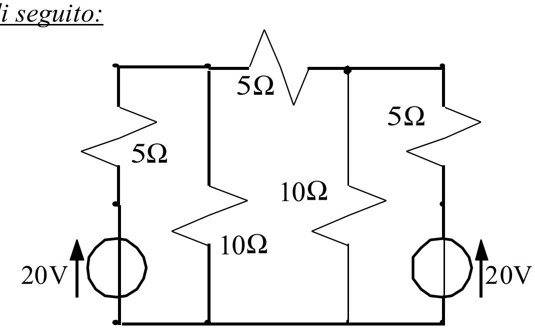
$$v_{AB}^3 = v_1 = \frac{150}{11}V$$

Ora che abbiamo trovato la tensione fra i nodi A e B nei tre casi diversi, ricaviamo la tensione effettiva tra tali due nodi sommando i tre risultati:

$$v_{AB} = v_{AB}^1 + v_{AB}^2 + v_{AB}^3 = \left(\frac{60}{11}V\right) + \left(\frac{10}{11}V\right) + \left(\frac{150}{11}V\right) = 20V$$

Concludiamo con un esercizio molto semplice ma che mette in luce l'importanza dell'analisi delle eventuali simmetria di una rete.

<u>Risolvere la rete rappresentata di seguito:</u>



Si osservi come il circuito sia perfettamente simmetrico; ciò implica che non ci sia passaggio di corrente attraverso la resistenza da 5Ω disposta orizzontalmente (in quanto la corrente potrebbe passare da sinistra a destra o da destra a sinistra ma in entrambi i casi romperebbe la simmetria del circuito) La rete di figura si riduce dunque alla situazione rappresentata in figura (a). Ovviamente, siccome le due maglie laterali di tale circuito sono perfettamente identiche, è sufficiente studiare solo metà del circuito. Studiamo dunque la maglia di destra che viene riportata in figura (b). Il circuito riportato in figura (b) è molto semplice: osserviamo in primo luogo che le due resistenze (da 5Ω e da 10Ω) sono collegate in serie, possiamo dunque sostituirle con un'unica resistenza da 15Ω ottenendo il circuito di figura (c). Sfruttando ora una LKV alla maglia del circuito di figura (c) possiamo ricavare la caduta di tensione sul resistore da 15Ω. Tale caduta di tensione non può che essere uguale alla tensione imposta dal generatore e quindi varrà 20V. Ora possiamo valutare la corrente che circola nel circuito di figura (c) tramite la relazione:

$$i = \frac{v_R}{R_{Eq}} = \frac{(20V)}{(15\Omega)} = \frac{4}{3}A$$

Questa medesima corrente sarà anche la corrente che circola nel circuito di figura (b). La risoluzione di questo circuito si conclude calcolando le cadute di tensione sui due resistori:

$$v_1 = (5\Omega)i = (5\Omega)\left(\frac{4}{3}A\right) = \frac{20}{3}A$$

$$v_2 = (10\Omega)i = (10\Omega)\left(\frac{4}{3}A\right) = \frac{40}{3}A$$

Figura (a)

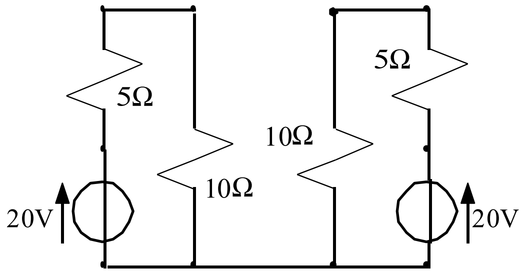


Figura (b)

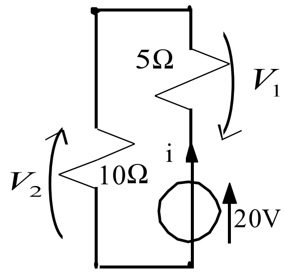
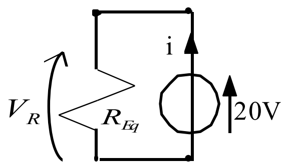
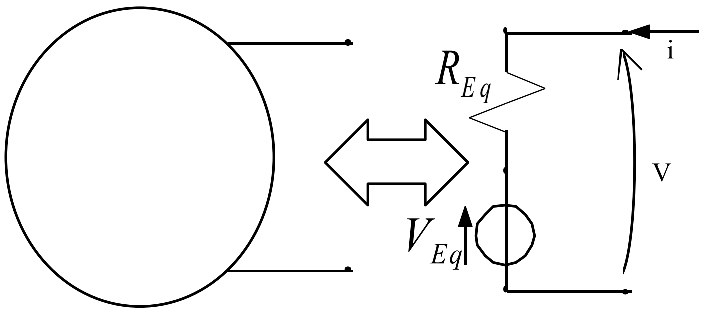


Figura (c)

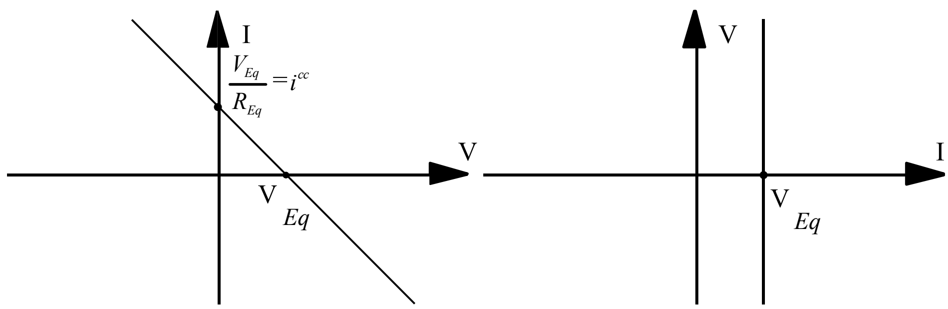


Teoremi di Thevenin e Norton.

Il teorema di Thevenin dice che, agli effetti esterni, una qualunque rete adinamica lineare che presenti due morsetti, equivale ad un generatore di tensione in serie ad una resistenza:



Ricordiamo che la caratteristica di un bipolo formato solo da un generatore di tensione e da un resistore è sostanzialmente una retta. Nel caso in questione la caratteristica verrà rappresentata nella seguente figura (1):

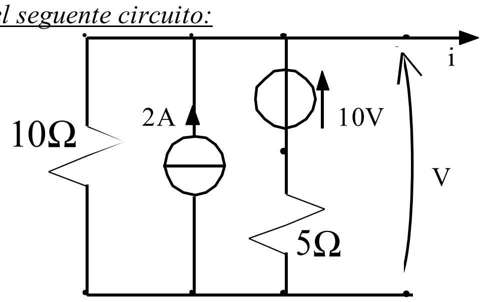


E' dunque ovvio che, facendo tendere a zero la resistenza equivalente, troviamo una caratteristica come quella rappresentata nella figura (2); tale situazione indica che la rete che abbiamo ridotto al suo equivalente Thevenin si comporta come un generatore di tensione. A partire dalla figura (1), si può osservare come non ci sia modo per ottenere, invece, una caratteristica orizzontale. Una caratteristica di questo tipo indica infatti che la rete che si è ridotta si comporta come un generatore di corrente e non è ovviamente possibile rappresentare un generatore di corrente utilizzando un resistore ed un generatore di tensione (non sarebbe neppure comodo!). Vediamo dunque come calcolare la tensione e la resistenza equivalente a partire dal circuito iniziale. La tensione equivalente corrisponde alla tensione a vuoto che si misura tra i due morsetti liberi; per calcolare la resistenza equivalente ci sono invece due modi: il primo consiste nel ricavare la corrente di cortocircuito che si avrebbe tra tali due morsetti e di inserirla nella relazione

$$R_{Eq} = \frac{v_{Eq}}{i^{cc}}$$

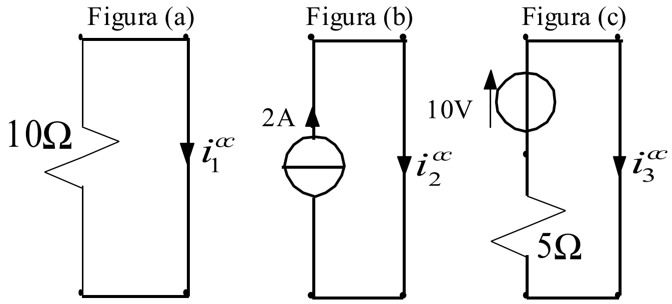
ricavando la resistenza equivalente come rapporto. Il secondo modo consiste nello spegnere tutti i generatori di corrente e di tensione presenti sul circuito e di ridurre tutte le resistenze rimaste ad un'unica resistenza, la resistenza equivalente appunto. Vediamo, per chiarire meglio il discorso, un esempio pratico:

<u>Ricavare l'equivalente Thevenin del seguente circuito:</u>



Come prima cosa, dunque, devo valutare la tensione equivalente, ciò significa valutare la tensione tra i due morsetti scoperti. Per far questo si utilizzerà il teorema di Millman. Nella seguente figura (a) si può osservare come la corrente di corto circuito relativa al ramo contenente il solo resistore da 10Ω sia ovviamente nulla; dunque, per questo primo ramo si avrà:

$$i_1^{cc} = 0 \quad \text{e} \quad g_1 = \frac{1}{10} S$$



Nella figura (b) si può invece osservare come la corrente di corto circuito relativa al ramo contenente il solo generatore di corrente sia pari, ovviamente, a 2A; dunque, per questo secondo ramo si avrà:

$$i_2^{cc} = 2A \quad e \quad g_2 = 0$$

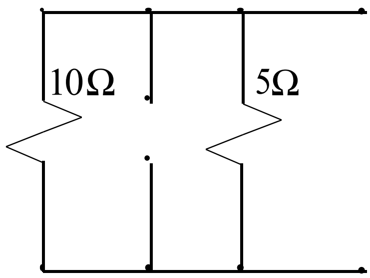
Infine, come mostrato in figura (c), per il terzo ramo si avrà:

$$i_3^{cc} = \frac{10V}{5\Omega} = 2A \quad e \quad g_3 = \frac{1}{5}S$$

Posso, a questo punto, valutare la tensione tra i due morsetti liberi con il teorema di Millman dal quale si ricava:

$$v_{Eq} = \frac{\sum_{k=1}^{3} i_k^{cc}}{\sum_{k=1}^{3} g_k} = \frac{40}{3}V$$

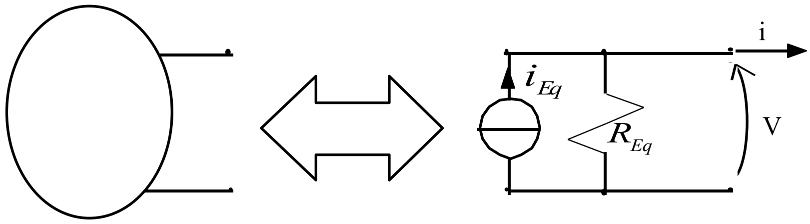
Adesso dobbiamo ricavare la resistenza equivalente; per fare questo utilizzeremo il secondo metodo; dunque spegnamo tutti i generatori indipendenti presenti sul circuito e otteniamo un circuito puramente resistivo come quello rappresentato nella figura seguente:



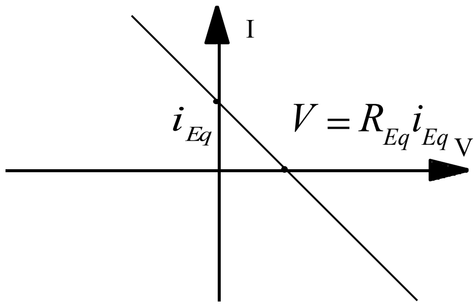
Appare evidente come la resistenza equivalente si ottenga dalla connessione in parallelo delle due resistenze da 5Ω e da 10Ω. Si avrà dunque:

$$R_{Eq} = \left[\frac{1}{(10\Omega)} + \frac{1}{(5\Omega)}\right]^{-1} = \frac{10}{3}\Omega$$

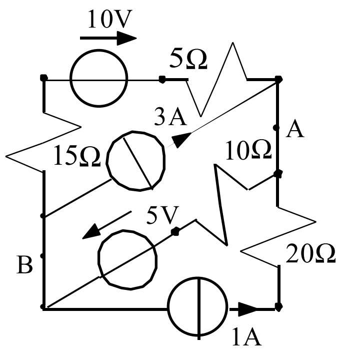
Quando l'equivalente Thevenin di un circuito non si può trovare (operativamente ce ne accorgiamo quando troviamo una resistenza equivalente infinita) dobbiamo usare il teorema di Norton. Tale teorema ci dice che, agli effetti esterni, una qualunque rete adinamica lineare che presenti due morsetti, equivale ad un generatore di corrente in parallelo ad una resistenza:



In questo caso la caratteristica del bipolo equivalente sarà espressa dal grafico della figura seguente:



Per ricavare l'equivalente Norton, quindi, sarà prima necessario ricavare la corrente di cortocircuito relativa a tutto il circuito e poi calcolare la resistenza equivalente usando la tensione per ottenere la resistenza come rapporto fra tensione e corrente oppure, ancora una volta, condensando in un unico resistore i resistori che rimangono quando tolgo dalla rete tutti i generatori indipendenti.
Vediamo ora un esempio pratico di applicazione di questi due teoremi:
Calcolare la tensione tra il nodo A e il nodo B del seguente circuito:



Per risolvere questo problema scomponiamo il circuito in due parti: la prima parte sia il triangolo costruito sul generatore di corrente da 3A mostrato nella seguente figura (a). Valutiamo l'equivalente Thevenin di questa parte del circuito. Calcoliamo innanzitutto la tensione equivalente. A questo scopo osserviamo, dalla figura (a), che in quel pezzo di circuito la corrente è imposta dal generatore di corrente. Conoscere la corrente mi permette di calcolare immediatamente la caduta di tensione sui due resistori da 5Ω e da 15Ω; queste dunque saranno, rispettivamente:

$$v_{R1} = (5\Omega)(3A) = 15V$$
$$v_{R2} = (15\Omega)(3A) = 45V$$

A questo punto risulta immediato valutare la tensione a vuoto relativa ai nodi A e B di questo pezzo di circuito; si avrà infatti:

$$v_{EqT} = v_{R1} + v_{R2} + (10V) = (15V) + (45V) + (10V) = 70V$$

Per ricavare la resistenza equivalente tolgo tutti i generatori indipendenti dal circuito di figura (a) ottenendo la configurazione di figura (b). Appare dunque evidente che la resistenza equivalente si ottiene con il collegamento in serie delle due resistenze da 15Ω e da 5Ω, ottenendo:

$$R_{EqT} = (15\Omega) + (5\Omega) = 20\Omega$$

Figura (a)

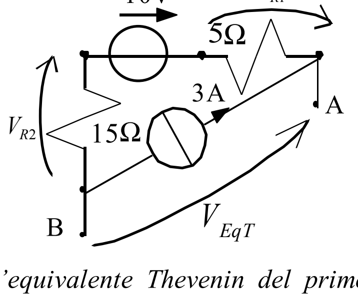


Figura (b)

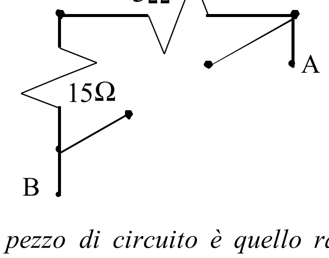
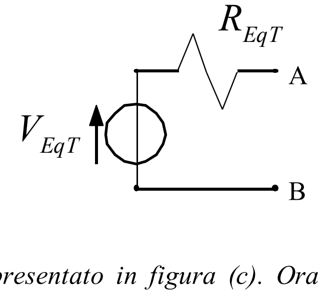


Figura (c)



Quindi l'equivalente Thevenin del primo pezzo di circuito è quello rappresentato in figura (c). Ora andiamo a considerare il secondo pezzo di circuito, ovvero quello rappresentato in figura (d). In questo caso risulta più comodo ricavare prima la resistenza equivalente. Togliendo infatti tutti i generatori indipendenti, il circuito assume la configurazione di figura (e) nella quale il resistore da 20Ω, essendo direttamente collegato con un circuito aperto, risulta tagliato fuori dal circuito. Dunque la resistenza equivalente coincide con il resistore da 10Ω, ovvero:

$$R_{EqN} = 10\Omega$$

Ora bisogna calcolare la corrente di cortocircuito complessiva di questo secondo pezzo del circuito; rifacciamoci, per far questo, alla figura (f). In questa figura vediamo un circuito composto da tre rami; sul ramo che contiene il generatore di corrente la corrente è ovviamente fissata ad 1A, quindi si avrà:

$$i_1 = 1A$$

Sul ramo che contiene il generatore di tensione e il resistore da 10Ω la corrente può essere calcolata molto semplicemente tramite la relazione:

$$i_2 = \frac{(5V)}{(10\Omega)} = 0{,}5A$$

Applicando ora una LKC al nodo N si ricava la corrente di cortocircuito complessiva:

$$i^{cc} - i_1 + i_2 = 0 \Rightarrow i^{cc} = i_1 - i_2 = (1A) - (0{,}5A) = 0{,}5A$$

Figura (d)

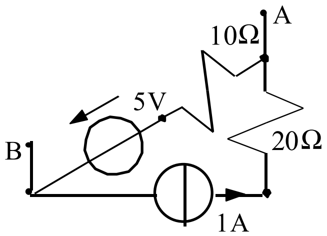


Figura (e)

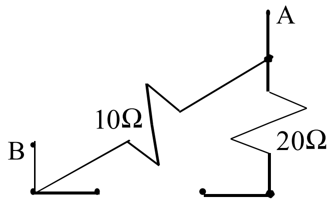
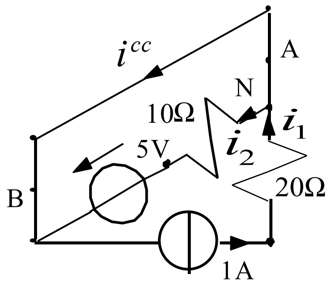
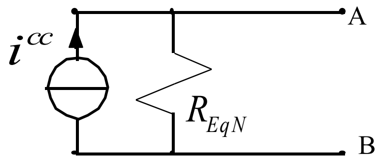


Figura (f)



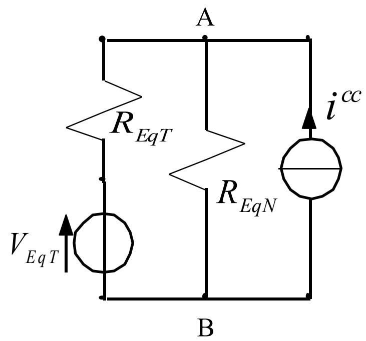
Quindi l'equivalente Norton del secondo pezzo di circuito è quello rappresentato in figura (g).

Figura (g)



Il circuito iniziale può dunque essere semplificato come mostrato in figura (h).

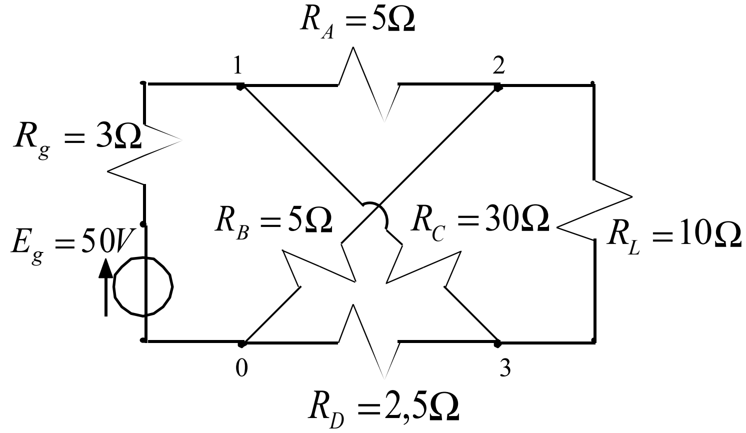
Figura (h)



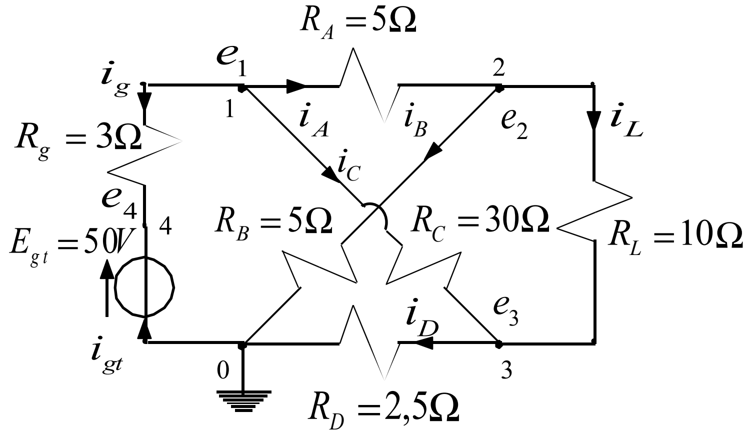
A questo punto risolvere il problema è diventato molto semplice poiché basta applicare il teorema di Millman al circuito semplice di figura (h), ottenendo:

$$V_{AB} = \frac{80}{3}V$$

Esercizi.
Oggi si vedrà un unico esercizio affrontato da diversi punti di vista usando tutte le metodiche viste fino ad ora.
Dato il seguente circuito, valutare la corrente che attraversa la resistenza da 10Ω:



- *Proviamo prima a risolvere questo problema con il metodo dell'analisi nodale modificata. Per poter far questo dobbiamo aggiungere il nodo 4, scegliere un nodo di riferimento (il nodo 0) e indicare tutti i versi delle correnti e delle tensioni (questi ultimi non verranno indicati ma vengano considerati sempre rispettosi della convenzione degli utilizzatori per quanto riguarda i resistori e dei generatori per quanto riguarda i generatori):*



Applichiamo dunque la LKC ai nodi 1, 2, 3 e 4, ottenendo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} i_A + i_C + i_g = 0 \\ -i_A + i_B + i_L = 0 \\ -i_L - i_C + i_D = 0 \\ -i_g - i_{gt} = 0 \end{cases}$$

Esprimiamo ora le correnti che attraversano i vari resistori attraverso la legge di Ohm; otteniamo in questo modo il seguente sistema:

$$\begin{cases} i_A = g_A V_A = g_A (e_1 - e_2) \\ i_B = g_B V_B = g_B e_2 \\ i_C = g_C V_C = g_C (e_1 - e_3) \\ i_D = g_D V_D = g_D e_3 \\ i_g = g_g V_g = g_g (e_1 - e_4) \\ i_L = g_L V_L = g_L (e_2 - e_3) \end{cases}$$

Combiniamo ora i due precedenti sistemi ed aggiungiamo la seguente equazione che esprime la presenza del generatore di tensione:

$$e_4 = E_{gt}$$

Si otterrà così il seguente sistema, qui espresso in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \frac{17}{30} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{8}{15} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ i_{gt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Risolvendo questa matrice si ottengono i seguenti risultati:

$$\begin{cases} e_1 = 35V \\ e_2 = 15V \\ e_3 = 5V \\ e_4 = 50V \\ i_{gt} = 5A \end{cases}$$

Possiamo dunque rispondere alla domanda del problema in quanto si avrà:

$$i_L = g_L V_L = g_L(e_2 - e_3) = \left[\frac{1}{(10\Omega)}\right]\left[(15V) - (5V)\right] = 1A$$

- *Un altro modo per giungere al medesimo risultato sarebbe quello di utilizzare gli equivalenti di Thevenin e Norton. Cerchiamo dunque l'equivalente di Thevenin di tutta la parte del circuito che si trova alla sinistra dei nodi 2 e 3. Dobbiamo dunque trovare, per prima cosa, la tensione equivalente ovvero la tensione che si trova tra il nodo 2 e il nodo 3. Per far questo possiamo sfruttare nuovamente la MNA; togliendo il resistore da 10Ω, si ottiene una matrice simile a quella precedentemente trovata nella quale si ponga nulla la conduttanza relativa a tale resistore; si avrà quindi:*

$$\begin{bmatrix} \frac{17}{30} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{13}{30} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ i_{gt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix}$$

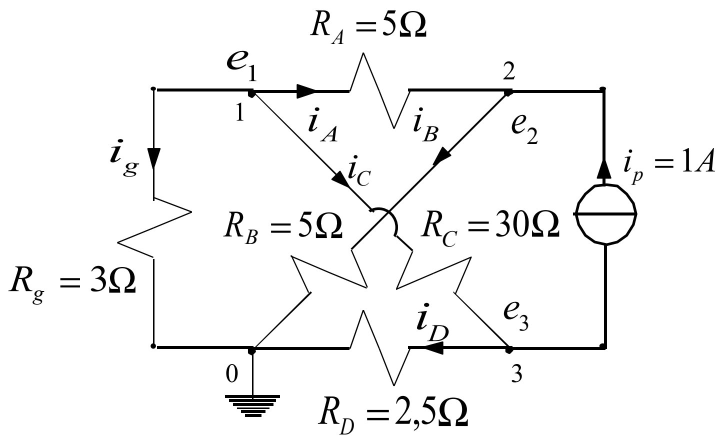
Risolvendo tale sistema si ottiene:

$$\begin{cases} e_1 = 36V \\ e_2 = 18V \\ e_3 = 2{,}5V \\ e_4 = 50V \\ i_{gt} = 4{,}5A \end{cases}$$

Possiamo ora calcolare la tensione a vuoto che sarà data dalla relazione:

$$V_{Eq} = (e_2 - e_3) = (18V) - (2{,}5V) = 15{,}5V$$

Dobbiamo ora calcolare la resistenza equivalente. Osserviamo come, in questo caso, il calcolo diretto della resistenza equivalente in modo diretto sia resa complessa dalla particolare connessione dei resistori (che non sono collegati né in serie, né in parallelo) e quindi sarà necessario introdurre ai nodi 2 e 3 un generatore di corrente nota (per comodità si userà un generatore da 1A), si spegnerà il generatore di tensione e si dovrà calcolare la caduta di tensione sul generatore che abbiamo inserito. Ciò significa risolvere il seguente circuito:



Risolviamo nuovamente questo circuito con la NA; partiamo dunque dal seguente sistema di LKC relative ai nodi 1, 2 e 3:

$$\begin{cases} i_A + i_C + i_g = 0 \\ -i_A + i_B - i_p = 0 \\ -i_C + i_D + i_p = 0 \end{cases}$$

Esprimiamo ora le correnti che attraversano i resistori attraverso la legge di Ohm alle conduttanze; si ottiene dunque il seguente sistema:

$$\begin{cases} i_A = g_A V_A = g_A (e_1 - e_2) \\ i_B = g_B V_B = g_B e_2 \\ i_C = g_C V_C = g_C (e_1 - e_3) \\ i_D = g_D V_D = g_D e_3 \\ i_g = g_g V_g = g_g e_1 \end{cases}$$

Combinando questi due sistemi si ottiene il seguente sistema risolutivo, qui espresso in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \frac{17}{30} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Risolvendo questo sistema si ottiene:

$$\begin{cases} e_1 = 0{,}9V \\ e_2 = 2{,}95V \\ e_3 = -2{,}42V \end{cases}$$

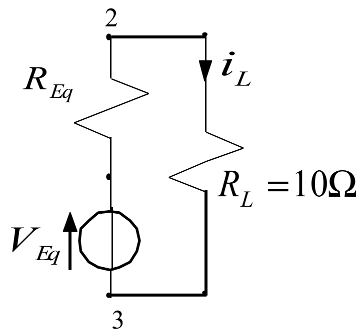
A questo punto si può calcolare la tensione sul generatore di corrente imposta, ottenendo:

$$V_{gc} = e_2 - e_3 = (2{,}95V) - (-2{,}42V) = 5{,}37V$$

La resistenza equivalente sarà dunque:

$$R_{Eq} = \frac{V_{gc}}{(1A)} = \frac{(5{,}37V)}{(1A)} = 5{,}37\Omega$$

Ora che abbiamo trovato l'equivalente Thevenin che stavamo cercando, ci troviamo a dover gestire il seguente circuito:



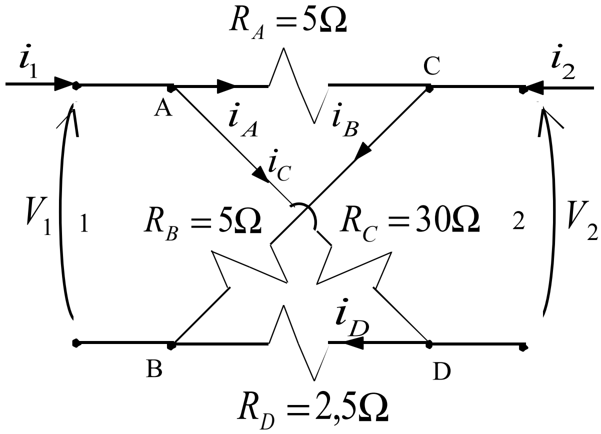
Vediamo subito che la resistenza equivalente e la resistenza da 10Ω sono tra di loro in serie e quindi posso sostituirle con un unico resistore di resistenza:

$$R_{Tot} = R_L + R_{Eq} = (10\Omega) + (5{,}37\Omega) = 15{,}37\Omega \cong 15{,}5\Omega$$

Posso quindi, infine, valutare la corrente che attraversa questo resistore, che sarà poi uguale alla corrente che attraversa la singola resistenza da 10Ω; si avrà dunque:

$$i_L = \frac{V_{Eq}}{R_{Tot}} = \frac{(15{,}5V)}{(15{,}5\Omega)} = 1A$$

- *Questo esercizio può anche essere affrontato come un esercizio relativo ad un doppio bipolo: possiamo infatti osservare come tutto ciò che è compreso tra i nodi 0 e 1 a sinistra e tra i nodi 2 e 3 a destra sia in effetti un doppio bipolo. Il fatto che questo sia un doppio bipolo è confermato osservando che, prendendo una superficie chiusa che contenga il generatore di tensione e la resistenza da 3Ω, si può dimostrare, applicando una LKC, che la corrente che entra nel nodo 1 da sinistra è uguale alla corrente che esce da destra dal nodo 0; analogamente, utilizzando una superficie chiusa che contenga la resistenza da 10Ω, si può dimostrare che la corrente che entra da destra nel nodo 2 equivale alla corrente che esce da destra nel nodo 3. Abbiamo dunque il seguente doppio bipolo:*



Come si può notare, i nodi sono stati ribattezzati A, B, C e D ed è stato riservato l'1 e il 2 alle rispettive porte. Cerchiamo dunque le rappresentazioni matriciali di questo doppio bipolo. Utilizziamo il metodo delle prove semplici per ricavare gli elementi della matrice R̲. L'espressione esplicita di tale rappresentazione matriciale è la seguente:

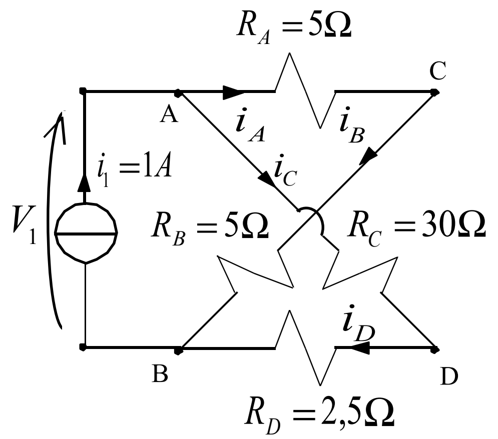
$$\begin{cases} V_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2 \\ V_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2 \end{cases}$$

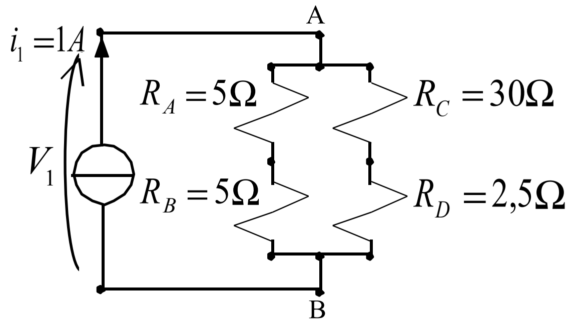
Dunque l'elemento (1,1) della matrice si ottiene tramite la relazione seguente:

$$r_{11} = \left.\frac{V_1}{i_1}\right|_{i_2=0}$$

Per risolvere questo problema lasciamo aperta la porta 2 del doppio bipolo (in modo che la corrente per quella porta sia, appunto, nulla) imponiamo alla porta 1 una corrente prestabilita (ad esempio immettendo un generatore di corrente da 1A), misuriamo la tensione che cade sul generatore che abbiamo imposto e otteniamo, facendo il rapporto, l'elemento di matrice cercato. Il circuito da risolvere è dunque quello rappresentato nella seguente figura (1):

Figura (1) Figura (2)





Come si osserva in figura (2), il doppio bipolo può essere riorganizzato (senza modificarne il grafo) in modo da sottolineare come sia composto dal parallelo di due rami che contengono due resistenze in serie. Valutiamo dunque il resistore equivalente a queste quattro resistenze:

$$R_{Eq1} = \left(\frac{1}{R_A + R_B} + \frac{1}{R_C + R_D} \right)^{-1} = 7,65\Omega$$

A questo punto si può calcolare, nota corrente e resistenza, la caduta di tensione su tale resistore equivalente che, come provato da una LKV all'unica maglia alla quale è stato ridotto il circuito, equivale alla tensione cercata sul generatore:

$$V_1 = V_{Eq1} = R_{Eq1}(1A) = 7,65V$$

Ora possiamo ricavare il primo elemento di matrice come segue:

$$r_{11} = \left.\frac{V_1}{i_1}\right|_{i_2=0} = \frac{(7,65V)}{(1A)} = 7,65\Omega$$

Per trovare l'elemento di matrice (2,2) si deve ovviamente fare un discorso inverso. In questo secondo caso le resistenze in serie saranno la A con la C e la B con la D; si avrà allora:

$$R_{Eq2} = \left(\frac{1}{R_A + R_C} + \frac{1}{R_B + R_D} \right)^{-1} = 6,18\Omega$$

E quindi:

$$V_2 = V_{Eq2} = R_{Eq2}(1A) = 6,18V$$

Da cui:

$$r_{22} = \left.\frac{V_2}{i_2}\right|_{i_1=0} = \frac{(6,18V)}{(1A)} = 6,18\Omega$$

facendo riferimento ancora alle figure (1) e (2) precedenti, valutiamo ora il termine di matrice (2,1) che si esprime come segue:

$$r_{21} = \left.\frac{V_2}{i_1}\right|_{i_2=0}$$

Dalla figura (1) si può osservare come la tensione alla porta 2 equivalga alla tensione tra i nodi C e D. Apllicando una LKV alla maglia formata dalla porta 2, dal resistore A e dal resistore C si ottiene:

$$V_2 = V_C - V_A$$

Per trovare la tensione alla porta 2 dobbiamo dunque trovare la caduta di tensione sui resistori A e C, questo però significa trovare la corrente che passa in tali resistori; per far questo sfruttiamo la figura (2) e osserviamo che le correnti che passano nei resistori A e C possono essere ricavate con la formula del partitore di corrente. Avremo dunque, nel resistore A si avrà:

$$i_A = i_B = (1A)\frac{(R_C + R_D)}{(R_A + R_B) + (R_C + R_D)} = 0,76A$$

Per quanto riguarda il resistore C posso applicare nuovamente la regola del partitore di corrente oppure, molto più semplicemente, ricavarla per differenza:

$$i_C = i_D = (1A) - i_A = 0{,}24A$$

Ora che conosco le correnti posso ricavare le cadute di tensione sui due resistori:

$$V_A = R_A i_A = 3{,}82V$$

$$V_C = R_C i_C = 7{,}06V$$

E quindi:

$$V_2 = V_C - V_A = 3{,}24V$$

Posso quindi trovare l'elemento di matrice cercato tramite la formula:

$$r_{21} = \left.\frac{V_2}{i_1}\right|_{i_2=0} = \frac{(3{,}24V)}{(1A)} = 3{,}24\Omega$$

Siccome il doppio bipolo è composto solo da bipoli passivi, posso sfruttare il principio di reciprocità secondo il quale il termine (1,2) è uguale al termine (2,1). La matrice $\underline{R}$ relativa a questo bipolo sarà allora la seguente:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 7{,}65 & 3{,}24 \\ 3{,}24 & 6{,}18 \end{bmatrix}$$

Per ricavare la matrice $\underline{G}$ possiamo ora invertire la matrice $\underline{R}$ trovata, ottenendo:

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 0{,}168 & -0{,}088 \\ -0{,}088 & 0{,}208 \end{bmatrix}$$

Ora che conosciamo le rappresentazioni $\underline{R}$ e $\underline{G}$ possiamo risalire alla rappresentazione implicita. Ricordando infatti la relazione:

$$\underline{R} = -\underline{M}^{-1}\underline{N}$$

osserviamo che, ponendo la matrice $\underline{M}$ uguale alla matrice unità $\underline{1}$, si ricava che la matrice $\underline{N}$ equivale alla matrice $\underline{R}$ cambiata di segno, ovvero:

$$\underline{N} = -\underline{R} = \begin{bmatrix} -7{,}65 & -3{,}24 \\ -3{,}24 & -6{,}18 \end{bmatrix}$$

Quindi la rappresentazione implicita di questo doppio bipolo sarà la seguente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7{,}65 & -3{,}24 \\ -3{,}24 & -6{,}18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Sfruttiamo ora la rappresentazione implicita per ricavare le rappresentazioni ibride di questo doppio bipolo: come sappiamo, dobbiamo riorganizzare la rappresentazione implicita nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3{,}24 \\ 0 & -6{,}18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7{,}65 & 0 \\ -3{,}24 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Le due matrici ibride saranno quindi:

$$\underline{H} = -\underline{M}_1^{-1}\underline{N}_1 = \begin{bmatrix} 5{,}96 & 0{,}52 \\ -0{,}52 & 0{,}16 \end{bmatrix}$$

$$\underline{H}^1 = \begin{bmatrix} 0{,}13 & -0{,}42 \\ 0{,}42 & 4{,}87 \end{bmatrix}$$

Notiamo dunque come un doppio bipolo reciproco abbia le matrici $\underline{H}$ e $\underline{H}'$ emisimmetriche. Riarrangiamo ora la rappresentazione implicita al fine di ottenere le rappresentazioni di trasmissione; si avrà:

$$\begin{bmatrix} 1 & -7{,}65 \\ 0 & -3{,}24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3{,}24 \\ 1 & 6{,}18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Le due matrici di trasmissione saranno dunque:

$$\underline{T} = -\underline{M}_2^{-1}\underline{N}_2 = \begin{bmatrix} 2{,}36 & 11{,}35 \\ 0{,}31 & 1{,}91 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}^{1} = \begin{bmatrix} 1{,}91 & -11{,}35 \\ -0{,}31 & 2{,}36 \end{bmatrix}$$

Osserviamo come un doppio bipolo reciproco abbia le matrici $\underline{T}$ e $\underline{T}'$ tali per cui il loro determinante sia unitario; facendo la prova con il caso in analisi si vede infatti come sia:

$$\det(\underline{T}) = \det(\underline{T}^{1}) = 1$$