

Introduzione al corso. Il decadimento radioattivo.

Questo corso, come indicato dal titolo, si occupa dei principi fondamentali della fisica dei reattori a fissione utilizzati per la produzione di energia. Un corso come questo, così come del resto tutto il corso di laurea in ingegneria nucleare, può apparire strano e di poca utilità in un paese come l'Italia nel quale, in seguito all'incidente di Chernobyl del 1986 e al referendum del 1987, tutti gli impianti nucleari a fissione per la produzione di energia sono stati spenti. L'utilità di tale corso appare invece evidente se si considerano alcuni fatti che non possono fare altro che imporre, in un prossimo futuro, la revisione di una scelta fatta in seguito ad una errata e viziata interpretazione del citato referendum. Il primo fatto riguarda il fabbisogno energetico mondiale futuro. Nella tabella che vediamo qui di seguito viene rappresentato il fabbisogno annuo e il fabbisogno integrale relativo ad un intervallo temporale che raggiunge l'anno 2050.

Anni	1991	2020	2050
Fabbisogno annuo	8,2 Gtep/a	≈13 Gtep/a	≈20 Gtep/a
Fabbisogno integrale nel periodo segnato		300 Gtep	900 Gtep

A fronte di questa tabella è interessante osservare la seguente, nella quale vengono stimate le riserve accertate di combustibili fossili.

Olio	Gas	Carbone	Totale
165 Gtep	110 Gtep	650 Gtep	925 Gtep

Confrontando i dati di queste due tabelle appare evidente che, nonostante le possibili fluttuazioni che ci possono essere in queste previsioni, la produzione di energia a partire dai combustibili fossili diventerà problematica a partire dal 2050 circa. Per risolvere questo problema le strade percorribili non sono particolarmente numerose:

- un pesante controllo demografico potrebbe limitare la sempre crescente richiesta di energia da parte delle nazioni in via di sviluppo; una scelta di questo genere comporterebbe però una miriade di altri problemi dei quali il problema morale derivante dal controllo delle nascite sarebbe soltanto la punta dell'iceberg;
- un secondo modo per risolvere il problema sarebbe quello di attuare una pesante politica di risparmio energetico; anche in questo modo, però, osservando i dati relativi all'energia richiesta, i risultati non sarebbero particolarmente promettenti;
- un modo per incrementare l'energia disponibile sarebbe ovviamente quello di sfruttare altre fonti energetiche.

Tutti questi discorsi sono stati finora fatti senza tener conto dell'aspetto ecologico che ultimamente è salito alla ribalta. Alla recente conferenza sull'ambiente di Kyoto infatti, pur riconoscendo che il contributo umano all'immissione dei gas serra in atmosfera è solo del 4% e che il bilancio complessivo di questi gas è ancora sconosciuto, si è deciso di avviare programmi tesi ad arginare il problema dell'effetto serra. Tali programmi non possono che basarsi sul filtraggio dei gas serra in quei procedimenti che li producono oppure sull'utilizzo di fonti energetiche che non producano tali gas. Tra queste fonti energetiche "pulite" bisogna però osservare che, per quanto riguarda l'energia idroelettrica, quasi tutti i salti idroelettrici sfruttabili sono stati sfruttati (e quindi le prospettive relative a questa metodica non possono promettere ingenti sviluppi), per quanto riguarda, invece, altre fonti come quella solare, quella eolica e quella mareale, bisogna sinceramente riconoscere che, con le tecnologie attuali, questi sistemi possono essere sfruttati solo per situazioni locali. In questo panorama il nucleare come fonte energetica si inserisce come una fonte dalle grosse potenzialità e assolutamente indolore dal punto di vista delle emissioni di gas serra. A livello mondiale, dunque, il nucleare gode di una grande considerazione. In Italia, invece, che pure non è immune dalle problematiche globali cui prima si è accennato, il nucleare è stato bandito nonostante il fatto che il nostro paese sia costretto ad importare praticamente tutto il petrolio, il gas naturale e il carbone che, nell'ordine, sono le principali fonti energetiche del nostro paese. L'Italia importa inoltre il 15% dell'energia elettrica dalla Francia e questo significa che 6 delle 50 centrali nucleari francesi (quelle più vicine ai nostri confini) lavorano praticamente solo per noi.

In un contesto come questo appare evidente che, presto o tardi, sarà necessario rivedere una decisione che alla luce di questi fatti, appare quantomeno avventata.

Veniamo ora più strettamente agli argomenti trattati in questo corso. Ovviamente, come dice il titolo stesso del corso, noi daremo grande peso alla fissione nucleare e quindi nella prima parte del corso saranno frequenti i richiami di fisica nucleare, in particolare per quanto riguarda la fissione stessa (vedremo cos'è e perché è importante), i tassi di reazione (ovvero il numero di reazioni che avvengono nell'unità di tempo), i flussi neutronici e le sezioni d'urto.

Il primo richiamo che facciamo riguarda invece il decadimento radioattivo, in particolare ricordiamo la seguente relazione:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

dalla quale si riesce a sapere, noto il numero iniziale di nuclei, la costante di decadimento (che poi altro non è che la probabilità di decadimento per unità di tempo) e l'intervallo temporale, il numero di nuclei che hanno subito decadimento radioattivo. Ricordiamo, a questo proposito, come i decadimenti principali siano il decadimento α , il decadimento β (che si distingue in β^- e β^+) e la fissione spontanea, è ovvio che, in questo corso, ci occuperemo maggiormente delle fissioni che si riescono ad indurre e a governare. Un'altra importante relazione è quella riguardante l'attività, ovvero il numero di decadimenti al secondo, che viene espressa come segue:

$$I = \lambda N = I_0 e^{-\lambda t}$$

Alcuni isotopi possono subire diversi tipi di decadimento; se, per esempio, un isotopo può subire sia il decadimento α che la fissione spontanea, la costante di decadimento sarà composta nel modo seguente:

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_{fsp}$$

e quindi si parlerà di una attività legata al decadimento α e di una attività legata alla fissione spontanea:

$$\begin{cases} I_a = \lambda_a N \\ I_{fsp} = \lambda_{fsp} N \end{cases}$$

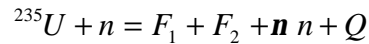
Concludiamo ricordando la relazione che, conoscendo la massa (m) in grammi di una sostanza e la sua massa atomica (A), mi permette, sfruttando il numero di Avogadro, di ricavare il numero di atomi presenti nel campione:

$$N = \frac{N_{Av}}{A} m$$

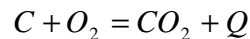
Nella prossima lezione ci concentreremo sulla fissione e, in particolare, sulla tonalità energetica e sul fatto che una fissione può essere indotta da neutroni, il fatto poi che la fissione produca anch'essa neutroni rende possibili le reazioni a catena.

La fissione nucleare

Come avevamo accennato nella lezione precedente, ci occuperemo ora della fissione. Concentriamoci dunque subito sulla reazione di fissione dell'uranio ^{235}U che vediamo espressa qui di seguito:



Leggendo questa espressione possiamo subito notare come la fissione dell'uranio ^{235}U venga avviata da un neutrone (n) che collide con esso; il risultato della fissione è la frammentazione del nucleo in due frammenti F_1 ed F_2 . Oltre a tale frammentazione la fissione produce a sua volta un certo numero di neutroni (ν) che nel caso della reazione di fissione dell'uranio è di circa 2,4 e questo risulta essenziale affinché si possa instaurare un processo che si auto-sostenga (reazione a catena). Nell'espressione della fissione dell'uranio, infine, appare la tonalità termica Q . La tonalità termica si può ricavare conoscendo le masse dei nuclei e dei neutroni che vengono coinvolti nella reazione; nel caso della fissione la tonalità termica è di circa 200 MeV. Per dare un'idea di quanto sia energetica tale reazione possiamo osservare che la tonalità termica della combustione del carbone¹ secondo la nota reazione:



è pari circa a 3,6 eV mentre la tonalità termica associata alla seguente reazione di combustione del metano:



è di circa 9,22 eV. La grande differenza energetica tra queste due ultime reazioni e la reazione di fissione nucleare è dovuta al fatto che la fissione è, appunto, una reazione nucleare che implica la risistemazione dei nucleoni e quindi chiama in causa le forze nucleari mentre le altre due sono reazioni chimiche che prevedono semplicemente la risistemazione delle orbite elettroniche. Per comprendere appieno quello che accade durante la fissione possiamo iniziare a considerare il grafico di figura 1 che rappresenta l'andamento (estrapolato dai dati sperimentali) dell'energia di legame per singolo nucleone (B/A) in funzione del numero di massa (A).

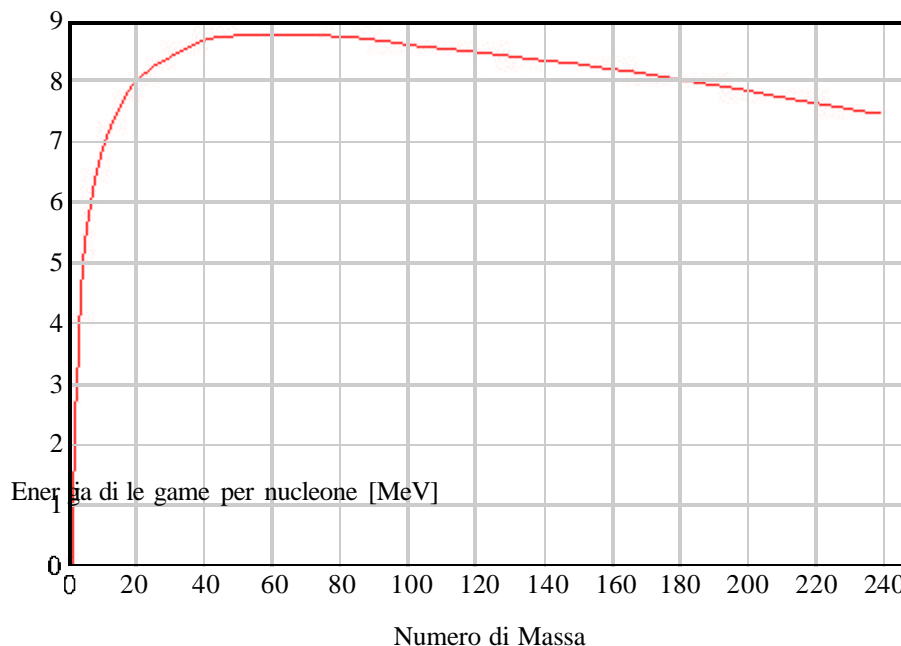


Figura 1

L'energia totale B di legame può essere calcolata conoscendo la massa del nucleo, la massa del protone e la massa del neutrone; questi ultimi due dati sono particolarmente importanti e quindi ne riportiamo il valore numerico:

¹ Il carbon fossile non ha una composizione chimica precisa. Oltre al carbonio, una non trascurabile frazione dell'energia prodotta nella sua combustione è dovuta all'idrogeno presente (~5% in peso). D'altra parte l'umidità e gli inerti presenti fanno diminuire l'energia ricavata dalla combustione. Tanto per fissare le idee, si può ritenere che il potere calorifico inferiore per olio combustibile, gas naturale e carbone di buona qualità sia rispettivamente di 10000 Kcal/kg, 9000 Kcal/m³ (temperatura e pressione normale) e 7000 Kcal/kg.

$$\begin{cases} M_p = 938,256 \text{ MeV} \\ M_n = 939,550 \text{ MeV} \end{cases}$$

E' noto inoltre che un sistema legato può esistere solo se è presente un difetto di massa, ovvero se è valida la relazione:

$$M_{nuc} < ZM_p + NM_n$$

dove Z è il numero atomico mentre N è il numero di neutroni presenti nel nuclide che stiamo considerando. L'energia totale di legame sarà dunque:

$$B = ZM_p + NM_n - M_{nuc}$$

Facendo ora riferimento alla figura 2 vediamo che, nel caso della fissione dell'uranio si passa da un unico nucleo di uranio (punto 1) a due nuclei, che supponiamo uguali, più piccoli (punto 2), ovvero passiamo da una situazione meno energetica ad una situazione più energetica. Nel caso dell'uranio, come è rappresentato in figura, il salto energetico è di circa 0,9 MeV per ogni nucleone; siccome l'uranio che si sta considerando contiene 235 nucleoni, appare evidente come si possa calcolare la tonalità termica della fissione dell'uranio nel modo seguente:

$$Q = (0,9 \text{ MeV}) \cdot 235 = 211,5 \text{ MeV}$$

Un discorso simile a quello che abbiamo fatto per l'uranio potrebbe essere ripetuto per ogni elemento che si trova alla destra della linea azzurra del grafico di figura 2.

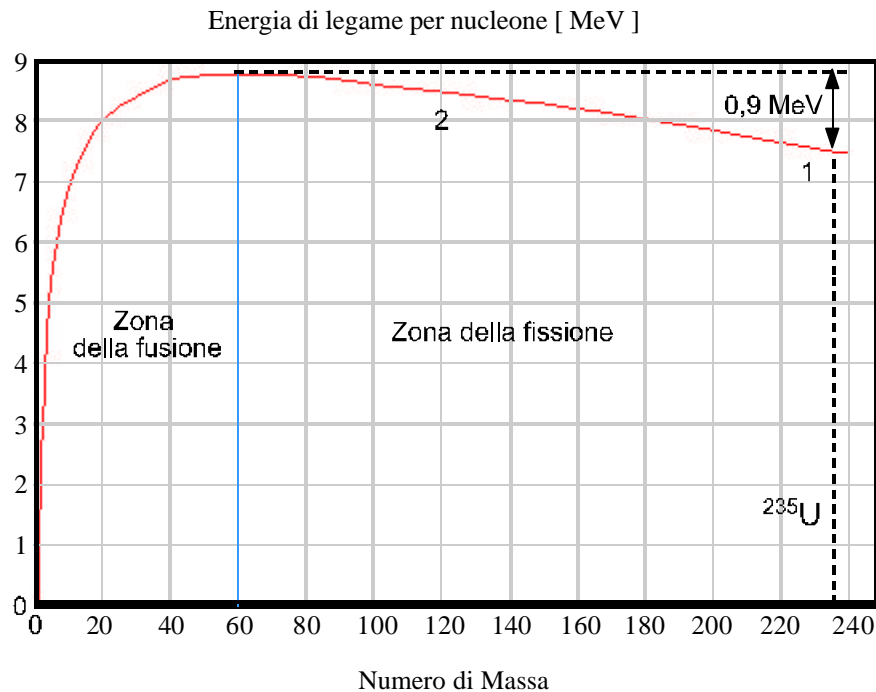


Figura 2

In effetti, gli elementi che si trovano alla destra della linea di separazione, andando incontro a fissione, possono generare una reazione esotermica; la preferenza accordata all'²³⁵U per la produzione di energia è dovuta al fatto che solo con questo particolare isotopo dell'uranio e con pochi altri elementi è possibile indurre la fissione artificialmente e controllarla. La fissione dell'²³⁵U, inoltre, produce essa stessa dei neutroni che possono essere utilizzati per il sostentamento di una reazione a catena. A sinistra della linea azzurra di separazione le reazioni esotermiche possono essere quelle di fusione, delle quali però non ci occuperemo. Osserviamo solo che la fissione è tecnicamente molto più semplice da realizzare rispetto alla fusione perché avviene sfruttando i neutroni che, essendo neutri, non vengono respinti dal nucleo bersaglio; nel caso della fusione, invece, bisogna fondere due nuclei entrambi carichi positivamente e che, quindi, si respingono in maniera vigorosa.

Vediamo ora due esempi numerici che ci permettono di comprendere meglio la differenza tra la resa energetica della fissione e quella della combustione; valutiamo dunque l'energia che si può estrarre da una tonnellata di carbone che viene completamente bruciato e l'energia che si può estrarre da una tonnellata di ²³⁵U che viene completamente fissionato. Concentriamoci prima sul carbone. Come prima cosa, conoscendo il numero di Avogadro, il numero di massa atomica del carbonio e la massa in grammi del campione prescelto, possiamo ricavare il numero di atomi di carbone presenti in una tonnellata:

$$N_C = \frac{N_{Av}}{A} m = 5,01411 \cdot 10^{28} \text{ atomi}$$

Supponiamo ora di riuscire a bruciare tutto il carbone sfruttando la reazione chimica vista precedentemente; ricordando la tonalità termica caratteristica di tale reazione possiamo ricavare l'energia complessiva prodotta tramite la seguente relazione:

$$E_C = Q \cdot N_C = 1,8 \cdot 10^{29} \text{ eV}$$

Ricordiamo ora il seguente importante fattore di conversione:

$$1 \text{ eV} = 1,60210 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

In questo modo possiamo esprimere l'energia prodotta dalla combustione della tonnellata di carbone in unità più familiari:

$$E_C = 2,9 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

In fisica del reattore è molto spesso conveniente esprimere l'energia in MWD (MegaWattDay) piuttosto che in Joule; nel caso in analisi si avrà dunque ²:

$$E_C = 0,34 \text{ MWD}$$

Passiamo ora all'uranio. Anche in questo caso il primo passo è quello di ricavare il numero di atomi presenti in una tonnellata di uranio che saranno:

$$N_U = \frac{N_{Av}}{A} m = 2,56277 \cdot 10^{27} \text{ atomi}$$

Supponiamo ora di riuscire a fissionare tutto l'uranio, ricordando la tonalità termica caratteristica della reazione di fissione dell'uranio, possiamo ricavare l'energia complessiva prodotta:

$$E_U = Q \cdot N_U = 5,420 \cdot 10^{35} \text{ eV}$$

ovvero

$$E_U = 1,005 \cdot 10^6 \text{ MWD}$$

Da questo calcolo si può notare l'incredibile divario nel potenziale energetico tra la fissione dell'uranio e la combustione del carbone. E' necessario però sottolineare che i calcoli numerici che sono stati fatti presupponevano che si riuscisse a fissionare completamente il campione di uranio, in realtà, quando si irraggia l'uranio con un fascio di neutroni, la fissione non è l'unica reazione che si ottiene: un certo numero di neutroni viene ad esempio catturato dall'²³⁵U che emette radiazione γ (si parla in questo caso di cattura γ) e crea atomi di ²³⁶U. La probabilità effettiva che avvenga la fissione è circa dell'85%. Anche con questa correzione, però, si osserva che l'energia prodotta da una tonnellata di uranio è pari a circa 854000 MWD ed è quindi sempre immensamente superiore rispetto all'energia prodotta da una tonnellata di carbone.

Vediamo ora un esempio inverso nel quale si considerano due centrali da 3000 MW termici, una delle quali sia una centrale nucleare mentre l'altra sia una centrale a carbone. Facendo riferimento ai valori numerici ricavati nell'esempio precedente, vogliamo stabilire in entrambi i casi quanto combustibile è necessario per far funzionare la centrale per un anno. Come prima cosa osserviamo che l'energia totale annua per entrambe le centrali può essere ricavata, detta P la potenza e t il tempo di funzionamento, dalla seguente semplice relazione:

$$E_{Tot} = Pt = 3000 \text{ MW} \cdot 365 \text{ D} = 1,095 \cdot 10^6 \text{ MWD}$$

Ricordando la quantità di energia E_C prodotta da una singola tonnellata di carbone possiamo ricavare la quantità totale di carbone necessaria per soddisfare il valore richiesto:

$$m_C = \frac{E_{Tot}}{E_C} = 3,2 \cdot 10^6 \text{ t}$$

In modo analogo calcoliamo ora la quantità totale di uranio necessaria al medesimo scopo:

$$m_U = \frac{E_{Tot}}{E_U} = 1,28 \text{ t}$$

L'enorme differenza di materiale che emerge da questo calcolo permette di capire come, nel caso delle centrali nucleari, i problemi logistici e i costi riguardanti l'acquisto, la movimentazione e il trasporto del combustibile siano infinitamente minori rispetto a quelli di una centrale a carbone che invece risulta più economica nella fase di realizzazione dell'impianto. Il confronto tra una centrale nucleare e una centrale a petrolio porterebbe a risultati molto simili³. Il fatto che le centrali nucleari necessitino di poco materiale rende inoltre minime le ripercussioni sul costo finale dell'energia prodotta delle fluttuazioni di prezzo del combustibile; è infine da notare come l'uranio sia diffuso in tantissimi paesi sul

² Assumendo un calore specifico inferiore di 7000 Kcal/kg, una tonnellata di carbone fornisce $7 \cdot 10^6 \text{ Kcal} = 0,34 \text{ MWD}$

³ Si è ragionato a parità di energia termica. Se il confronto viene fatto a parità di energia elettrica prodotta in un anno (7 miliardi di KWh per una centrale da 1000 MWe con fattore di carico 80%), i flussi annuali di combustibile per i diversi tipi di centrali sono circa di: 1 t di ²³⁵U, $2 \cdot 10^6 \text{ t}$ di carbone, $1,4 \cdot 10^6 \text{ t}$ di olio, $1,2 \cdot 10^9 \text{ m}^3$ di gas.

globo e questo rende impossibile la formazioni di un oligopolio come, in effetti, succede nel caso del mercato del petrolio.

Tutti questi elementi giocano dunque a favore delle centrali nucleari che, però, non sono esenti da problemi e difficoltà la maggiore delle quali è sicuramente quella riguardante le scorie radioattive. Facendo riferimento alle due centrali da 3000 MW dell'esempio precedente, bisogna osservare che la centrale a carbone, oltre all'emissione di anidride carbonica dovuta alla combustione (ritenuta corresponsabile dell'effetto serra), produce più di 100000 t di scorie solide incombuste. La centrale nucleare non emette nessun tipo di gas serra nell'ambiente e produce un volume di scorie solide infinitamente minore rispetto a quella a carbone, il problema fondamentale riguarda però la pericolosità delle poche scorie solide prodotte che si rivelano essere altamente radioattive. Entrambi i frammenti che derivano dalla fissione appartengono infatti alla zona azzurra della tabella degli isotopi e quindi, avendo troppi neutroni, decadono β^- ; tali frammenti, inoltre, non sono sempre gli stessi perché i prodotti di fissione sono moltissimi. Nella figura 3 vediamo un grafico che esprime la resa di fissione (Y) in funzione del numero di massa (tale grafico si riferisce alla fine della catena di decadimenti di tutti i prodotti). Durante la fissione si deve ovviamente mantenere costante il numero di neutroni e di protoni ed inoltre (essendo due i frammenti derivanti dalla fissione) si dovrà avere:

$$\sum_i y_i = 2$$

Ognuno dei due frammenti della fissione è radioattivo e quindi ognuno dei due frammenti dà origine ad una catena di decadimenti β^- .

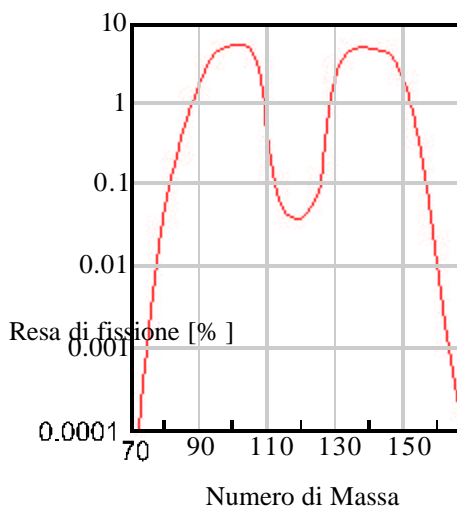


Figura 3

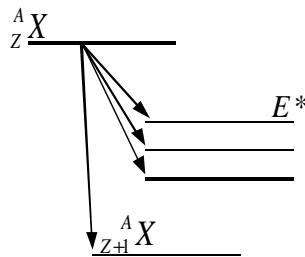
Quando il materiale esausto viene estratto dal reattore, dunque, viene immediatamente riposto, per un certo tempo di attesa, nelle piscine che schermano le radiazioni più intense (oltre alle radiazioni β^- sono infatti inizialmente presenti in grande quantità anche le ben più penetranti radiazioni γ) e smaltiscono il calore. In seguito il combustibile può venire ritrattato chimicamente per recuperare il materiale fissile incombusto, separandolo dai prodotti di fissione (scorie). Le scorie radioattive, o il combustibile non ritrattato, vengono riposti nei siti di stoccaggio. Tali siti si dividono in temporanei (capannoni isolati e protetti) oppure definitivi (solitamente si tratta di vecchie miniere di salgemma). Data la lunghissima vita media (migliaia, e perfino milioni di anni) sorgono perplessità sulla liceità o meno di lasciare in eredità alle generazioni future tali ingombranti presenze. Gli studi effettuati sono alquanto tranquillizzanti, dato che prevedono che, anche su periodi molto lunghi, solo una minima quantità di scorie radioattive possa raggiungere la biosfera (sempre che, nel frattempo, il deposito non venga manomesso). Attualmente sono allo studio metodiche che permettano (per esempio tramite nuovi irraggiamenti) di diminuire la vita media delle scorie. Questa strada però appare irta di difficoltà e dunque molto costosa.

La fissione nucleare. Neutroni pronti e ritardati. Il flusso di neutroni. Il tasso di reazione. La sezione d'urto.

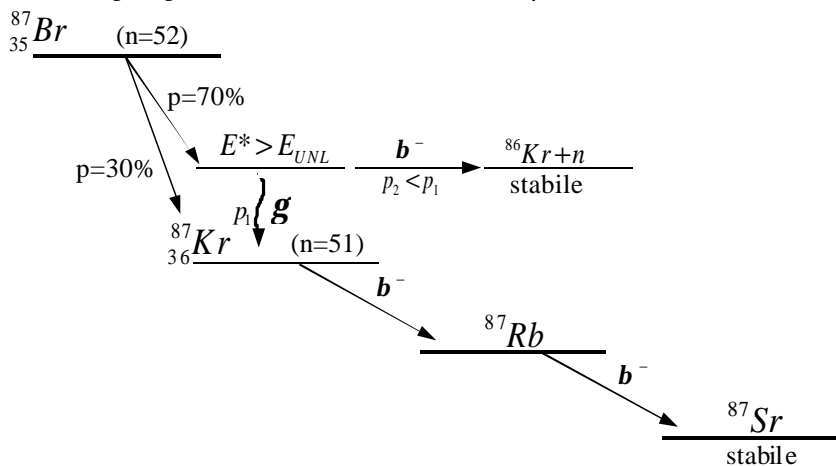
Ci si sofferma, per iniziare, sull'emissione di neutroni che avviene durante la reazione di fissione. Come si era già accennato in precedenza, quando un nucleo di ^{235}U si spezza si formano due frammenti che hanno a loro volta un eccesso di neutroni; tale eccesso di neutroni è la causa dell'emissione β^- alla quale vanno incontro i due frammenti stessi. In realtà l'eccesso di neutroni è talmente elevato che molti neutroni vengono prodotti istantaneamente al momento della fissione (con un ritardo di circa 10^{-15}s); tali neutroni prendono il nome di neutroni pronti. I neutroni che derivano, invece, dal decadimento β^- dei due frammenti originatisi nella fissione si dicono neutroni ritardati. Questi ultimi avranno, come sarà chiarito meglio nel seguito, una notevole importanza quando il reattore funziona in regime variabile nel tempo mentre quando il reattore funziona a potenza costante possono essere tranquillamente trascurati. Il termine ν che appariva nella reazione di fissione e che esprime i neutroni che vengono prodotti durante la fissione (nel caso dell' ^{235}U si aveva $\nu=2,4$) si riferisce a tutti i neutroni prodotti e quindi sia ai neutroni pronti, che sono la stragrande maggioranza, che a quelli ritardati; nel caso specifico dell' ^{235}U il contributo a ν apportato dai neutroni ritardati è pari solo allo 0,65%. Questa enorme disparità si può comprendere pensando che i neutroni ritardati derivano dal decadimento β^- e quindi sarà sempre valida una legge di decadimento e si avrà un andamento di tipo esponenziale decrescente. Con riferimento al grafico seguente notiamo come, affinché l'emissione β^- sia possibile, l'energia dell'elemento nel quale il nuclide di partenza decade deve essere maggiore dell'energia dell'ultimo neutrone legato, ovvero si deve avere (anche se questa considerazione non è sempre verificata):

$$E^* > E_{UNL}$$

Inoltre, anche quando la condizione appena espressa viene verificata, sono solitamente maggiori le probabilità che il nucleo decada β^- rispetto alle probabilità che decada g .



Nel seguito vediamo un esempio specifico di catena di decadimenti β^-



In seguito al primo decadimento vediamo che il $^{87}_{36}\text{Kr}$ contiene 51 neutroni; l'ultimo neutrone risulterà essere poco legato, poiché 50, ossia il numero immediatamente inferiore, rappresenta uno dei numeri magici, cui corrisponde uno stato particolarmente legato. Un nuclide con un neutrone poco legato e che sia in grado di emettere un neutrone viene chiamato nuclide precursore. I nuclidi precursori conosciuti sono circa un centinaio e vengono solitamente raggruppati in sei gruppi in base alla similitudine dei tempi di dimezzamento. Nel caso dell' ^{235}U la tabella in questione sarà la prima della pagina seguente. Ovviamente risulterà valida la seguente relazione:

$$\sum_i b_i = 6,5\%$$

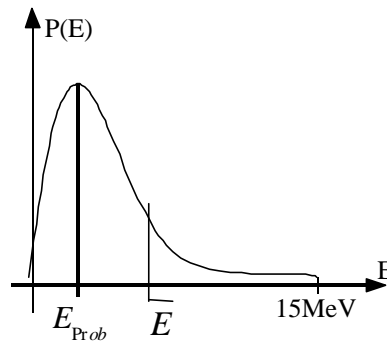
Gruppo	$T_{1/2}^i$ (s)	b_i (‰)
1	55,72	0,215
2	22,72	1,42
3	6,22	1,27
4	2,3	2,57
5	0,61	0,75
6	0,23	0,27

Conoscendo i $T_{1/2}^i$ e i b_i si può calcolare il valor medio del tempo di dimezzamento nel modo seguente:

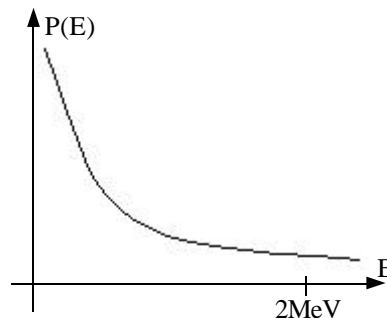
$$\bar{T}_{1/2} = \frac{\sum_i b_i T_{1/2}^i}{b}$$

Riferendosi alla tabella dell' ^{235}U si ottiene un tempo medio di dimezzamento di circa dodici secondi; si dirà allora che una piccola frazione dei neutroni prodotti dalla fissione (6.5 ‰) ritarda di circa 12 secondi.

Concentriamoci ora sulla gran parte dei neutroni emessi, ovvero sui neutroni pronti. Tali neutroni sono neutroni veloci in quanto hanno energia media $\bar{E} \approx 1,98\text{MeV}$ (da ora in avanti si approssimerà a 2 MeV). La distribuzione è circa Maxwelliana, e lo spettro praticamente si annulla a 15 MeV.



Siccome si cerca il modo di creare delle reazioni a catena, appare ovvio che i neutroni prodotti nella fissione debbano indurre nuove fissioni; ovviamente la probabilità (per unità di spazio percorso) che un neutrone provochi una nuova fissione dipende dall'energia e tale probabilità ha l'andamento sotto rappresentato:



Esistono due tipi di reattori: i reattori veloci, che sfruttano i neutroni di energia elevata per fare delle nuove fissioni, e i reattori termici, nei quali i neutroni vengono rallentati per aumentare la loro probabilità di indurre la fissione (solitamente in queste macchine i neutroni vengono rallentati fino a che la loro energia non sia dello stesso ordine di grandezza dell'agitazione termica). L'unico mezzo per rallentare dei neutroni è quello di sfruttare delle reazioni nucleari (essendo, ovviamente, tali particelle, assolutamente neutre); in particolare sono molto interessanti a questo scopo le reazioni di scattering elastico, solitamente rappresentate dalla simbologia (n,n). Tali reazioni fanno perdere al neutrone una quantità di energia che dipende dalla massa del nucleo urtato; in particolare, se il nucleo urtato è molto pesante il neutrone vi rimbalzerà sopra perdendo poca della sua energia e quindi il numero di urti necessario a rallentare i neutroni crescerà con il crescere della massa atomica del materiale che si usa per il rallentamento. Bisogna inoltre osservare che, ad ogni urto del neutrone con un nucleo, c'è una probabilità non nulla che questo venga assorbito e tolto così dalla corsa per arrivare alla fissione. Ovviamente tale circostanza non è assolutamente vantaggiosa e dunque bisogna riuscire a frenare i neutroni rapidamente e con il minor numero di urti. Un materiale che parrebbe adattarsi benissimo a questo scopo è l'H che ha massa molto simile al neutrone e quindi lo rallenta al punto giusto con pochissime interazioni (al

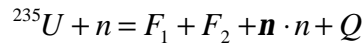
limite ne basta una soltanto). Ovviamente questo non significa che il reattore viene riempito di idrogeno gassoso, viene invece usata l'acqua come sostanza frenante (si introduce così la reazione tra il neutrone e l'ossigeno che non è particolarmente efficace per il rallentamento). Le sostanze che rallentano i neutroni sono dette moderatori. Nei reattori termici, dunque, è presente sia il combustibile che il moderatore. L'idrogeno (usato sotto forma di acqua) non è l'unico moderatore disponibile; sostanzialmente potrebbe essere usato come moderatore qualunque materiale che abbia una sezione d'urto di scattering elastico molto maggiore rispetto alla sezione d'urto d'assorbimento, ovvero:

$$s_{scat} \gg s_{ass}$$

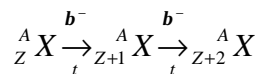
Nei reattori di potenza gli unici tre materiali usati come moderatori sono l'idrogeno (già visto), il deuterio (usato sotto forma di acqua pesante D_2O) e il carbonio utilizzato sotto forma di grafite.

I reattori veloci sono concettualmente più semplici rispetto ai reattori termici perché non serve il moderatore; nonostante questo i reattori termici sono i preferiti e anche i più semplici da realizzare praticamente. Questo è dovuto ad alcuni aspetti fondamentali: come prima cosa i reattori veloci richiedono una maggiore quantità di combustibile perché ci sarà una certa quantità di neutroni che scapperanno dal sistema (le probabilità di interazione per unità di lunghezza sono basse); inoltre i reattori di potenza devono essere muniti di un adeguato fluido che trasporti il calore prodotto in modo che poi possa essere utilizzato; nel caso delle centrali veloci tale fluido non può essere l'acqua (nemmeno l'acqua pesante) perché tale sostanza è, come abbiamo visto, un moderatore che invece non deve essere presente nel reattore veloce. I fluidi termovettori di regola utilizzati con i reattori veloci sono i metalli fusi (come ad esempio il sodio) che comportano però una tecnologia particolarmente complessa.

Torniamo ora alla reazione di fissione dell' ^{235}U :



e concentriamoci sui prodotti di fissione. Come si era già accennato nella lezione precedente, i prodotti di fissione vengono rappresentati tramite la curva di resa di fissione che rappresenta la probabilità che, a seguito della fissione, siano presenti elementi di una certa massa atomica. Avevamo dunque visto che tale curva è circa simmetrica e presenta due picchi pari a circa il 6%. Aggiungiamo ora che il numero complessivo di prodotti di fissione oscilla tra i 90 e i 190 circa; anche in questo caso alcuni nascono all'atto della fissione mentre altri (la stragrande maggioranza) si formano dopo alcuni decadimenti β^- (di solito 2 o 3 decadimenti). Le catene di decadimenti β^- vengono di solito rappresentate nel modo seguente:



Poiché ogni elemento stabile deriva da 2 o 3 decadimenti, il numero di nuclidi che interessano per sapere cosa succede dopo la fissione sale a circa 350. Tra tutti nuclidi che si formano, ci soffermiamo sul ^{137}Cs e sullo ^{90}Sr che hanno entrambi tempo di dimezzamento di circa 30 anni e che sono i due nuclidi che hanno la maggior probabilità di essere emessi dalla fissione (si trovano infatti in corrispondenza dei due picchi della curva di resa di fissione). Ciò significa che la probabilità associata a ciascuno di questi due nuclidi è del 6% e quindi la loro probabilità totale è del 12%. Sono due nuclidi molto importanti per quanto riguarda la loro radiotossicità potenziale. Giusto per fare qualche calcolo numerico, ricordando la centrale da 3000 MW descritta nell'esempio numerico della scorsa lezione che veniva fatta funzionare per un anno intero consumando 1,28 t di ^{235}U e utilizzando la probabilità di fissionare che, per l' ^{235}U , è pari a circa l'85%, possiamo facilmente ricavare il numero di atomi che sono andati incontro a fissione durante l'anno in cui la centrale è rimasta in esercizio; si avrà infatti:

$$N_f = \frac{N_{Av}}{A} m \cdot P_f = 2,79 \cdot 10^{27}$$

Supponiamo ora di trascurare il ^{137}Cs e lo ^{90}Sr che sono decaduti durante l'anno di funzionamento (essendo la loro vita media di circa 30 anni un singolo anno non ne diminuisce in maniera sensibile la quantità) e quindi supponiamo che, alla fine dell'anno, tutto il ^{137}Cs e lo ^{90}Sr che sono stati prodotti siano ancora presenti nel reattore. Sapendo che la loro probabilità di formazione complessiva è del 12%, il numero di atomi appartenenti a tali specie sarà pari al 12% del numero di atomi di ^{235}U che sono andati incontro a fissione; si avrà allora:

$$N_{Cs+Sr} = N_f \cdot 0,12 = 3,35 \cdot 10^{26}$$

Se ora ci viene fornito il dato relativo alla costante di decadimento di questo tipo di scorie, che è:

$$\lambda \approx 7,3 \cdot 10^{-10} s^{-1}$$

si ottiene l'attività, ovvero il numero di decadimenti al secondo (grandezza che si misura in Becquerel) che sarà:

$$I = \lambda N_{Cs+Sr} = 2,45 \cdot 10^{17} Bq$$

Utilizzando ora la relazione di conversione tra i Becquerel e i Curie

$$1Ci = 3,7 \cdot 10^{10} Bq$$

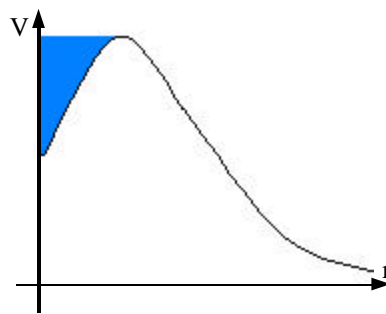
si ricava il seguente dato numerico:

$$I = 6.6 \text{ MCi/anno}$$

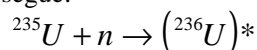
che rappresenta una dose impressionante di radiazione emessa.

I prodotti di fissione non sono, però, le sole scorie prodotte dal reattore. Se, infatti, l' ^{235}U ha una probabilità di fissione dell'85%, significa che, nel 15% dei casi non si ha una reazione di fissione ma si ha una reazione di cattura e quindi si produce ^{236}U . Questo nuclide è un emettitore α . Oltre all' ^{236}U si forma anche l' ^{237}U che ha una vita media molto breve e decade in ^{237}Np , anch'esso emettitore α e con una vita media di circa 2 milioni di anni. Tutti questi elementi a vita lunga e lunghissima (ne esistono molti di più di quelli qui citati) sono detti elementi transuranici e rappresentano il nocciolo del problema delle scorie radioattive (fanno infatti sicuramente passare in secondo piano i 30 anni di attività di ^{137}Cs e ^{90}Sr).

Giunti a questo punto della trattazione ci dobbiamo chiedere per quale motivo si usa come materiale fissile l' ^{235}U e non l' ^{238}U . Tale scelta sembrerebbe essere immotivata tenendo conto che, in natura, l'uranio è presente al 99,28% sotto forma di ^{238}U e solo allo 0,72% sotto forma di ^{235}U (in realtà sono presenti anche altri isotopi ma in percentuali praticamente trascurabili). Entrambi gli isotopi dell'uranio hanno una vita media di $10^8 \div 10^9$ anni, e presentano una piccolissima probabilità di fissione spontanea, corrispondente a tempi di dimezzamento di 10^{15} anni. La bassa probabilità di andare incontro a fissione spontanea si può comprendere pensando alla fissione come all'emissione dei due frammenti di fissione da parte del nucleo; tali frammenti possono essere inizialmente pensati intrappolati nella buca di potenziale che viene rappresentata colorata nel seguente grafico che mostra l'andamento del potenziale in funzione della distanza.



Come si può vedere a distanze rilevanti il contributo più importante è quello Coulombiano mentre avvicinandosi intervengono anche delle forze attrattive che danno al potenziale l'andamento visto in figura e che configura la buca di potenziale che nel grafico è stata colorata. Affinché dunque i due frammenti possano sfuggire dal nucleo (ovvero affinché il nucleo possa fissionare) è necessario che la loro energia superi il picco che rappresenta l'estremità della buca. E' allora ovvio che la fissione spontanea è molto poco probabile perché i due frammenti possono sfuggire dalla buca solo per effetto tunnel. La probabilità della fissione spontanea cresce, comunque, con il crescere del numero di massa. Indurre la fissione può dunque essere inteso come fornire al nucleo l'energia E che permette ai due frammenti di superare la barriera di potenziale. Questa energia E , come è stato detto precedentemente, viene somministrata al nucleo per mezzo dei neutroni. Soffermiamoci allora sullo stato intermedio del sistema nucleo + neutrone nel quale il neutrone è stato assorbito dal nucleo che però non si è ancora fissionato; questo stato intermedio si chiama stato di nucleo composto e viene graficamente indicato come segue:



L'energia che il neutrone cede al nucleo è data dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia di legame dell'ultimo neutrone legato, ovvero si ha:

$$E_C = E_{cin} + E_{UNL}$$

Vediamo dunque nella prima tabella della pagina seguente, per alcuni nuclidi, quanto è alta la buca di potenziale (h) e quanto vale l'energia fornita dal neutrone. Ovviamente, affinché la fissione abbia luogo è necessario che l'energia fornita dal neutrone sia maggiore dell'altezza della barriera, ovvero:

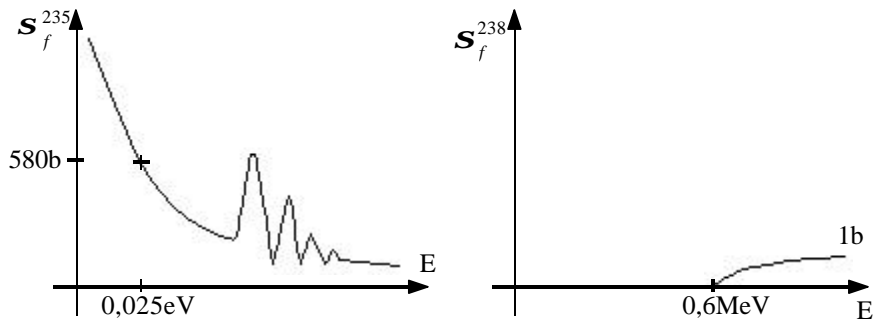
$$E_C > h$$

Dalla tabella appare dunque evidente che la sola cattura di un neutrone da parte dell' ^{235}U è sufficiente per indurre la fissione (indipendentemente dall'energia cinetica del neutrone); ciò non è invece vero per l' ^{238}U ; in questo caso, infatti, deve esserci anche una energia cinetica che apporti al sistema almeno altri 0,6 MeV. Questa differenza si esprime dicendo che l' ^{235}U è un fissile termico (ovvero basta un neutrone di qualunque energia, anche un neutrone termico per indurre la fissione) mentre l' ^{238}U è un fissile veloce, ossia un fissile a soglia.

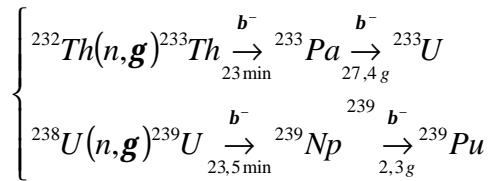
Nucleo di partenza	Nucleo composto	Altezza della barriera (h)	Energia dell'ultimo n
^{235}U	^{236}U	5,3 MeV	6,4 MeV
^{238}U	^{239}U	5,5 MeV	4,9 MeV
^{232}Th	^{233}Th	6,5 MeV	5,1 MeV
$^{233}\text{U}^*$	^{234}U	4,6 MeV	6,6 MeV
$^{239}\text{Pu}^*$	^{240}Pu	4 MeV	6,4 MeV

* Nucleo artificiale

L'andamento qualitativo delle sezioni d'urto per la fissione dell' ^{235}U e dell' ^{238}U è dunque quello rappresentato nei due grafici seguenti:

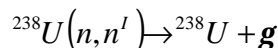


Un discorso analogo a quello fatto per l' ^{238}U può essere ripetuto anche nel caso del ^{232}Th . I nuclidi ^{233}U e ^{239}Pu sono invece degli elementi artificiali che vengono prodotti, rispettivamente, sfruttando le due seguenti reazioni:

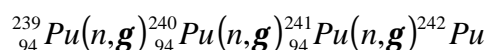


In queste reazioni un nucleo di materiale non fissile viene tramutato in un nucleo fissile. La reazione viene detta di conversione. In genere la produzione di ^{233}U tramite il ciclo del torio avviene in reattori sperimentali mentre la produzione del plutonio è molto comune, dato che di regola è presente una grossa quantità di ^{238}U . La conversione avviene in modo molto efficiente nei reattori veloci, per cui il fissile prodotto (ad es. ^{239}Pu) risulta essere addirittura maggiore del fissile consumato (^{235}U o ^{239}Pu).

Dobbiamo ora chiederci per quale motivo questi due isotopi dell'uranio hanno un comportamento così diverso. Per comprendere tale differenza dobbiamo fare riferimento ai nuclei composti. Nel caso dell' $(^{236}\text{U})^*$ osserviamo come sia N pari (essendo Z=92); quando l'ultimo neutrone legato è in numero pari il suo legame con il nucleo è molto forte e quindi quando viene assorbito dal nucleo cede ad esso molta energia. Nel caso dell' $(^{239}\text{U})^*$, invece, N risulta essere dispari e quindi l'ultimo neutrone legato (quello dispari appunto) non porta molta energia. Nei grossi reattori nucleari i due isotopi sono comunque presenti entrambi e, di solito, si ha una percentuale di circa il 3÷4% di ^{235}U mentre il resto è ^{238}U . Non è invece possibile costruire un reattore che funzioni solo con ^{238}U (oppure solo con ^{233}Th) perché in questi casi, oltre allo scattering elastico, diventa importante quello che succede a causa dello scattering anelastico rappresentato nel modo seguente:



Questa reazione tende a far abbassare l'energia dei neutroni sotto alla soglia oltre la quale è possibile la fissione. Vediamo dunque ora un esempio numerico per renderci conto delle grandezze in gioco. Nei reattori termici il combustibile è solitamente arricchito intorno al 3% e ciò significa che, in una tonnellata iniziale di combustibile ci sono 30 kg di ^{235}U e 970 kg di ^{238}U . Dopo un anno di servizio, nel reattore si troveranno circa 8 kg di ^{235}U , 950 kg di ^{238}U e si saranno formati circa 5 kg di ^{239}Pu . Bisogna osservare che anche il ^{239}Pu , che ha un tempo di dimezzamento di 24000 anni, non può essere fissionato tutto, poiché presenta una probabilità di fissione pari a circa l'75%; nel restante 25% dei casi dà origine alla seguente reazione: $^{239}\text{Pu}(n, \mathbf{g}) \rightarrow ^{240}\text{Pu}$. Per catture successive si ha:



Dobbiamo osservare che il ${}^{240}\text{Pu}$ ha una vita media di 6000 anni e fissiona male mentre il ${}^{241}\text{Pu}$ fissiona molto bene. I transuranici, dunque, presentano lo svantaggio di avere spesso vite medie assai lunghe, e quindi sono la parte più pericolosa delle scorie della fissione, però contribuiscono anch'essi, in parte, all'energia prodotta dal reattore. Uno dei primi valori numerici sul quale ci eravamo soffermati era la tonalità termica della reazione di fissione dell' ${}^{235}\text{U}$ per il quale avevamo trovato un valore numerico di circa 200 MeV. Ci chiediamo ora in che forma troviamo tale energia e quindi consideriamo la seguente tabella:

Forma dell'energia	E_i	$\sum_i E_i$
Frammenti di fissione	168 MeV	168 MeV
Decadimento dei frammenti: radiazione β	8 MeV	176 MeV
Decadimento dei frammenti: radiazione γ	7 MeV	183 MeV
Decadimento dei frammenti: neutrini	12 MeV	183 MeV*
γ pronti	7 MeV	190 MeV
Neutroni pronti	5 MeV**	195 MeV
γ di cattura	12 MeV***	207 MeV

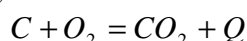
* I neutrini non interagiscono con la materia e scappano dal sistema; dunque la loro energia non può essere recuperata

** Ogni neutrone possiede un'energia pari a circa 2 MeV; siccome v vengono prodotti dalla reazione di fissione (per l' ${}^{235}\text{U}$ $v \sim 2,4$), l'energia dovuta ai neutroni pronti sarà di circa 5 MeV.

*** Se si vuole mantenere costante il tasso di fissione nel reattore è necessario che, per ogni fissione, si formi un neutrone che provoca una nuova fissione. Siccome nella fissione dell' ${}^{235}\text{U}$ si formano 2,4 neutroni, perché non ci sia un incremento delle fissioni, 1,4 neutroni non devono indurre fissione. Quando un neutrone non induce fissione viene catturato e rilascia energia sotto forma di radiazione γ detta, appunto, γ di cattura. Siccome ad ogni cattura con relativa emissione si producono circa 8 MeV si ha che la produzione totale di energia dovuta ai γ di cattura è di circa 12 MeV.

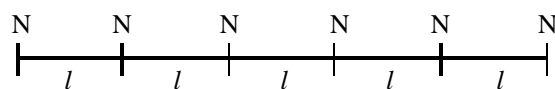
La lettura di questa tabella deve essere fatta ricordando che l'energia che si ricava dal decadimento dei frammenti non è istantanea (quando si è a regime tale energia deriva dal decadimento di prodotti di fissioni avvenute anche molto tempo prima), mentre l'energia dovuta ai neutroni e ai γ pronti è istantanea.

Come abbiamo più volte accennato, uno dei punti chiave della fissione come fonte di energia è il fatto di poter creare una reazione a catena; nel caso della fissione il vettore della reazione a catena sono i neutroni ma la reazione a catena non è una prerogativa della reazione di fissione, se consideriamo infatti una reazione di combustione, come:

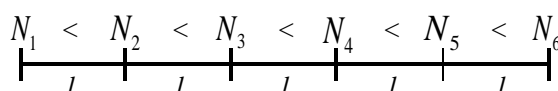


vediamo che anche in questo caso ci sarà una reazione a catena nella quale il vettore della reazione è la temperatura.

In presenza di una reazione a catena, lo scopo principale è quello di controllarla, ossia di mantenere una potenza costante (ovvero di avere un tasso costante di fissione nel reattore); è però ovvio che si deve essere anche in grado di gestire delle situazioni nelle quali il tasso di reazione sale o scende. Battezziamo dunque l la vita media dei neutroni (ovvero il periodo di tempo da quando i neutroni sono prodotti a quando vengono assorbiti dando, in alcuni casi, la fissione) e supponiamo che tale vita media sia costante durante la vita del reattore. La popolazione neutronica N sarà ovviamente in questo caso proporzionale al numero di fissioni che avvengono in ogni secondo. La situazione ideale di funzionamento del reattore può essere dunque schematizzata come segue:



Se, invece, c'è un leggero sbilanciamento a favore del processo di produzione rispetto al processo di perdita, la rappresentazione grafica del funzionamento del reattore diventa:



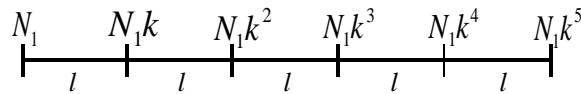
Definiamo ora un coefficiente di moltiplicazione che sia il rapporto tra la popolazione neutronica di una generazione e la popolazione neutronica della popolazione precedente. Nel secondo caso rappresentato si avrebbe dunque:

$$k = \frac{N_2}{N_1} = \frac{N_3}{N_2} = \dots > 1$$

Nel funzionamento dei reattori il fattore k deve essere tenuto sempre molto vicino ad 1 (nelle bombe, invece, lo scopo è quello di avere un k che sia molto maggiore di 1) e quindi viene di solito indicato nel modo seguente:

$$k = 1 + d \quad (1)$$

Il funzionamento del reattore può dunque a questo punto essere schematizzato come segue:



Si avrà dunque la seguente relazione temporale:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{Nd}{l}$$

Dalla relazione (1) si ricava poi:

$$d = k - 1$$

e quindi, combinando le ultime due relazioni scritte:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{k-1}{l} N$$

Questa equazione ha una soluzione esponenziale del tipo:

$$N = N_0 e^{\frac{k-1}{l} t}$$

Nel caso in cui $k=1$, N è costante e si parla di reattore critico; nel caso in cui $k>1$, N diverge esponenzialmente e si parla di reattore sovrcritico mentre, nel caso di $k<1$, N tende esponenzialmente a zero e il reattore è detto sottocritico. Se si vuole dunque mantenere costante la potenza del reattore si deve mantenere $k=1$; se, invece, si vuole aumentare o diminuire la potenza del reattore si deve incrementare o diminuire k (lentamente!). Viene così a configurarsi la presenza di un k di esercizio e di un k potenziale (che può arrivare anche ad 1,4) che non deve assolutamente essere liberato in maniera repentina.

Dobbiamo ora ricordare che, nel reattore, sono presenti i neutroni pronti e i neutroni ritardati. I neutroni pronti vengono creati al momento della fissione in frazione $1-\beta$ ed hanno una vita media pari ad l_{pr} ; i neutroni ritardati derivano dal decadimento β e quindi verranno prodotti (in frazione β) dopo un tempo T_b (pari a circa 12 secondi dal momento della fissione) e poi hanno, similmente ai neutroni pronti, una vita media pari a l_{pr} . E' dunque logico supporre che la vita media totale dei neutroni all'interno del reattore sia data dalla seguente relazione:

$$l = (1 - \beta)l_{pr} + \beta[T_b + l_{pr}] \quad \text{con } \beta = 6,5 \cdot 10^{-3}$$

da cui si ricava:

$$l = l_{pr} - \beta l_{pr} + \beta T_b + \beta l_{pr} = l_{pr} + \beta T_b$$

L'enorme differenza tra T_b ed l_{pr} (quest'ultimo dell'ordine di 1 ms, o molto meno, a seconda del tipo di reattore) fa sì che quest'ultimo tempo possa essere trascurato, si avrà così:

$$l \approx \beta T_b = (6,5 \cdot 10^{-3}) \cdot (12s) = 78ms$$

Vediamo allora un esempio numerico che esprime l'importanza dei neutroni ritardati: se avessimo un reattore con

$$k - 1 = 10^{-3}$$

e con un solo atomo che reagisce, il periodo di reattore (ovvero il lasso di tempo nel quale la potenza del reattore si alza di un fattore pari ad e) sarebbe, nel caso di assenza dei neutroni ritardati:

$$T_R = \frac{l}{k-1} t = \frac{10^{-3}}{10^{-3}} \cdot 1s = 1s$$

In presenza, invece, dei neutroni ritardati si avrebbe (utilizzando i valori numerici trovati in precedenza):

$$T_R = \frac{78 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} \cdot 1 = 78s$$

Notiamo dunque come la variazione nella potenza del reattore è molto elevata anche quando k si discosta da 1 di valori molto piccoli; numericamente si osserva come il valore usuale delle variazioni di k si aggiri intorno a qualche parte su centomila (pcm).

Soffermiamoci ora qualche istante sul termine β (che nel caso dell' ^{235}U si è visto essere pari allo 0,65%). Si può osservare che, salendo troppo con il k si arriva in una situazione nella quale, praticamente, non si usano i neutroni ritardati e questo rende il loro effetto frenante meno efficace. Lavorando in un reattore con ^{239}Pu si ha un coefficiente β pari allo 0,23% e quindi l'effetto frenante dei neutroni ritardati è ulteriormente diminuito. Bisogna infine precisare

che in un reattore reale sono sempre presenti diversi elementi e questo rende molto importante calcolare il giusto valore del coefficiente β che tenga conto dei giusti pesi.

Abbiamo così finito questa rapida carrellata sulla fissione. Prima di addentrarci nel cuore di questo corso dobbiamo però spendere alcune parole su tre concetti importanti come la sezione d'urto σ , il flusso di neutroni ϕ e il tasso di reazione R .

La sezione d'urto è un'area ed è solitamente misurata usando il barn che è così definito:

$$1b = 10^{-24} \text{ cm}^2$$

La sezione d'urto è la misura dell'area efficace per un certo processo ed il fatto che si misuri l'area efficace indica che la sezione d'urto dipende dall'energia. La sezione d'urto può essere paragonata all'area geometrica (ovvero alla sezione del nucleo visto come una sfera) solo nel caso dello scattering elastico (n,n). In generale, invece, la sezione d'urto differisce molto dalla sezione geometrica. Un caso eclatante è quello relativo alla sezione d'urto dello ^{135}Xe alla reazione di assorbimento con emissione γ (n, γ) per la quale si ha a 0.025 eV:

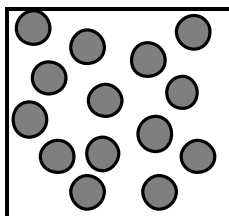
$$s_g = 2,8 \cdot 10^6 b$$

Nella seguente tabella vediamo rappresentate le principali reazioni possibili con la precisazione del fatto che possano essere a soglia oppure no:

Reazione	Soglia/libera
(n,f)	Soglia per l' ^{238}U e libera per l' ^{235}U
(n, γ)	Libera
(n,n)	Libera
(n,n')	Soglia
(n, α)	Soglia (in genere)
(n,p)	Soglia (in genere)
(n,2n)	Soglia

Tra tutte queste reazioni noi ci occuperemo, principalmente, delle prime quattro.

Per arrivare a definire il flusso di neutroni consideriamo ora una strisciolina di 1cm^2 di spessore infinitesimo dx (praticamente uno strato monoatomico) di una sostanza monoisotopica; supponiamo che questa strisciolina sia il bersaglio di un fascio di neutroni monocineticici che la colpiscono con incidenza normale. Supponiamo infine che possa avvenire una sola reazione (per esempio la cattura) e che σ sia la sezione d'urto associata a tale reazione. La strisciolina in questione, vista dalla direzione di arrivo dei neutroni avrà le seguenti sembianze:



dove le palline scure (ovviamente sovradimensionate) rappresentano le sezioni dei nuclei. Battezziamo ora area opaca $N\sigma$ quella parte della superficie che coincide con le zone scure dei nuclei. Supponiamo poi di conoscere la quantità n di neutroni contenuti in ogni cm^3 e battezziamo densità neutronica questa grandezza. Il flusso di neutroni (misurato in $\text{neutroni}/\text{cm}^2\text{s}$) viene dunque definito come segue:

$$f = nv \tag{2}$$

dove v è ovviamente la velocità dei neutroni. Il flusso non è altro che un indice della potenza del bombardamento. Risulta inoltre ovvio che, dopo il passaggio del flusso attraverso il bersaglio, il flusso stesso risulti diminuito; per esprimere questo possiamo introdurre il termine N_0 che rappresenta il numero di nuclei per unità di volume del bersaglio; il numero totale di nuclei contenuti nel bersaglio è ovviamente dato, allora, dalla seguente relazione:

$$N = N_0 V$$

dove V è il volume del bersaglio. A causa della geometria scelta per il nostro discorso, quest'ultima relazione può essere riscritta nel modo seguente:

$$N = N_0 S dx$$

dove S sia la superficie. Introduciamo dunque la seguente relazione:

$$-\frac{df}{f} = \frac{Ns}{S}$$

dove al secondo membro vediamo il rapporto tra l'area opaca e l'area complessiva ovvero il rapporto tra l'area occupata dalle sezioni dei nuclei e l'area totale del bersaglio. Combinando le ultime due relazioni scritte si ricava:

$$-\frac{df}{f} = \frac{N_0 S dx}{S} = N_0 s dx$$

Quest'ultima espressione non è allora altro che un'equazione differenziale che porta, integrata con il metodo della separazione delle variabili, al seguente risultato:

$$f = f_0 e^{-N_0 s x}$$

Questa relazione esprime cosa succede al flusso mentre questo viaggia all'interno del materiale. Definiamo ora la sezione d'urto macroscopica (misurata in cm^{-1}) nel modo seguente:

$$\Sigma = N_0 s$$

Combinando allora le ultime due relazioni scritte si ottiene:

$$f = f_0 e^{-\Sigma x} \quad (3)$$

Ovviamente tutto questo discorso beneficia di una significativa serie di semplificazioni perché la sezione d'urto σ dipende anche dall'energia, l'incidenza può non essere normale, la sostanza del bersaglio può non essere monoisotopica etc.. In effetti, nonostante tutte queste pesanti semplificazioni, la relazione alla quale si è pervenuti può essere considerata valida.

Osserviamo ora che la relazione (3) che esprime il comportamento del flusso nello spazio è formalmente identica alla relazione che esprime il decadimento radioattivo:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

Sottolineiamo questo parallelismo con l'ausilio della seguente tabella:

Comportamento temporale	$N = N_0 e^{-\lambda t}$	Vita media: $\frac{1}{\lambda}$	Numero di decadimenti al secondo: λN *	Probabilità di decadimento per unità di tempo: λ
Comportamento spaziale	$f = f_0 e^{-\Sigma x}$	Libero cammino medio: $\frac{1}{\Sigma}$	Numero di reazioni al secondo: $f \Sigma V$ **	Probabilità di reazione per unità di percorso: Σ ***

* N è ovviamente il numero di nuclei.

** N è in questo caso il numero di neutroni.

*** Un parallelismo ancora più stretto si può ottenere osservando che, anche nel caso del comportamento spaziale, si può trovare una probabilità di reazione per unità di tempo che sarà:

$$\Sigma v$$

Ora che abbiamo sottolineato tale parallelismo, possiamo definire come segue il tasso di reazione:

$$R = N \Sigma v$$

Siccome però, nota la densità e il volume, il numero complessivo di neutroni può essere espresso nel modo seguente:

$$N = nV$$

il tasso di reazione può anche indicarsi nel modo seguente

$$R = nV \Sigma v$$

Se ricordiamo poi la definizione di flusso neutronico data dalla relazione (2) possiamo riscrivere quest'ultima relazione nel modo seguente:

$$R = V \Sigma f$$

Il tasso di reazione per unità di volume sarà dunque il seguente:

$$r = \Sigma f$$

Spesso per indicare il tasso di reazione si usa il simbolo R.R. (Reaction Rate). Dal contesto in cui appare si capisce se è inteso per unità di volume o integrato sul volume.

Tasso di reazione. Flusso neutronico. Sezione d'urto. I reattori omogenei. Neutroni veloci e neutroni termici.

In conclusione della scorsa lezione avevamo definito il concetto di tasso di reazione, che era stato espresso nel modo seguente:

$$R = \Sigma V \mathbf{f} \quad (1)$$

Esprimendo la sezione d'urto macroscopica attraverso la sua definizione si ottiene la seguente forma della precedente relazione:

$$R = N_o s V \mathbf{f} \quad (2)$$

ovvero:

$$R = N s \mathbf{f} \quad (3)$$

dove N è il numero complessivo di atomi, ricavabile anche dalla relazione

$$N = \frac{N_{Av}}{A} m$$

E' dunque possibile esprimere il tasso di reazione attraverso le relazioni (1), (2) o (3) a seconda dei dati dei quali si è in possesso. Dividendo la relazione (1) rispetto al volume si otteneva il tasso di reazione per unità di volume che, ovviamente, era dato dalla seguente relazione:

$$r = \Sigma \mathbf{f}$$

Rivediamo ora brevemente il percorso che ci ha portato alle definizioni di flusso di neutroni, sezione d'urto e tasso di reazione e, in particolare, soffermiamoci sulle pesanti semplificazioni che avevamo posto.

Come prima cosa si era all'epoca supposto che i nuclei avessero forma sferica con raggio pari ad R; il calcolo della sezione d'urto geometrica portava allora al seguente risultato:

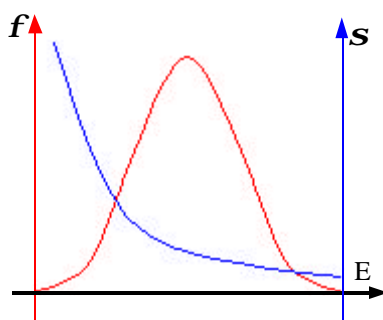
$$s = pR^2$$

Facendo cadere tale semplificazione dovremmo tener conto del fatto che i nuclei, nella realtà, sono degli ellissoidi; possiamo però subito osservare che, essendo tali ellissoidi orientati in maniera casuale, la semplificazione fatta è più che accettabile e non modifica in maniera sostanziale le cose.

Per come avevamo semplificato la situazione, inoltre, diveniva assolutamente irrilevante il fatto che i neutroni giungessero in una direzione piuttosto che in un'altra: cadeva dunque la rilevanza dell'angolo di incidenza.

Il fatto di aver poi imposto che lo spessore del target fosse infinitesimo, permetteva di non considerare il problema legato al fatto che, con uno spessore non infinitesimo, si va incontro all'interno del target ad una depressione del flusso. Sarebbe stato dunque necessario introdurre il concetto di flusso efficace da utilizzare invece del flusso illuminante così come noi avevamo fatto.

Infine si era imposto che i neutroni fossero monocineticici mentre sappiamo che sicuramente si è in presenza di una distribuzione Maxwelliana e questo è molto importante perché, come si sa, la sezione d'urto dipende in maniera pesante dall'energia (come si può comprendere dal seguente grafico comparativo nel quale vediamo la distribuzione in energia dei neutroni del flusso e l'andamento della sezione d'urto in funzione dell'energia).



Siccome, dunque, i neutroni si presentano con una distribuzione energetica Maxwelliana, e siccome abbiamo in precedenza detto che i neutroni che ci interessano hanno un'energia massima di circa 15 MeV, possiamo affermare che, annullando la semplificazione di monocineticità, il flusso di neutroni si possa esprimere nella seguente forma:

$$\mathbf{f} = \int_0^{15MeV} \mathbf{f}(E) dE$$

Sarà poi nostro compito determinare quale effettivamente sia la distribuzione sull'energia del flusso. In queste nuove ipotesi, la relazione (2) può essere riscritta nel modo seguente:

$$VN_0 \mathbf{s}f = VN_0 \int_0^{15MeV} \mathbf{s}(E)f(E)dE \quad (4)$$

Nell'ultima relazione scritta la sezione d'urto σ viene ovviamente fornita dalla fisica nucleare mentre la distribuzione del flusso dobbiamo ricavarla noi. Utilizzando dunque quest'ultima relazione invece della (1) cade la necessità di imporre la condizione di monocineticità dei neutroni.

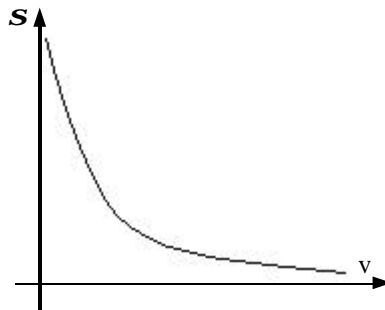
Siccome abbiamo ora supposto che i neutroni siano distribuiti in energia tramite una distribuzione Maxwelliana, possiamo introdurre un valor medio per la sezione d'urto che sarà così definito:

$$\bar{\mathbf{s}} = \frac{\int \mathbf{s}(E)f(E)dE}{\int f(E)dE} \quad (5)$$

dalla quale si può ricavare la seguente espressione:

$$\int \mathbf{s}(E)f(E)dE = \bar{\mathbf{s}}f$$

Gli integrali che appaiono nella relazione (5) possono non essere di facile risoluzione; possiamo però fare la seguente osservazione: se ci mettiamo nel caso di alcune reazioni come le reazioni (n, γ) ed (n,f) possiamo osservare come, in molti casi, si abbia il seguente andamento della sezione d'urto in funzione della velocità dei neutroni:



Questo andamento si traduce nel fatto che risulta possibile scrivere la seguente relazione:

$$\mathbf{s}(v)v = \mathbf{s}_0 v_0$$

dalla quale si ricava, ovviamente:

$$\mathbf{s}(v) = \frac{\mathbf{s}_0 v_0}{v}$$

La velocità di riferimento che viene più spesso considerata è la velocità più probabile in una distribuzione di neutroni termici (ovvero ad una temperatura di circa 293 K) che è la seguente:

$$v_0 = 2,2 \cdot 10^5 \text{ cm/s}$$

alla quale è associata la seguente energia:

$$E_0 = 0,0253eV$$

Il tasso di reazione espresso in modo da considerare anche la distribuzione di energia relativa ai neutroni sarà dunque il seguente:

$$R = N \int \mathbf{s}(E)f(E)dE$$

che, rappresentata in funzione della velocità dei neutroni diventa:

$$R = N \int \mathbf{s}(v)n(v)vdv \quad (6)$$

Nella prima forma vediamo allora apparire un flusso differenziale $\phi(E)$ mentre nella seconda forma appare una densità differenziale $n(v)$. Le dimensioni di queste due grandezze sono le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} [f] = \frac{\text{neutroni}}{\text{cm}^2 \text{s}(\text{energia})} \\ [n] = \frac{\text{neutroni}}{\text{cm}^3(\text{velocità})} \end{array} \right.$$

Qualora la sezione d'urto abbia un andamento $1/v$, la relazione (6) può essere riscritta nel modo seguente:

$$R = N \mathbf{s}_0 v_0 \int n(v)dv$$

L'integrale presente a secondo membro dell'ultima relazione scritta prende allora il nome di densità totale e quindi, indicando tale densità totale con il simbolo n , si può scrivere:

$$R = N \mathbf{S}_0 v_0 n$$

Volendo far ricomparire esplicitamente il flusso nell'ultima relazione scritta possiamo considerare la seguente relazione:

$$n v_0 = \mathbf{f}_0$$

Combinando allora le ultime due relazioni scritte si otterrà:

$$R = N \mathbf{S}_0 \mathbf{f}_0$$

Se siamo in presenza di risonanze, l'andamento effettivo della sezione d'urto in funzione della velocità è più complesso, qualitativamente si avrà:



Dobbiamo ora ricordarci di aver fatto una ulteriore semplificazione per definire i concetti di sezione d'urto, flusso neutronico e tasso di reazione: avevamo infatti imposto che ci fosse una sola reazione possibile. Nella realtà, ovviamente, le reazioni possibili sono molte; alcune di queste sono, come già abbiamo accennato: (n,γ) , (n,f) , (n,n) , (n,n') , etc... Quando, dunque, parliamo di sezione d'urto complessiva, dobbiamo tener presente di tutte le reazioni che possono avvenire; nel caso potessero avvenire le quattro reazioni che abbiamo citato, dunque, la sezione d'urto complessiva sarebbe la seguente:

$$\mathbf{S}_{ng} + \mathbf{S}_{nf} + \mathbf{S}_{nn} + \mathbf{S}_{nn'} = \mathbf{S}$$

A seconda del tipo di sezione d'urto che utilizzo, quindi, posso sapere quante reazioni avvengono complessivamente oppure quante reazioni di un certo tipo. Un discorso del tutto analogo va ovviamente fatto anche per le sezioni d'urto macroscopiche; si avrà quindi:

$$\Sigma_{ng} + \Sigma_{nf} + \Sigma_{nn} + \Sigma_{nn'} = \Sigma$$

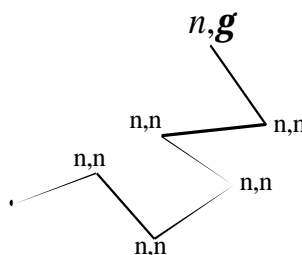
Conoscendo le sezioni d'urto macroscopiche si possono ovviamente ricavare i liberi cammini medi associati alle varie reazioni tramite il noto legame che le lega; si avrà quindi:

$$l_i = \frac{1}{\Sigma_i}$$

Il libero cammino medio complessivo (ovvero quello che tiene conto di tutti i possibili fenomeni) sarà dunque il seguente:

$$\left(\frac{1}{l}\right)_{Tot} = \sum_i \frac{1}{l_i}$$

L'ultima relazione giustifica appieno il fatto che, essendoci una pluralità di reazioni possibili, il libero cammino totale sarà per forza minore rispetto al libero cammino medio associato ad ogni singola tipologia di evento. Prendiamo, per esempio, il caso in cui siano possibili solo due tipologie di evento e che tali due tipologie siano (n,n) ed (n,γ) . Una rappresentazione grafica della vita di un singolo neutrone sarà allora la seguente:



In questa rappresentazione il libero cammino medio è dato dal valor medio dei singoli trattini, mentre il libero cammino medio legato all'assorbimento γ è dato dal valor medio della somma di tutti i trattini. Per studiare queste situazioni esiste un metodo detto metodo Montecarlo del quale torneremo ad occuparci nel seguito.

Ricordiamo ora un'ulteriore semplificazione che era stata posta: quella riguardante il fatto che l'elemento costituente il target doveva essere monoisotopico. Nella realtà, come ben sappiamo, si è quasi sempre in presenza di materiali che presentano più isotopi. Soffermiamoci dunque sulla reazione (n,γ) e supponiamo di avere un bersaglio composto da ^{235}U e da ^{238}U . Ovviamente ognuno dei due isotopi contribuirà alla sezione d'urto complessiva con una propria sezione d'urto e si avrà quindi una sezione d'urto \mathbf{s}_{ng}^{235} e una sezione d'urto \mathbf{s}_{ng}^{238} . Per poter usare in maniera corretta tali sezioni d'urto dobbiamo anche conoscere l'arricchimento del materiale, ovvero dobbiamo conoscere le frazioni molari f_{235} ed f_{238} grazie alle quali, conoscendo il numero complessivo N di nuclei, potrei ricavare nel modo seguente il numero di nuclei di ogni isotopo:

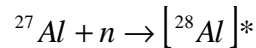
$$\begin{cases} N_{235} = Nf_{235} \\ N_{238} = Nf_{238} \end{cases}$$

La sezione d'urto macroscopica totale si potrà allora ricavare tramite la seguente relazione:

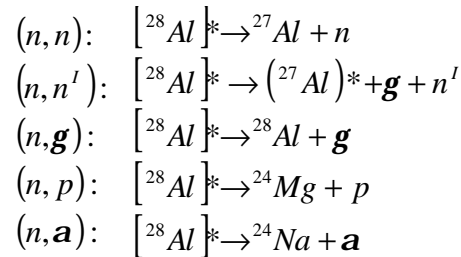
$$\Sigma_{ng} = \mathbf{s}_{ng}^{235} N_{235} + \mathbf{s}_{ng}^{238} N_{238} = \Sigma_{ng}^{235} f_{235} + \Sigma_{ng}^{238} f_{238}$$

Vediamo ora un caso concreto nel quale si deve gestire una situazione in cui siano possibili diversi eventi.

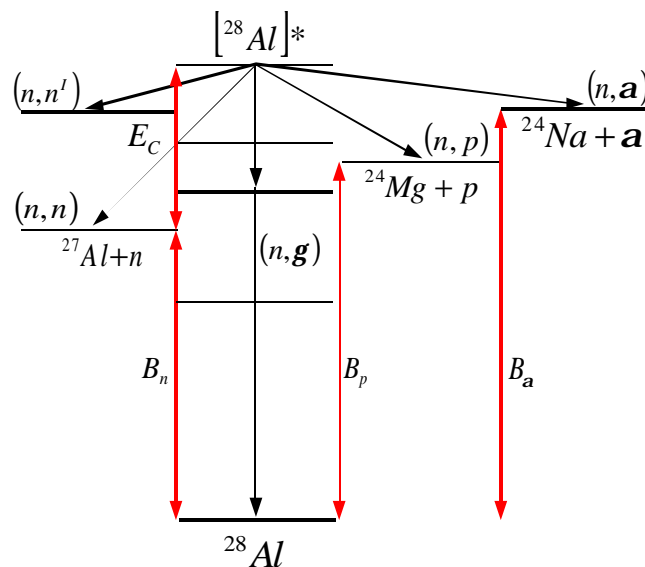
Consideriamo l'elemento monoisotopico ^{27}Al e facciamo interagire con un neutrone in modo da ottenere un nucleo eccitato; avremo la seguente reazione:



Vediamo come questo nucleo composto in stato eccitato possa decadere. Le reazioni possibili alle quali si può assistere sono diverse: (n,n) , (n,γ) , (n,n') , (n,p) ed (n,α) . Di questi, gli ultimi tre sono degli eventi a soglia (possono dunque avvenire solo se i neutroni hanno un'energia cinetica che supera una certa soglia). A livello di notazione vediamo ora come esprimere tali reazioni:



Nel grafico seguente, che riassume dal punto di vista energetico lo spettro di possibili reazioni alle quali va incontro il nucleo eccitato, comprendiamo anche per quale motivo alcune delle reazioni sono a soglia mentre altre no.



I valori numerici sono i seguenti:

$$\begin{cases} B_n = 7,72 \text{ MeV} \\ B_p = 9,55 \text{ MeV} \\ B_a = 10,86 \text{ MeV} \end{cases}$$

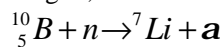
L'energia dell'ultimo neutrone legato (B_n) raggiunge da sola la quota necessaria allo scattering elastico e dunque (n,n) è un fenomeno senza soglia. Senza soglia è anche, come si vede, l'assorbimento γ perché ci sono dei livelli energetici inferiori rispetto all'energia B_n . Le altre tre reazioni possibili hanno tutte dei salti energetici superiori a B_n e quindi sono possibili solo se i neutroni hanno abbastanza energia cinetica E_C per andare oltre tali livelli. Avendo i valori numerici possiamo ricavare le soglie. Nel caso delle reazioni (n,p) la soglia sarà:

$$\Delta_p = B_p - B_n = 1,87 \text{ MeV}$$

mentre nel caso della reazione (n, α) si avrà:

$$\Delta_a = B_a - B_n = 3,14 \text{ MeV}$$

Le reazioni α sono solitamente a soglia ma questa non è una regola ferrea; possiamo infatti facilmente trovare anche delle situazioni nelle quali la reazione α non sia a soglia, come nel caso che segue:



Osserviamo ora che a volte non vengono date le percentuali di atomi di un certo isotopo che si hanno in un elemento ma le loro percentuali in massa. Vediamo, nel caso del Boro, come si può passare dall'una informazione all'altra. Consideriamo dunque la seguente tabella:

Isotopo	f_i (% in atomi)	p_i (% in massa)
${}^{10}\text{B}$	0,2 (20%)	?
${}^{11}\text{B}$	0,8 (80%)	?

Per passare dalla percentuale in atomi alla percentuale in peso si deve tener conto delle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \sum_i f_i = 1 = \sum_i p_i \\ N = \frac{N_{Av}}{A} m \end{cases}$$

Possiamo dunque dire che un singolo grammo di un elemento di peso atomico medio A contiene un numero di atomi dato dalla relazione:

$$N = \frac{N_{Av}}{A}$$

da cui si ricava che il numero di atomi di un particolare isotopo sarà dato dalla seguente relazione:

$$N_i = \frac{N_{Av}}{A} f_i = \frac{N_{Av}}{A_i} p_i$$

dalla quale dunque si ricava:

$$p_i = f_i \frac{A_i}{A} \quad (7)$$

Tenendo ora conto che si deve avere:

$$\sum_i p_i = 1$$

si potrà scrivere:

$$\frac{\sum_i A_i f_i}{A} = 1$$

Grazie a questa relazione si ricava l'espressione con la quale calcolare A :

$$A = \sum_i A_i f_i$$

Nel caso del Boro, dunque, rifacendosi ai valori forniti nella precedente tabella, si può ricavare come segue il peso atomico:

$$A = 11 \cdot (0,8) + 10 \cdot (0,2) = 10,8$$

A questo punto ho tutto quello che mi serve e posso applicare la relazione (7) e completare la tabella, che viene riportata nella pagina seguente. Possiamo dunque notare come la descrizione basata sulla percentuale in atomi possa presentare delle differenze abbastanza evidenti rispetto alla descrizione basata sulla percentuale in massa. Il caso del Boro presenta tali differenze rilevanti anche perché, in percentuale, la differenza di massa tra i due isotopi non è piccola; invece nel caso dell'Uranio la differenza in percentuale tra la massa dell' ^{235}U e la massa dell' ^{238}U è molto piccola, inoltre la percentuale di ^{235}U è in natura molto bassa e quindi la frazione in numero di atomi e la frazione in massa sono poco differenti.

Isotopo	f_i (% in atomi)	p_i (% in massa)
^{10}B	0,2 (20%)	0.185
^{11}B	0,8 (80%)	0.815

Concludiamo questa parte iniziale del corso dedicata alla revisione della fisica nucleare osservando che la sezione d'urto di fissione dell' ^{238}U presenta valori diversi di zero anche al di sotto dell'energia di soglia a causa di fluttuazioni di tipo quantistico.

Iniziamo ora ad occuparci effettivamente del vero argomento del corso: andremo dunque da ora in poi a studiare cosa succede al flusso di neutroni nel ciclo delle reazioni che avvengono all'interno del reattore. Innanzitutto dobbiamo vedere con quali neutroni abbiamo a che fare: nel reattore incontreremo neutroni nati dalla fissione che hanno un'energia media di circa 2 MeV. Tali neutroni interagiranno, come vedremo, con il combustibile (composto da ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu , ^{240}Pu , ...) e con il moderatore (solitamente sarà H_2O , D_2O oppure carbonio sotto forma di grafite) che funge anche, molto spesso, da fluido termovettore.

Una prima domanda che possiamo porci riguarda dunque il modo con il quale il combustibile e il moderatore sono miscelati. Questo quesito ci permette di suddividere i reattori in due gradi categorie:

- 1) i reattori omogenei, nei quali il combustibile e il moderatore sono miscelati in maniera continua (solitamente i reattori di questo tipo hanno scarsa potenza);
- 2) i reattori eterogenei, nei quali il combustibile e il moderatore non sono miscelati; il combustibile è contenuto in barre la cui struttura è rappresentata in figura (1) e, a loro volta, le barre sono disposte all'interno del moderatore con una distribuzione spaziale rappresentata in pianta nella figura (2)

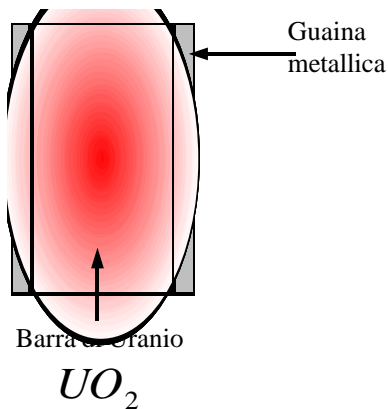


Figura (1)

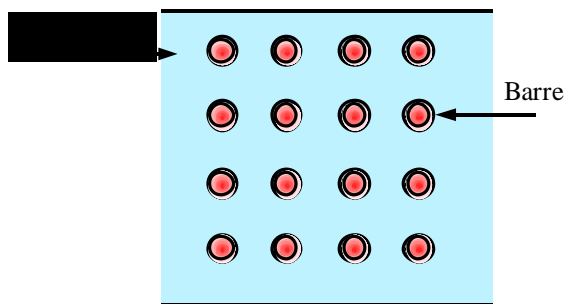
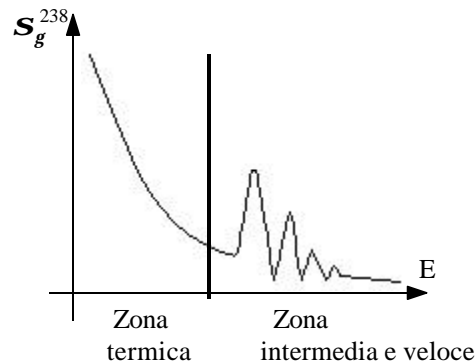


Figura (2)

Tutti i reattori di potenza sono del tipo eterogeneo. Tale scelta è dovuta al fatto che, in questo tipo di reattore, i prodotti di fissione e gli elementi transuranici rimangono contenuti all'interno della guaina e quindi il volume contaminato è inferiore e isolato. Inoltre la geometria rappresentata in figura (2) permette di estrarre dal combustibile un flusso di calore molto più elevato rispetto al caso del reattore omogeneo (l'asportazione del calore viene realizzata tramite il fluido termovettore che si muove lungo una direzione parallela all'asse delle barre di combustibile). La geometria eterogenea prevede inoltre dei vantaggi dal punto di vista del bilancio neutronico.

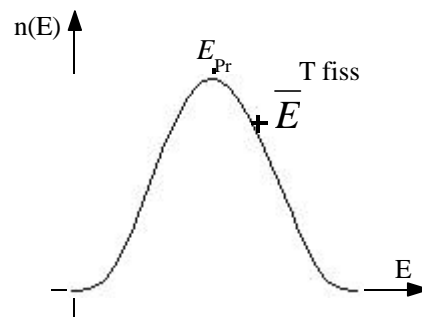
Malgrado questi aspetti che rendono il reattore eterogeneo preferibile rispetto al reattore omogeneo, quest'ultimo tipo di reattore è nettamente più semplice e quindi, inizialmente, ci occuperemo proprio di questo. Vediamo dunque che cosa può succedere ai neutroni. Questi partono, come abbiamo precedentemente accennato, con una energia di circa 2 MeV e si chiamano, in questa prima fase, neutroni veloci; le reazioni più probabili alle quali vanno incontro sono lo scattering elastico (n,n) e anelastico (n,n') che provoca un loro rallentamento, e la fissione veloce sull' ^{238}U . Siccome, inoltre, il

reattore occupa, per forza di cose, un volume finito, i neutroni possono fuggire (e si parla dunque di fughe veloci). Una volta esaurito il rallentamento i neutroni prendono il nome di neutroni termici e presentano una distribuzione di energia Maxwelliana; da questo punto in avanti l'energia dei neutroni viene considerata costante. Anche in questa fase alcuni neutroni vengono persi a causa delle fughe (che si chiamano in questo caso fughe termiche) mentre tutti gli altri vengono catturati o dal combustibile o dal moderatore. Nella prima immagine della pagina seguente vediamo la sezione d'urto di cattura dei neutroni da parte dell' ^{238}U . È importante sottolineare che, tutte le volte che l' ^{238}U cattura un neutrone senza fissionare, si immette in una strada che lo porterà, prima o poi, a trasformarsi in ^{239}Pu (che è un buon fissile) e quindi una perdita immediata nel flusso di neutroni si trasforma, a lungo termine, in un guadagno. Alcuni dei neutroni che vengono catturati dal combustibile, invece, originano la fissione e quindi originano nuovi neutroni da 2 MeV; il ciclo quindi ricomincia. Tutto quello che può accadere ai neutroni durante la loro storia, espresso come bilancio complessivo, viene sintetizzato in un parametro K.



Il nostro scopo è quello di trovare una rappresentazione matematica semplice di tutta la vita dei neutroni; per quanto riguarda il periodo termico della vita dei neutroni useremo la fisica di Maxwell-Boltzmann mentre, per quanto riguarda la fase di rallentamento, potremo usare, tenendo conto delle perturbazioni che si avranno dovute alla cattura, la teoria della diffusione.

Prima di tutto ci occuperemo dei neutroni termici, ovvero ci occupiamo di vedere che cosa succede quando il rallentamento dei neutroni è finito. Ci occupiamo prima di questa fase della vita dei neutroni per due motivi sostanziali: in primo luogo osserviamo che il rallentamento dei neutroni è un fenomeno abbastanza veloce e quindi la maggior parte della vita dei neutroni è di tipo termico; in secondo luogo, la maggior parte delle fissioni vengono prodotte da neutroni termici e quindi questi sono, senza dubbio, i più importanti agli scopi della produzione energetica. Come si era già accennato, una volta concluso il rallentamento, i neutroni presentano una distribuzione Maxwelliana di energia che può essere rappresentata nel modo seguente, essendo fissata la temperatura della Maxwelliana:



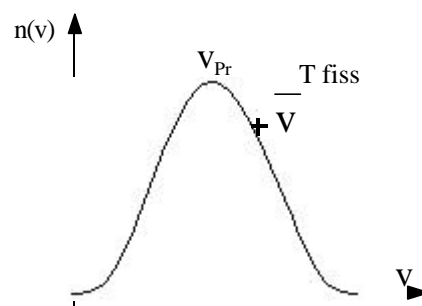
Siccome stiamo parlando di energie molto basse, possiamo trattare questa situazione sfruttando la meccanica classica e quindi possiamo usare la relazione:

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

Questo significa che possiamo passare molto semplicemente dalla distribuzione in energia alla distribuzione in velocità; si avrà allora:

$$n(E)dE = n(v)dv$$

e quindi, graficamente



Supponendo di conoscere le varie sezioni d'urto in funzione dell'energia $\sigma(E)$ (si tenga conto che spesso vale la semplice regola dell' $1/v$), possiamo ricavare i tassi di reazione in zona termica.

Richiami sulle distribuzioni di probabilità. Approccio statistico allo studio dei neutroni termici. Teoria della diffusione.

In conclusione della scorsa lezione abbiamo ricordato il fatto che, alla fine del rallentamento, i neutroni termici presentano, a temperatura assoluta T fissata, una distribuzione Maxwelliana di energie e di velocità, vediamo dunque quali siano i mezzi matematici che ci servono per gestire tale distribuzione. Ricordiamo quindi, prima di tutto, il valore numerico della costante di Boltzman:

$$K = 8,617 \cdot 10^{-5} \frac{eV}{K}$$

La distribuzione delle velocità in una Maxwelliana è invece data dalla seguente relazione:

$$p(v)dv = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2KT}} dv \quad (1)$$

Naturalmente tale distribuzione di probabilità deve essere normalizzata ad 1, ovvero si avrà:

$$\int_0^{\infty} p(v)dv = 1$$

Sfruttando la relazione (1) ricaviamo che, fissata una temperatura T, la corrispettiva velocità più probabile sarà data dalla seguente relazione:

$$v_T = \sqrt{\frac{2KT}{m}}$$

L'energia corrispondente a tale velocità (che non è, però, l'energia più probabile) è invece:

$$E_T = KT$$

Alla temperatura ambiente i valori numerici in gioco sono i seguenti:

$$\begin{cases} T_0 = 293,16K \\ v(T_0) = v_0 = 2,2 \cdot 10^5 \frac{cm}{s} \\ E_0 = KT_0 = 0,0253eV \end{cases}$$

Noti i valori numerici alla temperatura ambiente, si può ricavare la velocità e l'energia corrispondenti ad una temperatura differente sfruttando le seguenti due relazioni:

$$\begin{cases} v_T = v_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}} \\ E_T = E_0 \frac{T}{T_0} \end{cases}$$

Inserendo l'espressione di v_T in funzione di KT nella relazione (1) si ottiene:

$$p(v)dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{v}{v_T}\right)^2} \left(\frac{v}{v_T}\right)^2 \frac{dv}{v_T} \quad (2)$$

Ricordiamo ora la definizione della funzione Gamma:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Per n intero, è:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Alcuni valori utili sono i seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\mathbf{p}} \\ \Gamma(1) = 1 \\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\mathbf{p}}}{2} \\ \Gamma(2) = 1 \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\mathbf{p}} \end{array} \right.$$

Per mezzo della relazione (1) o della relazione (2) è immediato calcolare i valori medi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle v \rangle = \int v p(v) dv = \frac{2}{\sqrt{\mathbf{p}}} v_T = 1,1284 \cdot v_T \\ \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} v_T^2 \\ \langle E \rangle = \frac{3}{2} KT \end{array} \right.$$

Notiamo dunque come $\langle v \rangle$ sia maggiore di circa il 13% rispetto a v_T . Le distribuzioni (1) e (2) possono anche essere espresse in termini di energia, ponendo:

$$p(E)dE = p(v)dv$$

con

$$dE = mv dv$$

Si ritrova, evidentemente, che:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} KT$$

mentre l'energia più probabile sarà:

$$\frac{KT}{2} = \frac{E_T}{2}$$

Passando ora ai flussi ed ai tassi di reazione termici, si avrà che il flusso differenziale, in termini di velocità, si scriverà come segue:

$$f(v)dv = n(v)v dv = n v p(v) dv$$

mentre il flusso termico totale sarà:

$$f = n \int_0^{\infty} v p(v) dv = n \langle v \rangle = n v_T \frac{2}{\sqrt{\mathbf{p}}}$$

In termini di energia, essendo:

$$f(E)dE = f(v)dv$$

con

$$dE = mv dv$$

si ha:

$$f(E) = \frac{f(v)}{mv} = \frac{n p(v)}{m} \div e^{-E/KT} \frac{E}{KT}$$

Dovendo inoltre essere:

$$\int_0^{\infty} f(E)dE = f$$

scriveremo:

$$f(E)dE = f e^{-E/KT} \frac{E}{KT} \frac{dE}{KT}$$

Si osservi allora che $\phi(E)$ è massimo quando E è pari a KT .

Il tasso di reazione per atomo, ovvero ponendo ($N=1$), sarà:

$$r = n \int_0^{\infty} \mathbf{s}(v) v p(v) dv$$

se la sezione d'urto è proporzionale all'inverso della velocità si avrà:

$$r = n \mathbf{s}_0 v_0$$

indipendentemente dalla distribuzione delle velocità; quindi questo risultato è valido anche se la $p(v)$ non è Maxwelliana. Possiamo infine definire una $\langle \sigma \rangle$ ponendo:

$$r = \langle \mathbf{s} \rangle \mathbf{f} = \langle \mathbf{s} \rangle n \langle v \rangle$$

dalla quale si ricava:

$$\langle \mathbf{s} \rangle = \frac{r}{n \langle v \rangle}$$

Se la sezione d'urto è proporzionale all'inverso della velocità, si avrà:

$$\langle \mathbf{s} \rangle = \frac{\mathbf{s}_0 v_0}{\langle v \rangle} = \mathbf{s}(\langle v \rangle)$$

Torniamo ora ai neutroni termici e vediamo alcuni risultati numerici legati all'utilizzo di diversi moderatori. Mettiamoci dunque nel caso in cui il moderatore sia l'acqua. Siccome ci stiamo concentrando sulla zona termica dei neutroni, abbiamo che la loro energia può essere considerata costante e quindi potremo considerare costante anche tutte le sezioni d'urto. In una situazione semplificata nella quale pensiamo a dei neutroni immersi in un moderatore puro ed infinito avremo che le uniche due reazioni possibili sono l'assorbimento (n, γ) e lo scattering elastico (n, n); il fatto che il moderatore sia infinito ci impone di non considerare le fughe.

- Concentriamoci, per iniziare, sull'assorbimento. Innanzitutto osserviamo che, essendo l'acqua composta da ossigeno ed idrogeno, abbiamo bisogno, per una descrizione più accurata, della sezione d'urto di assorbimento relativa ad entrambe le sostanze:

$$\begin{cases} \mathbf{s}_a^H = 0,33b \\ \mathbf{s}_a^O \approx 0b \end{cases}$$

La sezione d'urto di assorbimento relativa all'acqua nel suo complesso sarà dunque:

$$\mathbf{s}_a^{H_2O} = 0,66b$$

Possiamo ora calcolare il numero di molecole di acqua presenti in un centimetro cubo:

$$N_{H_2O} = \frac{N_{Av}}{Mm}$$

essendo $Mm = 18$ la massa molecolare, e la densità dell'acqua pari a 1 g cm^{-3} .

La sezione d'urto macroscopica relativa all'assorbimento dell'acqua sarà allora:

$$\Sigma_a^{H_2O} = \mathbf{s}_a^{H_2O} N_{H_2O} = 0,02208 \text{ cm}^{-1}$$

Il libero cammino medio dei neutroni termici in acqua, per quanto riguarda l'assorbimento, sarà allora:

$$l_a^{H_2O} = \frac{1}{\Sigma_a^{H_2O}} = 45,3 \text{ cm}$$

Conoscendo il libero cammino medio e supponendo che i neutroni termici viaggino alla velocità:

$$v_0 = 2,2 \cdot 10^5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

si può ricavare la vita media dei neutroni termici in acqua:

$$t^{H_2O} = \frac{l_a^{H_2O}}{v_0} = 0,2 \text{ ms}$$

Questo risultato ci fa comprendere come non sia necessario prendere in considerazione il fatto che i neutroni decadono perché il loro tempo di dimezzamento è di circa 10 minuti e quindi, sicuramente, prima di decadere i neutroni sono già andati incontro da molto tempo all'assorbimento da parte del moderatore.

- Consideriamo ora lo scattering elastico. Dobbiamo innanzitutto osservare che il neutrone non ha abbastanza energia per rompere le molecole di acqua e quindi un singolo neutrone vede una molecola d'acqua come un singolo nucleo. La sezione d'urto relativa allo scattering elastico con una molecola d'acqua è la seguente:

$$\mathbf{s}_s^{H_2O} \approx 100b$$

Sfruttando i medesimo valori numerici visti per quanto riguarda l'assorbimento ricaviamo allora la sezione d'urto macroscopica relativa allo scattering elastico in acqua, che sarà:

$$\Sigma_s^{H_2O} = s_s^{H_2O} N_{H_2O} = 3,346 cm^{-1}$$

Il libero cammino medio sarà dunque:

$$l_s^{H_2O} = \frac{1}{\Sigma_s^{H_2O}} = 0,299 cm$$

Complessivamente, dunque, il libero cammino medio dei neutroni nell'acqua sarà:

$$l_{tot}^{H_2O} = \frac{1}{\Sigma_{tot}^{H_2O}} = 0,297 cm$$

Supponiamo ora di cambiare moderatore e di considerare la Grafite che ha densità

$$r^C = 1,6 g cm^{-3}$$

e massa atomica:

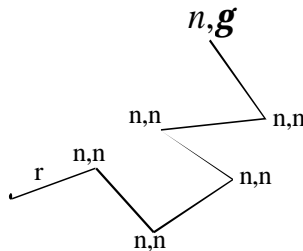
$$A = 12$$

I valori numerici relativi alla grafite sono raccolti nella seguente tabella:

	σ	Σ	l	τ
Assorbimento	4mb	$3,212 \cdot 10^{-4} cm^{-1}$	$3,113 \cdot 10^3 cm$	
Scattering elastico	4b	$0,31212 cm^{-1}$	3,113 cm	
Totale			3,1099 cm	14,15 ms

Siccome il libero cammino medio totale dei neutroni in grafite è maggiore del libero cammino medio dei neutroni in acqua, diciamo che la grafite rispetta maggiormente i neutroni. Il fatto che un moderatore rispetti maggiormente i neutroni rispetto ad un altro porta a delle differenze, per esempio, nel tipo di combustibile che si utilizza in due reattori con moderatori differenti; nel caso di un reattore moderato ad acqua, infatti, sarà necessario utilizzare dell'uranio arricchito al 3% mentre, nel caso di un reattore moderato a grafite, si potrà usare l'uranio naturale (che è arricchito solo allo 0,7%). Un altro importante moderatore è l'acqua pesante (D_2O) che rispetta ancora di più i neutroni.

Occupiamoci ora di un mezzo infinito e vediamo come si comportano i neutroni. Con riferimento al grafico seguente vediamo come un neutrone viaggia nel mezzo per un tratto r e poi collide con un nucleo di moderatore.



La probabilità che il neutrone viaggi per un tratto lungo r senza che gli succeda qualcosa è data dalla relazione:

$$p(r) = e^{-\Sigma_{tot} r}$$

A questa dobbiamo poi aggiungere la probabilità che al neutrone accade qualcosa nel tratto successivo, che indichiamo con dr ; si avrà allora:

$$p(r)dr = e^{-\Sigma_{tot} r} \Sigma_{tot} dr$$

Il valor medio della distanza r percorsa da un neutrone senza che gli accada niente è dunque dato dalla relazione:

$$\bar{r} = \frac{1}{\Sigma_{tot}} \int_0^{\infty} \Sigma_{tot} r e^{-\Sigma_{tot} r} \Sigma_{tot} dr$$

L'integrale che abbiamo trovato è del tipo:

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1$$

e quindi si ricava:

$$\bar{r} = \frac{1}{\Sigma_{tot}} = l_{tot}$$

Osserviamo che, con riferimento all'ultimo grafico visto, ci si sarebbe potuti aspettare, seguendo la sola intuizione, che la lunghezza media di un tratto della spezzata fosse pari a l_s e non, come effettivamente si è trovato, pari ad l_{tot} .

Concentriamoci ora sul calcolo del numero di collisioni subite da un neutrone. Osserviamo innanzitutto che in ogni collisione subita la probabilità che si verifichi un assorbimento sarà data dalla relazione:

$$P_a = \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{tot}}$$

mentre, per quanto riguarda la probabilità di uno scattering elastico, si avrà:

$$P_s = \frac{\Sigma_s}{\Sigma_{tot}}$$

Ovviamente è verificata la relazione di normalizzazione:

$$P_a + P_s = 1 \quad (3)$$

Consideriamo ora la seguente tabella:

Numero di collisioni (n)	Probabilità di avere "i" collisioni (P_i)
1	P_a
2	$P_s \cdot P_a$
3	$P_s^2 \cdot P_a$
...	...
n	$P_s^{n-1} \cdot P_a$

La somma della probabilità di subire assorbimento dopo 1, 2, ... urti deve essere pari ad 1, dato che prima o poi sicuramente il neutrone verrà assorbito:

$$\sum_i P_i = 1$$

Questa relazione è effettivamente verificata in quanto la somma di tutte le probabilità ci porta alla relazione:

$$\sum_i P_i = P_a (1 + P_s + P_s^2 + \dots)$$

Siamo quindi in presenza di una serie geometrica con ragione minore di 1; possiamo dunque scrivere:

$$\sum_i P_i = P_a \frac{1}{1 - P_s}$$

Combinando quest'ultima relazione con la relazione (3) si ottiene:

$$\sum_i P_i = P_a \frac{1}{1 - P_s} = \frac{P_a}{P_a} = 1$$

Calcoliamo ora il numero medio di collisioni; possiamo dunque scrivere:

$$\bar{n} = \frac{\sum_i iP_i}{\sum_i P_i} = \sum_i iP_i = P_a + 2P_s P_a + 3P_s^2 P_a + 4P_s^3 P_a + \dots = P_a (1 + 2P_s + 3P_s^2 + 4P_s^3 + \dots)$$

Scomponiamo ora la somma che appare nell'ultima parentesi nel modo seguente:

$$\bar{n} = P_a (1 + P_s + P_s^2 + P_s^3 + \dots + P_s + P_s^2 + P_s^3 + \dots + P_s^2 + P_s^3 + P_s^4 + \dots + P_s^3 + P_s^4 + P_s^5 + \dots)$$

L'ultima relazione scritta può dunque essere riscritta nel modo seguente:

$$\bar{n} = P_a \left(\frac{1}{1 - P_s} + P_s \frac{1}{1 - P_s} + P_s^2 \frac{1}{1 - P_s} + P_s^3 \frac{1}{1 - P_s} + \dots \right) = \frac{P_a}{1 - P_s} (1 + P_s + P_s^2 + P_s^3 + \dots)$$

ovvero:

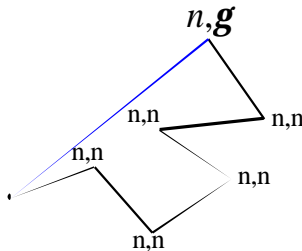
$$\bar{n} = \frac{P_a}{P_a} (1 + P_s + P_s^2 + P_s^3 + \dots) = 1 + P_s + P_s^2 + P_s^3 + \dots = \frac{1}{1 - P_s} = \frac{1}{P_a} = \frac{\Sigma_{tot}}{\Sigma_a} = \frac{l_a}{l_{tot}} \quad (4)$$

Sfruttiamo ora quest'ultima relazione per calcolare il numero medio di collisioni fatte da un neutrone nei tre diversi moderatori che conosciamo:

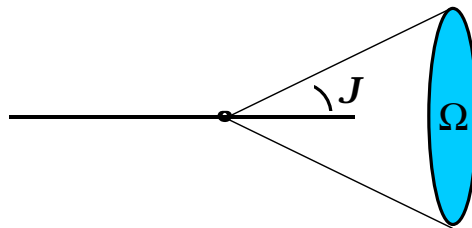
Moderatore	\bar{n}
Acqua	155
Grafite	1000
Acqua pesante	15000

I dati della tabella sono in perfetta accordo con l'osservazione prima fatta riguardante il fatto che l'acqua pesante rispetta maggiormente i neutroni rispetto alla grafite che, a sua volta, assorbe meno dell'acqua.

Un altro parametro importante che si può calcolare è la distanza totale che il neutrone percorre dal momento in cui diventa termico al momento in cui viene assorbito; questo parametro è utile, ad esempio, per poter fare una stima delle dimensioni del reattore.



Per poter valutare l'allontanamento totale è necessario fare delle ipotesi sulla modalità angolare dello scattering: bisogna dunque conoscere gli angoli di ogni scattering. Dalla fisica nucleare prendiamo dunque l'informazione secondo la quale, se il nucleo urtato è grande, lo scattering si può considerare in buona approssimazione isotropo nel sistema del laboratorio (in realtà lo scattering è isotropo nel sistema del centro di massa). Facciamo dunque riferimento al seguente disegno:



Si avrà che:

$$\Omega = 2p(1 - \cos J)$$

Siccome lo scattering deve essere isotropo si dovrà avere che:

$$p(\Omega) = \text{const}$$

ma anche, ovviamente, che:

$$\int_{4p} p(\Omega) d\Omega = 1$$

Combinando queste due ultime relazioni si ottiene:

$$p(\Omega) = \frac{1}{4p}$$

Il legame che abbiamo in precedenza espresso tra Ω e θ ci permette ora di scrivere la seguente relazione:

$$p(\Omega) d\Omega = p(J) dJ$$

dalla quale si ricava, tenendo conto di quanto appena visto:

$$p(J) = p(\Omega) \frac{d\Omega}{dJ} = \frac{1}{4p} 2p \sin J = \frac{\sin J}{2}$$

Analizziamo ora l'informazione non su θ ma sul suo coseno; dovremo considerare una relazione del tipo:

$$p(\cos J) d \cos J = -p(\Omega) d\Omega$$

dalla quale si deduce:

$$p(\cos J) = \frac{2p}{4p} = \frac{1}{2}$$

Ciò significa che, graficamente, si ottiene quanto appare nella prima figura della pagina seguente. E' evidente che:

$$\overline{\cos J} = 0 \quad (5)$$

Questo significa che il neutrone, quando si trova immerso in un moderatore i cui nuclei sono molto grossi, andrà tanto in avanti quanto indietro. Ovviamente, invece, se i nuclei contro i quali il neutrone urta non sono grandi (ovvero se hanno A abbastanza piccolo) il discorso appena visto dovrà essere modificato.

Più avanti gestiremo la distanza di allontanamento con la teoria della diffusione, che ci permetterà di calcolare in maniera molto semplice il quadrato del valor medio della lunghezza di ogni tratto della spezzata prima vista; per questo motivo ora ci soffermiamo sul primo tratto della spezzata e ne calcoliamo la lunghezza quadratica media. Tale valore si ottiene facendo riferimento alla distribuzione dei liberi cammini, dipendente dalla sezione d'urto totale:

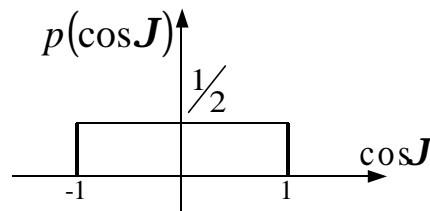
$$\overline{r^2} = \frac{1}{\Sigma_{tot}^2} \int_0^{\infty} \Sigma_{tot}^2 r^2 e^{-\Sigma_{tot} r} \Sigma_{tot} dr$$

Siamo in questo caso in presenza di un integrale del tipo:

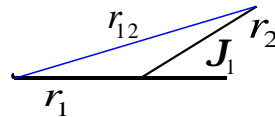
$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2$$

e quindi si avrà:

$$\overline{r^2} = \frac{2}{\Sigma_{tot}^2} = 2l_{tot}^2 \quad (6)$$



Consideriamo ora i due tratti della spezzata evidenziati nell'immagine seguente:



Ovviamente si avrà:

$$r_{12}^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos J_1$$

Siccome il neutrone non ha memoria, ogni urto è un evento scorrelato dagli altri e quindi si può scrivere:

$$\overline{r_{12}^2} = \overline{r_1^2} + \overline{r_2^2} + 2\overline{r_1 r_2 \cos J_1}$$

Combinando quest'ultima relazione con la relazione (5) si ottiene:

$$\overline{r_{12}^2} = \overline{r_1^2} + \overline{r_2^2} = 2\overline{r^2} = 2 \cdot 2l_{tot}^2 = 4l_{tot}^2$$

dove si è utilizzata la relazione (6) che vale per ogni urto. Risulta allora semplice generalizzare al caso di n urti; si avrà infatti:

$$\overline{r_{ln}^2} = 2nl_{tot}^2$$

Utilizzando dunque il numero di urti medio che abbiamo ricavato con la relazione (4), si ottiene:

$$\overline{r^2} = \overline{n} 2l_{tot}^2 = \frac{l_a}{l_{tot}} 2l_{tot}^2 = 2l_a l_{tot}$$

Quando si analizza il caso di un mezzo nel quale siano presenti neutroni termici è necessario conoscere il flusso in funzione della posizione e, in caso, del tempo, ovvero bisogna conoscere la funzione $\phi(r,t)$; oppure si possono ricavare quantità mediate, per le quali è possibile utilizzare il metodo Monte Carlo che vedremo nel seguito (in particolare nelle esercitazioni).

Passiamo ora alla teoria della diffusione che ci permette di gestire il tutto in maniera più rigorosa. In primo luogo dobbiamo specificare che ci occupiamo di neutroni termici e quindi possiamo supporre che la dipendenza del flusso neutronico dall'energia sia irrilevante (avendo tutti i neutroni, approssimativamente, la medesima energia). La teoria della diffusione si basa su dei bilanci fatti relativamente ad un certo volume. Vediamo, innanzitutto dal punto di vista strettamente qualitativo, che cosa può succedere ai neutroni.

I neutroni termici si originano dal rallentamento che, però, al momento non ci interessa e quindi introduciamo una prima grande semplificazione supponendo di avere una distribuzione di sorgenti di neutroni termici che indichiamo con il simbolo $S(r,t)$ e che, dimensionalmente, sarà un numero (il numero di neutroni) diviso per un volume e per un tempo:

$$[S(r,t)] = \frac{\text{neutroni}}{\text{cm}^3 \cdot \text{s}}$$

La “morte” dei neutroni è invece legata al fatto che i neutroni, prima o poi, vengono catturati e quindi il secondo termine del bilancio dovrà essere il seguente:

$$out = \Sigma_a(r,t) f(r,t)$$

Il fatto che la sezione d’urto macroscopica di assorbimento sia funzione della variabile spaziale r e della variabile temporale t è dovuto al fatto che, in generale, il mezzo nel quale i neutroni termici propagano può non essere omogeneo (da qui la dipendenza spaziale) e che, inoltre, le caratteristiche del mezzo nel quale il mezzo propaga possono cambiare nel tempo (basti pensare al fatto che la sezione d’urto di assorbimento del combustibile può cambiare mentre il combustibile si consuma e cambia in modo complesso perché bisogna tener conto della nascita dei transuranici). Per comprendere meglio la dipendenza temporale soffermiamoci sulla relazione:

$$\frac{dN}{dt} = -s_a f N$$

dalla quale si ricava:

$$N = N_0 e^{-s_a f t}$$

Per una questione di bilancio dimensionale, ovviamente, si deve avere:

$$s_a f = \frac{1}{T}$$

dove T sia il periodo di decadimento che porta al consumo della sostanza. Supponiamo di avere il seguente valore numerico legato al flusso:

$$f \approx 10^{13}$$

nella tabella seguente vediamo, per tale valore di flusso, il tempo di dimezzamento dell’acqua e dell’ ^{235}U :

	H_2O	^{235}U
s_a	$0,66 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$	$680 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$
T	$1,51 \cdot 10^{11} \text{ s} = 4800 \text{ anni}$	$1,47 \cdot 10^8 \text{ s} = 4,5 \text{ anni}$

Appare dunque evidente che i tempi di funzionamento del reattore sono assolutamente irrilevanti rispetto al tempo di consumo dell’acqua; il tempo di consumo dell’ ^{235}U è invece tale da imporre un riaggiornamento periodico delle sezioni d’urto.

Oltre al termine di nascita e al termine di morte, per fare un bilancio completo dobbiamo pensare ai neutroni che entrano ed escono dal volume di riferimento che stiamo utilizzando. Per fare questo introduciamo il termine di fuga netta che indicheremo con F e che è definito semplicemente come la differenza tra le uscite e gli ingressi. Il bilancio complessivo può dunque essere espresso nel modo seguente:

$$S - \Sigma_a f - F = \text{variazione}$$

Possiamo esprimere la variazione come segue:

$$\text{variazione} = \frac{\partial n}{\partial t}$$

dove con n sia indicata la densità. Combinando allora le ultime due relazioni scritte si ottiene:

$$S - \Sigma_a f - F = \frac{\partial n}{\partial t}$$

Ricordiamo poi la definizione di flusso secondo la quale:

$$f = nv$$

si riesce a far apparire il flusso anche nel secondo membro dell’equazione di bilancio:

$$S - \Sigma_a f - F = \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial t}$$

Ovviamente il termine di sorgente S deve essere una quantità a noi nota (deriva dal rallentamento che ora noi non consideriamo) e quindi, per completare l’equazione di bilancio, dobbiamo trovare un modo per far apparire il flusso anche nell’espressione delle fughe nette. Il termine F , però, richiede delle informazioni direzionali che rendono il semplice flusso ϕ insufficiente per una descrizione accurata. Per poter continuare dovremmo allora non solo conoscere la densità n ma addirittura la densità n in funzione dell’angolo solido \mathbf{W} . È dunque necessario conoscere la teoria del trasporto. Noi ci limiteremo ad una sottoteoria della teoria del trasporto detta teoria della diffusione che, a sua volta, sfrutta la teoria cinetica. La teoria della diffusione si basa sulla legge di Fick che afferma che un gas migra verso i punti nei quali esso è presente in concentrazione minore. Si fa allora riferimento alla relazione:

$$\vec{J} = -D\nabla n$$

dove D prende il nome di coefficiente di diffusione, e ∇ (“nabla”) è il simbolo dell’operatore gradiente. Nel nostro caso dunque avremo una relazione del tipo:

$$\vec{J} = -D_{\text{neutroni}} \nabla f$$

che si potrà scomporre come segue:

$$\begin{cases} J_x = -D \frac{\partial f}{\partial x} \\ J_y = -D \frac{\partial f}{\partial y} \\ J_z = -D \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$$

Flusso e densità di corrente hanno le stesse dimensioni; quindi, per il rispetto del bilancio dimensionale si avrà che il coefficiente di diffusione D deve essere una lunghezza.

Teoria della diffusione. Applicabilità della legge di Fick.

Torniamo dunque alla relazione vista la scorsa lezione secondo la quale:

$$S - \Sigma_a \mathbf{f} - F = \frac{1}{v} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}$$

dove F indicava le fughe. Consideriamo ora un volume V delimitato da una superficie S e integriamo tutti gli elementi dell'equazione precedente:

$$\int_V S dV - \int_V \Sigma_a \mathbf{f} dV - \int_V F dV = \frac{1}{v} \int_V \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} dV \quad (1)$$

Come accennato nella lezione precedente, dobbiamo capire come esprimere il termine di fuga netta; a questo proposito era già stato introdotto il termine J. Consideriamo dunque un tratto dS di superficie e ci chiediamo, ipotizzando che quello che esce non rientri, quanti neutroni attraversano tale superficie. Assumiamo per il momento che i neutroni siano mono-direzionali. Il numero di neutroni che attraversano in tale tratto infinitesimo la superficie (ovvero che fuggono dal volume che stiamo considerando) in ogni secondo sarà dato dalla relazione:

$$J dS dt = n dS v dt$$

Consideriamo solo il numero di fughe al secondo e quindi modifichiamo l'ultima relazione scritta in modo da avere soltanto:

$$J dS = n v dS$$

In realtà, poiché dobbiamo tener conto anche della direzione, la relazione da usare è la seguente, in cui i vettori sono tra loro moltiplicati scalarmente:

$$\vec{J} d\vec{S} = n v d\vec{S} = n v dS \vec{u}$$

essendo il versore \vec{u} normale alla superficie dS ed orientato verso l'esterno, e dunque $d\vec{S} = dS \vec{u}$. Se poi le direzioni fossero, ad esempio, due, dovremmo modificare ulteriormente l'espressione degli attraversamenti in modo da ottenere:

$$\vec{J} d\vec{S} = (n_1 \vec{v}_1 + n_2 \vec{v}_2) d\vec{S}$$

Generalizziamo ulteriormente la relazione pensando a tutte le possibili direzioni; si avrà allora:

$$\vec{J} d\vec{S} = \int_{\Omega=4\pi} n(\mathbf{w}) \vec{v} d\vec{S} d\Omega$$

Abbiamo allora una densità di corrente di neutroni che possiamo indicare nel modo seguente:

$$\vec{J} = \int_{4\pi} n(\mathbf{w}) \vec{v} d\Omega$$

e quindi i neutroni che attraversano la superficie dS saranno

$$F dV = \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

J ha le dimensioni di un flusso e tiene conto del moto efficace dei neutroni: per questo motivo, nel caso ci siano tanti neutroni che entrano quanti ne escono, J può anche essere nullo; se però J è nettamente positivo possiamo pensare che i neutroni si muovano tutti in un'unica direzione. Integriamo ora l'ultima relazione scritta in modo da considerare tutta la superficie S che contiene il volume V; si otterrà così:

$$\int_V F dV = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Siccome le fughe possono avvenire solo attraverso la superficie, la relazione (1) può essere riscritta nel modo seguente:

$$\int_V S dV - \int_V \Sigma_a \mathbf{f} dV - \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{v} \int_V \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} dV$$

Mi trovo dunque a dover conoscere S (il termine di sorgente), Σ e ϕ ovunque mentre J mi interessa solo sulla superficie. Ricordiamo però il teorema che mi permette di scrivere:

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{J} dV$$

La relazione di bilancio può allora essere espressa come segue:

$$\int_V S dV - \int_V \Sigma_a \mathbf{f} dV - \int_V \text{div} \vec{J} dV = \frac{1}{v} \int_V \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} dV$$

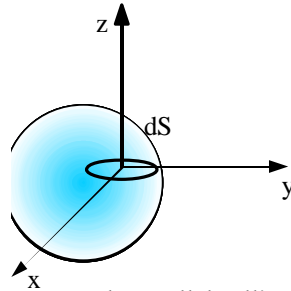
che, localmente, diventerà:

$$S(\vec{r}, t) - \Sigma_a(\vec{r}, t)\mathbf{f} - \text{div}\vec{J} = \frac{1}{|v|} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}$$

Tale bilancio locale è esatto ma poco maneggevole. Per rendere la relazione un po' più facile da utilizzare possiamo introdurre la legge di Fick che è un'approssimazione che mi permette di legare la densità di corrente J al flusso. Ricordiamo allora che la legge di Fick applicata al nostro caso era:

$$\vec{J} = -D \text{Grad} \mathbf{f}$$

dove D è il coefficiente di diffusione. Tutto sta ora a verificare che effettivamente sia possibile fare questa approssimazione. Per accertarcene consideriamo la seguente figura:



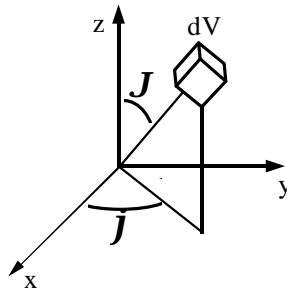
Gli attraversamenti della superficie dS posta con normale parallela all'asse z saranno:

$$Att = J_z dS$$

dove l'elemento J_z è composto da due contributi perché bisogna tener conto sia dei neutroni che attraversano la superficie provenendo dal basso (quindi con componente positiva di velocità lungo l'asse z), sia di quelli che la attraversano dall'alto; si avrà dunque:

$$J_z = J_z^+ - J_z^-$$

Dobbiamo ora soffermarci sul punto di origine dei neutroni e quindi facciamo riferimento al seguente disegno:



Il numero di scattering al secondo che avvengono nell'elemento dV saranno dati dalla relazione seguente:

$$Sca = \Sigma_s \mathbf{f} dV$$

Supponiamo di essere in situazione di mezzo omogeneo e di poter quindi trascurare la dipendenza spaziale della sezione d'urto macroscopica. Gli attraversamenti dall'alto della superficie dS che appare nella prima immagine di questa pagina sono dunque collegati ai neutroni che escono dal volume dV e si muovono all'interno dell'angolo solido che ha per base la superficie dS e per vertice il volumetto dV stesso e possono allora essere espressi nel modo seguente:

$$Att^- = \int_{z>0} \Sigma_s \mathbf{f} dV \frac{\cos \mathbf{J}}{4\pi r^2} e^{-\Sigma_{tot} r} dS$$

da cui si ricava:

$$J_z^- = \int_{z>0} \Sigma_s \mathbf{f} dV \frac{\cos \mathbf{J}}{4\pi r^2} e^{-\Sigma_{tot} r} \quad (2)$$

Osserviamo però che il fatto che il flusso dipenda dal tempo implica che anche il termine J_z dipenda dal tempo e quindi dovremmo tener conto di un certo ritardo tra il momento in cui avviene lo scattering e il momento in cui il neutrone attraversa la superficie; facciamo però due importanti semplificazioni:

- prima di tutto non teniamo conto della dipendenza dal tempo del flusso, ovvero ci poniamo in situazioni stazionarie che prevedano:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = 0$$

- in secondo luogo non consideriamo l'influenza di sorgenti e forti assorbitori localizzati.

Ricordiamo a questo punto che il legame tra le coordinate cartesiane e le coordinate sferiche è:

$$\begin{cases} x = r \sin J \cos j \\ y = r \sin J \sin j \\ z = r \cos J \end{cases}$$

e che l'elemento di volume è: $r^2 \sin J dJ dj dr$. La relazione (2) può allora essere riscritta nel modo seguente:

$$J_z^- = \int_{z>0} \Sigma_s \mathbf{f} r^2 \sin J \frac{\cos J}{4pr^2} dJ dj e^{-\Sigma_{tot} r} dr = \frac{1}{4p} \int_{z>0} \Sigma_s \mathbf{f} \sin J \cos J dJ dj e^{-\Sigma_{tot} r} dr$$

Mettiamoci ora in una situazione omogenea nella quale le sezioni d'urto macroscopiche siano costanti; ciò significa poter riscrivere la relazione precedente come segue:

$$J_z^- = \frac{\Sigma_s}{4p} \int_{z>0} \mathbf{f} \sin J \cos J dJ dj e^{-\Sigma_{tot} r} dr$$

Osserviamo ora che i neutroni prodotti molto lontano dalla superficie dS portano un contributo infinitesimo a causa della dipendenza da r tramite un esponenziale decrescente; quando dunque andiamo a sviluppare in serie di Taylor il flusso, possiamo fermarci al primo termine, ovvero:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \bar{\nabla} \mathbf{f} \Big|_{r=0} \vec{r}$$

Combinando le ultime due relazioni scritte e integrando rispetto a φ possiamo notare che i termini che contengono le derivate rispetto ad x e rispetto ad y sono funzioni periodiche e dunque scompaiono dal calcolo dell'integrale; lo sviluppo in serie di Taylor del flusso si può ridurre dunque al solo termine contenente la derivata lungo z:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} \Big|_{z=0} z = \mathbf{f}_0 + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} \Big|_{z=0} r \cos J$$

e quindi si avrà:

$$J_z^- = \frac{\Sigma_s}{4p} \int_{z=0}^{\infty} \int_{J=0}^{\pi/2} \int_{j=0}^{2\pi} \left(\mathbf{f}_0 + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} \Big|_{z=0} r \cos J \right) \sin J \cos J e^{-\Sigma_{tot} r} dr dJ dj$$

Osserviamo che anche le derivate seconde scomparirebbero nell'integrazione. Affinché la diffusione possa essere una approssimazione adeguata di ciò che succede ai neutroni, dobbiamo ora aggiungere l'ipotesi secondo la quale:

$$\Sigma_a \ll \Sigma_s$$

Questa ipotesi è comunque necessaria perché, in caso contrario, il flusso non può variare in maniera blanda con la coordinata r e quindi lo sviluppo in serie di Taylor non è fattibile; notiamo che quest'ultima ipotesi non era conglobata nelle altre due perché la condizione di sorgenti trascurabili era compatibile anche con la situazione nella quale si aveva:

$$\Sigma_a \gg \Sigma_s$$

Fatta dunque quest'ultima ipotesi si ottiene:

$$J_z^- = \frac{\Sigma_s}{4p} \iiint \mathbf{f}_0 \cos J \sin J dj dJ e^{-\Sigma_{tot} r} dr + \frac{\Sigma_s}{4p} \iiint \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} \Big|_{z=0} r \cos^2 J \sin J dj dJ e^{-\Sigma_{tot} r} dr$$

ovvero:

$$J_z^- = \frac{\Sigma_s}{\Sigma_{tot}} \frac{\mathbf{f}_0}{4} + \frac{\Sigma_s}{6\Sigma_{tot}^2} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

Analogamente possiamo rifare tutto il discorso pensando ai neutroni che arrivano sulla superficie dS da sotto e si otterrà:

$$J_z^+ = \frac{\Sigma_s}{\Sigma_{tot}} \frac{\mathbf{f}_0}{4} - \frac{\Sigma_s}{6\Sigma_{tot}^2} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

Possiamo dunque ricavare, finalmente, il valore complessivo di J_z che sarà:

$$J_z = J_z^+ - J_z^- = -\frac{\Sigma_s}{3\Sigma_{tot}^2} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

Poiché la direzione lungo z non è privilegiata, il medesimo discorso può essere ripetuto relativamente alle componenti lungo le direzioni x ed y:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_x = -\frac{\Sigma_s}{3\Sigma_{tot}^2} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} \\ J_y = -\frac{\Sigma_s}{3\Sigma_{tot}^2} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=0} \end{array} \right.$$

Complessivamente si avrà dunque:

$$\vec{J} = -\frac{\Sigma_s}{3\Sigma_{tot}^2} \vec{\nabla} f$$

Abbiamo così dimostrato che la legge di Fick può essere applicata alla situazione che stiamo studiando. Si ricava anche che l'espressione del coefficiente di diffusione è:

$$D \doteq \frac{\Sigma_s}{3\Sigma_{tot}^2}$$

Nel seguito dovremo vedere quali conseguenze portano tutte le condizioni che abbiamo posto per ricavare questi due risultati. Per ora abbiamo l'equazione di bilancio locale che, come si è appena mostrato, può essere combinata con la legge di Fick ottenendo l'equazione della diffusione neutronica:

$$S - \Sigma_a f + D \nabla^2 f = \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial t}$$

Vediamo dunque alcune osservazioni sulle ipotesi fatte:

- 1) La prima ipotesi fatta riguarda l'isotropia dello scattering che è accettabile se la A del moderatore è grande. Invece, nel caso di nuclei leggeri (soprattutto per l'idrogeno), abbiamo che dopo l'urto rimane memoria della direzione di provenienza dei neutroni, che è privilegiata rispetto alle altre direzioni; questo ci indurrà a correggere l'espressione del coefficiente di diffusione D per tener conto di questo fatto.
- 2) L'indipendenza dal tempo del flusso è invece in palese contrasto con l'equazione di bilancio; ciò che però ci autorizza ad utilizzare ugualmente quest'ipotesi è il termine esponenziale. Il ritardo tra l'urto di scattering e l'attraversamento dell'areola dS è effettivamente presente, ma se la distanza da percorrere è grande è molto difficile che il neutrone arrivi sulla superficie dS senza interagire. Assumiamo di tener conto di questi neutroni solo se hanno una probabilità superiore allo 0,1% di non interagire; ciò equivarrebbe a fissare una distanza r^* tale per cui fosse verificata la seguente relazione:

$$e^{-\Sigma_{tot} r^*} = 10^{-3}$$

I neutroni all'interno di una sfera di raggio r^* vengono conteggiati e al massimo il loro ritardo sarà:

$$t^* = \frac{r^*}{v}$$

Sarà dunque sufficiente imporre che il flusso vari "lentamente" all'interno della sfera di raggio r^* , ad esempio:

$$\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial t} t^* < 10^{-3}$$

A livello numerico si avrà:

$$r^* \approx 7l_{tot}$$

e quindi, combinando le ultime due relazioni, si ottiene:

$$\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial t} \frac{7l_{tot}}{v} < 10^{-3}$$

Ora dobbiamo vedere se tutto ciò è verificato anche nelle situazioni concrete. Avevamo in precedenza visto come tipicamente si avesse:

$$f = f_0 e^{-t/T}$$

dalla quale relazione si ricava:

$$\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{T}$$

Siccome non posso modificare il flusso all'interno del reattore troppo velocemente si dovrà avere T almeno maggiore di 5ms; questo porta ad avere:

$$l_{tot} < 2,2 \cdot 10^2 \text{ cm}$$

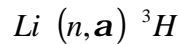
Possiamo dunque concludere che l'ipotesi è accettabile anche nelle situazioni concrete anche perché in questi conti non abbiamo tenuto conto del materiale fortemente assorbente presente all'interno del reattore (come il

combustibile). Osserviamo, infine, che nei dispositivi bellici questa ipotesi non è invece valida in quanto in quelle situazioni il flusso cresce in modo estremamente veloce.

- 3) L'ipotesi che prevede di non considerare le sorgenti e gli assorbitori localizzati è accettabile se si considera, ancora una volta, una sfera di raggio r^* ; se dunque le sorgenti e gli assorbitori localizzati sono presenti ma sono abbastanza lontani (all'esterno appunto della sfera di raggio r^*), allora la legge di Fick è applicabile e il discorso fatto prima regge.
- 4) L'ipotesi di mezzo omogeneo pone, anch'essa, limitazioni ad una zona piuttosto ristretta; se, infatti, all'esterno della zona di frontiera (fuori dunque dalla sfera di raggio $7l_{tot}$) il mezzo non è omogeneo, le perturbazioni portate dalla disomogeneità sono irrilevanti perché comunque arrivano pochissimi neutroni da quella zona.
- 5) Ancora per la presenza dell'esponenziale fortemente decrescente si può applicare questa teoria anche al caso di mezzi di dimensioni finite, purché ci si fermi ad una certa distanza ($7l_{tot}$) dal bordo.

La teoria della diffusione. Sorgente piana infinita. Sorgente puntiforme. Filo infinito. Principio di sovrapposizione. Mezzo omogeneo finito. Mezzi non omogenei.

Iniziamo questa lezione vedendo un rapido esercizio numerico. Sia dunque dato un fascio di neutroni da 25 meV che incide, con flusso pari a $5 \cdot 10^{10}$ neutroni al centimetro quadro ed al secondo, su una targhetta di Litio di densità $0,5 \text{ g/cm}^3$ di superficie $0,01 \text{ cm}^2$ e di spessore pari a $0,005 \text{ cm}$. La reazione che ci interessa è la seguente:



che ha una sezione d'urto di 945 b. Si ricordi che il tempo di dimezzamento dell' 3H è di 12 anni.

- a) Come prima cosa viene richiesto di calcolare il modulo della velocità.
Riportiamo dunque in erg l'energia dei neutroni, ricordando che è:

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ erg}$$

Si otterrà dunque:

$$E = 25 \text{ meV} = 4 \cdot 10^{-14} \text{ erg}$$

Ricordiamo inoltre che la massa a riposo dei neutroni è:

$$m = 1,67 \cdot 10^{-24} \text{ g}$$

Possiamo dunque ricavare il modulo della velocità dei neutroni sfruttando la seguente semplice espressione:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 2,188 \cdot 10^5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

- b) Viene poi richiesto la densità dei neutroni e la densità iniziale degli atomi di Litio. Per quanto riguarda il numero di neutroni possiamo ricordare la relazione di definizione del flusso:

$$f = nv$$

dalla quale possiamo ricavare la seguente espressione:

$$n = \frac{f}{v} = 2,285 \cdot 10^5 \frac{\text{neutroni}}{\text{cm}^3}$$

La densità iniziale degli atomi di Litio si calcola, invece, conoscendo il numero di Avogadro e il peso atomico del Litio che vengono combinati con la densità del Litio nella seguente equazione:

$$n_{Li} = \frac{Av}{A_{Li}} \rho_{Li} = 4,34 \cdot 10^{22} \frac{\text{atomi}}{\text{cm}^3}$$

Osserviamo che l'enorme disparità tra il numero di atomi di Litio nella targhetta e il numero di neutroni, permette di poter pensare ai neutroni come ad un gas estremamente rarefatto; capiamo inoltre per quale motivo le interazioni tra i neutroni sono fortemente sfavorite rispetto alle interazioni dei neutroni con gli atomi di Litio. Da questa osservazione deriva anche la linearità dell'equazione di diffusione.

- c) Si chiede ora di calcolare il tasso di reazione. Applichiamo dunque la formula che esprime il tasso di reazione, avendo indicato con N_{Li} il numero di nuclei, pari a $n_{Li} \cdot Vol$:

$$R = sfN_{Li} = 1,025 \cdot 10^8 \frac{\text{nuclei}}{\text{s}}$$

L'equazione che descrive il comportamento temporale del Litio (che sta diminuendo) è dunque la seguente:

$$\frac{dN_{Li}}{dt} = -R = -sfN_{Li}$$

- d) Viene infine richiesta la massima attività dell' 3H ottenibile. A questo scopo si osservi che l'equazione che descrive il comportamento temporale dell' 3H (che nasce tramite la reazione citata e che muore per decadimento) sarà la seguente:

$$\frac{dN_{{}^3H}}{dt} = R - \lambda N_{{}^3H}$$

dalla quale si ricava:

$$N_{{}^3H} = \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})$$

La massima attività che si può ottenere è pari al valore asintotico del numero di atomi di trizio $\frac{R}{\lambda}$ per la loro

costante di decadimento λ :
$$\frac{R}{\lambda} = R = 1,025 \cdot 10^8 \frac{\text{nuclei}}{\text{s}}$$

Ricordiamo ora l'espressione per la conversione in Curie:

$$1\text{Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \frac{\text{decays}}{\text{s}}$$

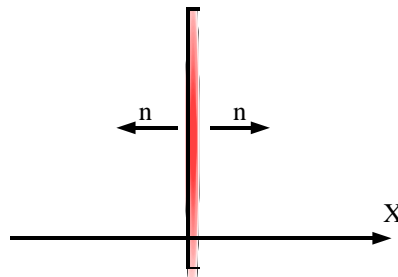
dalla quale possiamo ricavare l'espressione in Curie dell'attività, che sarà:

$$\frac{dN_{\text{tr}}}{dt} = R = 2,77 \cdot 10^{-3} \text{Ci}$$

Torniamo ora ad occuparci della teoria della diffusione e vediamo alcuni significativi esempi di risoluzione. Ricordiamo dunque l'equazione della diffusione che era:

$$D\nabla^2 f - \Sigma_a f + S = \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial t}$$

Il primo caso significativo sul quale ci soffermiamo è quello del mezzo infinito omogeneo nel quale è posta una sorgente infinita piana. Facendo dunque riferimento alla figura seguente consideriamo un foglio sottilissimo ma infinito che emette neutroni in maniera isotropa con una intensità costante e uniforme. Come si può vedere dalla figura, questo problema riduce ad una (per simmetria) le variabili spaziali significative, tutta la descrizione può infatti essere fatta sfruttando la sola coordinata x (la piastra incontrerà dunque l'asse X in x=0).



Ovviamente, siccome l'intensità è costante e uniforme, se r_0 è l'intensità della sorgente (in neutroni per cm^2 e secondo), allora in ogni metà dello spazio diviso in due dalla sorgente, si avrà un'intensità pari a $r_0/2$. Ovviamente, per avere un significato fisico, il flusso non deve divergere al variare di x. In questa situazione la sorgente S può essere espressa nel modo seguente:

$$S = r_0 d(x)$$

L'equazione della diffusione diventerà allora:

$$D\nabla^2 f - \Sigma_a f + r_0 d = \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial t}$$

Potremmo dunque risolvere matematicamente il problema ma è preferibile utilizzare un approccio più fisico; l'equazione, in tutto lo spazio tranne che in x=0, si riduce alla omogenea associata di quella scritta. Risolta quella potremo calcolare la costante in modo che soddisfi ad una opportuna condizione di sorgente che adatti la soluzione ad x=0. Cominciamo dunque con il considerare la omogenea associata:

$$D\nabla^2 f - \Sigma_a f = 0$$

Siccome il flusso è funzione della sola x, si avrà:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

e quindi, combinando le ultime due relazioni scritte, si ottiene:

$$D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \Sigma_a f$$

ovvero:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\Sigma_a}{D} f$$

Introduciamo ora la grandezza chiamata area di diffusione e così definita:

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}$$

che, insieme alla sua radice quadrata, detta lunghezza di diffusione, mi permette di descrivere come viaggiano i neutroni. Combinando le ultime due relazioni scritte si ottiene:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f}{L^2}$$

La soluzione di un'equazione differenziale di questo tipo è, ovviamente:

$$f(x) = Ae^{-x/L} + Be^{x/L}$$

Concentriamoci sul semipiano positivo delle x; per evitare che il flusso diverga quando x tende all'infinito dobbiamo annullare la costante B e quindi rimane:

$$f(x) = Ae^{-x/L} \quad (1)$$

Veniamo ora alla condizione di sorgente che possiamo esprimere tramite due diversi approcci:

1) Ricordiamo il significato di J_x :

$$J_x = -D \overline{\text{Grad} f}$$

risulta chiaro che quando viene calcolato per il limite di x che tende a zero, deve essere uguale all'intensità di flusso che attraversa una superficie sonda ideale di 1 cm^2 ; nel nostro caso dunque deve essere:

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_x = \frac{r_0}{2}$$

Nel caso in analisi la penultima relazione scritta sarà:

$$J_x = -D \frac{\partial f}{\partial x}$$

Combinando allora quest'ultima relazione scritta con la relazione (1) si ottiene:

$$J_x = \frac{DA}{L} e^{-x/L}$$

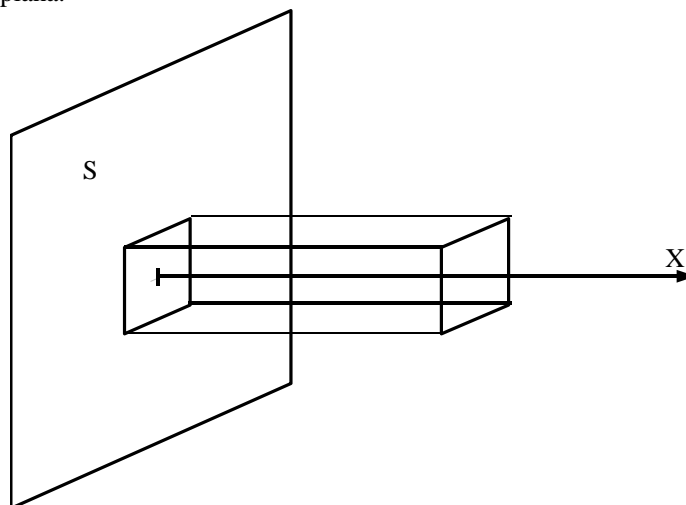
Applicando il limite per x che tende a zero si avrà:

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_x = \frac{DA}{L} = \frac{r_0}{2}$$

dalla quale si ricava:

$$A = \frac{r_0}{2} \frac{L}{D}$$

2) Immaginiamo un prisma semi-infinito di area di base pari ad 1 cm^2 che si estende nel semipiano positivo delle x a partire dalla sorgente piana.



Ovviamente nel prisma entreranno $r_0/2$ neutroni. Notiamo che, siccome non c'è alcun gradiente lungo y e lungo z, la corrente netta dei neutroni che entrano ed escono dalla superficie laterale del prisma sarà nulla. Possiamo dunque scrivere il seguente bilancio:

$$\int_0^{+\infty} \Sigma_a f(x) dx = \frac{r_0}{2}$$

nel quale si impone che i neutroni immessi nel prisma attraverso la faccia in contatto con la sorgente dovranno essere in numero uguale a quelli che prima o poi (ovvero ad una qualsiasi distanza x dalla sorgente) vengono perduti per assorbimento nel prisma stesso. Combinando allora quest'ultima relazione con l'espressione fino ad ora trovata del flusso si ottiene:

$$\int_0^{+\infty} \Sigma_a A e^{-x/L} dx = \frac{r_0}{2}$$

dalla quale si ricava nuovamente:

$$A = \frac{r_0}{2} \frac{1}{L \Sigma_a} = \frac{r_0}{2} \frac{L}{D}$$

La validità dell'imposizione che abbiamo prima fatto sull'assenza di gradiente lungo y e lungo z è confermata dal fatto di aver trovato lo stesso risultato trovato con il metodo precedente.

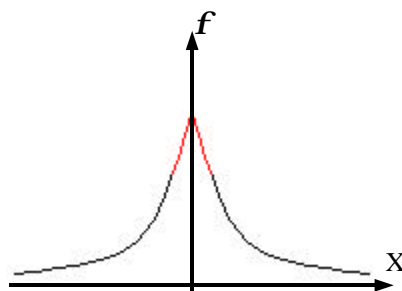
In entrambi i modi siamo dunque arrivati ad ottenere la seguente espressione del flusso:

$$f(x) = \frac{r_0 L}{2D} e^{-x/L}$$

Dobbiamo ora ripetere lo stesso discorso anche per il semipiano negativo delle x. Per simmetria si arriverà alla seguente relazione:

$$f(x) = \frac{r_0 L}{2D} e^{-|x|/L}$$

L'andamento del flusso potrà essere graficato nel modo seguente:



La zona in rosso è dovuta al fatto che in prossimità della sorgente la teoria diventa meno applicabile. In questa ottica risulta più valido il secondo approccio che esplora il problema in una zona in cui si sono ridotti i punti vicini allo zero. Prima di studiare altri casi riflettiamo sul significato delle costanti introdotte, che si ritroveranno spesso anche nel seguito. Facciamolo commentando la seguente tabella numerica che riguarda i più comuni moderatori:

	$r \left[\frac{g}{cm^3} \right]$	$D = \frac{\Sigma_s}{3\Sigma_{tot}} [cm]$	$L = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}}$
H_2O	1	0,16	2,85
D_2O	1,1	0,87	170
C	1,6	0,84	47

L è ovviamente collegato alla distanza dalla sorgente che il neutrone termico riesce a raggiungere; vediamo inoltre, da come sono definiti L e D, che sarebbe possibile ricavare il valore di L a partire dai valori di Σ_s e di Σ_a . Noteremo che, per quanto riguarda la grafite non ci sono problemi mentre i conti non tornerebbero per l'acqua e per l'acqua pesante; ciò è prevedibile perché in questi casi l'ipotesi di scattering isotropo è decisamente errata (sarebbe necessaria una diversa definizione di D). Notiamo per inciso che se Σ_a è molto piccolo, il Σ_{tot} può essere pensato praticamente coincidente con il Σ_s e quindi il coefficiente di diffusione diventa (come spesso si troverà):

$$D \approx \frac{1}{3\Sigma_s} = \frac{l_s}{3}$$

Risulta già chiaro che l'approccio della teoria della diffusione è tale da descrivere il comportamento medio (in termini di flusso) dei neutroni, e non il loro comportamento singolo. Per comprendere meglio in quale ipotesi possiamo utilizzare la teoria della diffusione ricordiamo che, nella lezione numero 5, avevamo ricavato, mediante uno studio statistico del comportamento di un neutrone in una geometria sferica, il seguente risultato:

$$\overline{r^2} = 2l_a l_{tot}$$

Ci aspettiamo allora di poter ricavare qualche cosa di simile dalla teoria della diffusione, ad esempio nel caso del foglio infinito. Come prima cosa dobbiamo adeguare il risultato statistico a questo tipo di geometria. In simmetria sferica il comportamento dei tre assi è il medesimo e quindi si ha:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 3x^2$$

da cui si ricava:

$$x^2 = \frac{r^2}{3}$$

Se vogliamo dunque una relazione che esprima il legame con una variabile che descrive la distanza da un piano fissato non dobbiamo far altro che dividere per 3 i risultati validi per r; risulterà pertanto che il risultato statistico sarà il seguente:

$$\overline{x^2}_{stat} = \frac{2}{3} l_a l_{tot} \quad (2)$$

Applichiamo ora i risultati della teoria della diffusione. Si avrà:

$$\overline{x^2} = \int_0^{\infty} x^2 p(x) dx$$

dove la probabilità p(x) si ottiene come rapporto tra il tasso di cattura e l'intensità, ovvero, nel caso del piano infinito:

$$p(x) dx = \frac{\Sigma_a f(x) dx}{\mathbf{r}_0 / 2}$$

Notiamo che descrivere il comportamento medio significa, in sostanza, non distinguere tra i diversi possibili percorsi che può utilizzare un neutrone per allontanarsi di un tratto x dalla sorgente. Combinando l'ultima relazione scritta con l'espressione del flusso che abbiamo trovato per la situazione della sorgente piana infinita, si ottiene:

$$p(x) dx = \Sigma_a e^{-x/L} dx \frac{L}{D}$$

Si avrà dunque:

$$\overline{x^2} = \int_0^{\infty} x^2 \Sigma_a \frac{L}{D} e^{-x/L} dx = 2L^2 = 2 \frac{D}{\Sigma_a} = 2 \frac{\Sigma_s}{3 \Sigma_{tot} \Sigma_a} = \frac{2}{3} \frac{l_{tot} l_a}{l_s}$$

Confrontando questa relazione con l'espressione (2) possiamo notare come i due approcci non coincidano a meno di non porre che sia:

$$\Sigma_a \ll \Sigma_s$$

che è poi l'ipotesi della teoria, ciò imporrebbe:

$$l_{tot} \approx l_s$$

e questo metterebbe le cose a posto.

Possiamo ora studiare altre geometrie; per farlo ricordiamo le espressioni dell'operatore laplaciano in coordinate sferiche e cilindriche:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{sfer}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \sin J \frac{\partial}{\partial J} \sin J \frac{\partial}{\partial J} + \frac{1}{r^2} \sin^2 J \frac{\partial^2}{\partial j^2} \\ \nabla_{cil}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial J^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{array} \right.$$

Passiamo dunque a studiare il caso di sorgente puntiforme in un mezzo infinito, nel quale si utilizzeranno le coordinate sferiche. L'intensità della sorgente puntiforme sia di \mathbf{r}_0 neutroni al secondo; siccome consideriamo una distribuzione isotropa, per una questione di simmetrie il flusso sarà solo funzione della coordinata radiale r e non delle due coordinate angolari θ e φ . L'equazione della diffusione si riduce allora alla seguente forma:

$$\frac{D}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} f(r) - \Sigma_a f(r) + S = \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial t}$$

Il problema viene sostanzialmente trattato come quello della lastra infinita; trasformiamo dunque l'equazione appena scritta in modo da ottenere la seguente forma della omogenea associata:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\mathbf{f}) - \frac{\mathbf{f}}{L^2} = 0$$

Introduciamo ora una funzione ausiliaria F che definiamo nel modo seguente:

$$F = \mathbf{f}r$$

Possiamo così combinare le ultime due relazioni scritte ed ottenere:

$$\frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{F}{L^2} = 0$$

Siamo così ritornati ad avere una struttura assolutamente identica a quella relativa al caso della superficie infinita; la soluzione avrà allora la seguente forma:

$$\mathbf{f}(r) = A \frac{e^{-r/L}}{r} + B \frac{e^{r/L}}{r}$$

Anche in questo caso ci troveremo nella necessità di porre nulla la costante moltiplicativa B , ottenendo:

$$\mathbf{f}(r) = A \frac{e^{-r/L}}{r}$$

Anche in questo caso la costante moltiplicativa A si ottiene imponendo le condizioni di sorgente e, anche in questo caso, si possono seguire due approcci differenti:

- 1) Immaginiamo in primo luogo una superficie sonda che sia una sfera di raggio r e quindi di superficie $4\pi r^2$ che racchiuda la sorgente e conteggi i neutroni; è chiaro che, per r tendente a zero, questo numero dovrà essere uguale a \mathbf{r}_0 . Il numero di neutroni che attraversano la superficie è dato dal prodotto di J_r , per la superficie; la condizione sarà allora:

$$\lim_{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 J_r = \mathbf{r}_0$$

Nel caso in analisi, inoltre, si avrà:

$$J_r = -D \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial r}$$

Con una serie di passaggi identici a quelli fatti nel caso della piastra infinita si ottiene quindi:

$$A = \frac{\mathbf{r}_0}{4\pi D}$$

- 2) Il secondo metodo è concettualmente identico al secondo metodo utilizzato nel caso piano infinito e ci porta alla seguente relazione:

$$\int_0^{\infty} \Sigma_a \mathbf{f}(r) 4\pi r^2 dr = \mathbf{r}_0$$

dalla quale si torna ad ottenere:

$$A = \frac{\mathbf{r}_0}{4\pi D}$$

Con entrambi gli approcci, dunque, si perviene alle seguente espressione del flusso:

$$\mathbf{f}(r) = \frac{\mathbf{r}_0}{4\pi D} \frac{e^{-r/L}}{r}$$

Anche in questo caso verifichiamo la congruenza tra lo studio statistico e quello dovuto al solo bilancio; nel caso statistico si ha, ancora:

$$\overline{r^2}_{stat} = 2l_a l_{tot}$$

Nel caso del bilancio si ha invece:

$$\overline{r^2}_{bil} = \int_0^{\infty} r^2 \frac{\Sigma_a \mathbf{f}(r) 4\pi r^2 dr}{\mathbf{r}_0} = 6L^2$$

Come ci si poteva aspettare abbiamo trovato un valore pari a 3 volte quello trovato nel caso del piano.

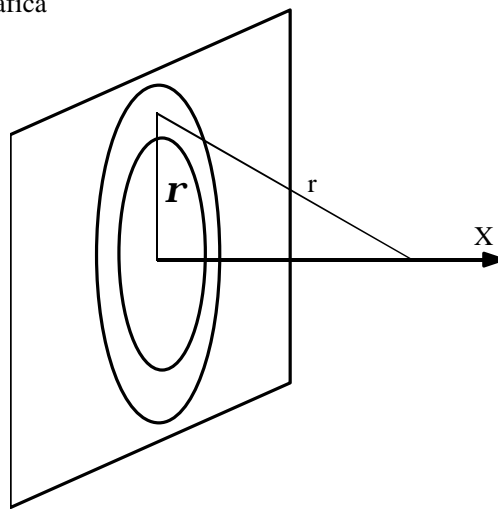
Potremmo a questo punto passare ad una diversa geometria, in particolare potremmo occuparci della sorgente a filo infinito; in realtà la fisica del problema è la stessa ma non conviene addentrarci ora nei dettagli matematici perché la simmetria cilindrica ci impone di introdurre le funzioni di Bessel.

Riportiamo dunque la seguente tabella riassuntiva nella quale si esprimono i risultati ottenuti con il metodo statistico e con il metodo del bilancio:

	Metodo statistico	Metodo del bilancio
Piano	$\frac{2}{3}l_a l_{tot}$	$2L^2$
Filo	$\frac{4}{3}l_a l_{tot}$	$4L^2 *$
Punto	$2l_a l_{tot}$	$6L^2$

*Per quanto detto in precedenza è sufficiente moltiplicare per 2 il risultato del caso piano.

Vediamo ora un esempio di applicazione del principio di sovrapposizione e cerchiamo di ritrovare l'espressione del flusso relativa al caso del piano partendo da quanto visto a proposito del caso del punto. Facciamo dunque riferimento alla seguente rappresentazione grafica



Ovviamente si ha:

$$r^2 = r^2 + x^2$$

dalla quale si ricava che:

$$rdr = rdr$$

Notiamo come il punto di osservazione non distingue i punti appartenenti alla corona infinitesima che sono tutti uguali. Per sapere dunque quale flusso compete alla corona circolare utilizzerò la soluzione legata al caso puntiforme, la moltiplicherò per la superficie della corona circolare e poi integrerò il tutto su tutti i valori di ρ . Si otterrà così:

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{r_0}{4pD} \frac{e^{-r/L}}{r} 2pdr$$

Sostituendo la variabile di integrazione ρ con r , si avrà:

$$f(x) = \int_x^{\infty} \frac{r_0}{4pD} \frac{e^{-r/L}}{r} 2pdr = \frac{r_0}{2} \frac{L}{D} e^{-x/L}$$

che è il medesimo valore che avevamo già trovato analizzando in precedenza il caso della superficie piana infinita. Purtroppo, tentando un ragionamento simile per il caso della sorgente filiforme infinita, non si riesce ad evitare la comparsa delle funzioni di Bessel. Il risultato relativo al filo mostrerà un flusso proporzionale a $K_0(r)$.

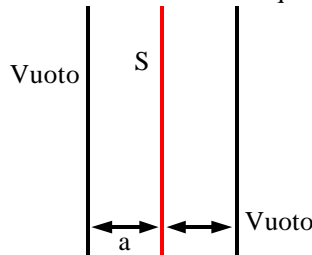
E' interessante notare che in tutte le soluzioni trovate fino ad ora il flusso mostra sempre la stessa concavità (verso l'alto); questo fatto è dovuto ad una ragione fisica. Infatti, ricordando la relazione seguente (pensata per esempio nel caso del piano):

$$J_x = -D \frac{\partial f}{\partial x}$$

si nota che una forte pendenza equivale a fornire un cospicuo ingresso netto di neutroni attraverso la sezione considerata; nelle soluzioni viste la pendenza cala sempre più e questo significa che anche la corrente netta si riduce

sempre di più. Il fatto coincide con la situazione fisica poiché nello spazio avvengono solamente catture. Una situazione di questo tipo si ha ogni volta che ci si trova a trattare sorgenti singolari.

Possiamo ora trattare una situazione più realistica, quella dei mezzi omogenei finiti. Vogliamo cercare di cogliere la logica ed il significato fisico di queste nuove situazioni. Per farlo senza appesantirci eccessivamente in inutili dettagli matematici cerchiamo la situazione più agevolmente trattabile che è quella della lastra piana di spessore finito a .



Dal punto di vista fisico, la differenza sostanziale con il caso precedentemente visto è che ora sono possibili le fughe. Immaginando ancora che la sorgente S sia costante nel tempo, l'equazione della diffusione sarà ancora:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2} - \frac{\mathbf{f}}{L^2} = 0$$

E' ora necessario imporre delle condizioni al contorno verso il vuoto. Ribadiamo ancora una volta che, dovendo agire necessariamente sulla superficie, ci mettiamo in zone dove la teoria della diffusione risulta inadatta; cercheremo allora condizioni di validità approssimata (sapendo che quelle esatte sono date dalla teoria del trasporto). Notiamo che i neutroni che fuggono attraverso la superficie hanno probabilità nulla di tornarvi in quanto non esiste scattering all'esterno; possiamo formalizzare questa situazione imponendo che sia:

$$\left(J_x^- \right)_{\text{sup}} = \left[\frac{\Sigma_s \mathbf{f}}{\Sigma_{\text{tot}}} \frac{1}{4} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \frac{\Sigma_s}{6 \Sigma_{\text{tot}}^2} \right]_{\text{sup}} = 0$$

dalla quale si ricava:

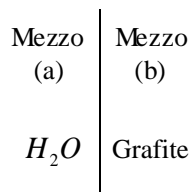
$$\mathbf{f}_{\text{sup}} + \frac{2}{3} l_{\text{tot}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0$$

Come c'era da aspettarsi dal punto di vista analitico: sulla superficie il valore del flusso e la sua pendenza sono legati. Si può dare una lettura geometrica più semplice della relazione da noi trovata immaginando di prolungare nel vuoto la soluzione del flusso tramite una retta con pendenza uguale a quella del flusso sulla superficie, notiamo che essa si annulla ad una distanza

$$d = \frac{2}{3} l_{\text{tot}}$$

dalla superficie stessa. Sarà quindi per noi comodo imporre che il flusso si deve annullare al contorno estrapolato, ottenuto aggiungendo all'esterno della superficie uno spessore pari a d . Ingrandendo la zona considerata, la condizione al contorno diventa semplicemente l'annullamento del flusso al contorno estrapolato. Ricordando poi il significato di l_{tot} , è evidente che si tratta di aggiungere delle lunghezze piuttosto modeste. La condizione è che le dimensioni, in questo caso lo spessore della lastra, siano molto maggiori di l_{tot} : in questa situazione si potrà dire che la soluzione è valida ovunque eccetto che a distanze dell'ordine di l_{tot} dalla superficie (va da sé che se si dovesse avere che a è circa uguale a l_{tot} la teoria della diffusione non sarebbe applicabile). Si parla di distanza di rispetto che è solitamente posta pari a sette volte l_{tot} . Questo ragionamento lo applichiamo in generale e parleremo d'ora in poi di distanza di estrapolazione.

Occupiamoci ora dei mezzi non omogenei e consideriamo quello che succede sulla superficie di separazione di due mezzi diversi a e b .



Dobbiamo trovare delle opportune condizioni al contorno tra i due materiali (ovviamente dovrà sempre essere valida, per entrambi i materiali, la fortissima differenza tra la sezione d'urto macroscopica di scattering –predominante- e la sezione d'urto macroscopica di assorbimento –trascurabile). Proviamo dunque ad immaginare la seguente esperienza: si

prendono due superfici sonda da 1 cm^2 e le si pongono ad una certa distanza dalla superficie di separazione in modo che una delle due sia nel mezzo a la seconda sia nel mezzo b. Si considerano poi i versori normali alla superficie, rivolti nello stesso verso, uno all'interno del mezzo a e il secondo all'interno del mezzo b. Voglio ora cercare di esprimere i vettori \vec{J}_{na} e \vec{J}_{nb} . Ovviamente, quando questi due vettori vengono conteggiati sulla superficie di separazione tra i due mezzi, dovranno coincidere perché in quella zona, gli attraversamenti netti in una superficie di controllo di 1 cm^2 sono ovviamente uguali, sia se vengono visti come facenti parte del materiale a, sia se vengono visti facenti parte del materiale b. Il medesimo discorso vale anche per gli attraversamenti parziali e questo significa aver imposto che sia:

$$\begin{cases} J_{na}^+ \equiv J_{nb}^+ \\ J_{na}^- \equiv J_{nb}^- \end{cases}$$

Esplicitiamo allora queste due condizioni (che devono valere contemporaneamente) e otteniamo:

$$\begin{cases} \left[\frac{\Sigma_s \mathbf{f}}{\Sigma_{tot}} \frac{1}{4} - \frac{\Sigma_s}{6\Sigma_{tot}^2} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial n} \right]_a = \left[\frac{\Sigma_s \mathbf{f}}{\Sigma_{tot}} \frac{1}{4} - \frac{\Sigma_s}{6\Sigma_{tot}^2} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial n} \right]_b \\ \left[\frac{\Sigma_s \mathbf{f}}{\Sigma_{tot}} \frac{1}{4} + \frac{\Sigma_s}{6\Sigma_{tot}^2} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial n} \right]_a = \left[\frac{\Sigma_s \mathbf{f}}{\Sigma_{tot}} \frac{1}{4} + \frac{\Sigma_s}{6\Sigma_{tot}^2} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial n} \right]_b \end{cases} \quad (3)$$

Sommando membro a membro le relazioni che appaiono in questo sistema se ne vanno le derivate e si ottiene:

$$\left[\frac{\Sigma_s}{\Sigma_{tot}} \mathbf{f} \right]_a = \left[\frac{\Sigma_s}{\Sigma_{tot}} \mathbf{f} \right]_b$$

Trattandosi poi sempre di mezzi poco assorbenti nei quali la sezione d'urto macroscopica totale coincide praticamente con quella di scattering si ottiene:

$$\mathbf{f}_a = \mathbf{f}_b$$

Si deve dunque imporre l'uguaglianza dei flussi alla superficie di separazione. Sommando, invece, membro a membro le due relazioni del sistema (3) si ottiene:

$$\left[D \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial n} \right]_a = \left[D \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial n} \right]_b$$

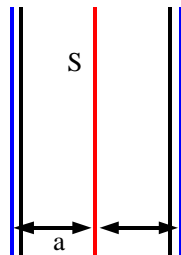
ovvero:

$$J_{na} = J_{nb}$$

e quindi si impone anche l'uguaglianza delle correnti nette.

Applichiamo questo discorso sui mezzi non omogenei alla situazione che avevamo introdotto precedentemente nella quale si considerava una lastra piana infinita di spessore $2a$. Precisiamo che per noi a rappresenta la somma dello spessore fisico e della distanza di estrapolazione, ovvero:

$$a = a_{fis} + \frac{2}{3} l_{tot}$$



Come avevamo accennato in precedenza l'equazione sarà:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2} - \frac{\mathbf{f}}{L^2} = 0$$

dalla quale si ricava:

$$\mathbf{f}(x) = Ae^{-x/L} + Be^{x/L}$$

In questa situazione non si deve eliminare l'esponenziale positivo, si deve invece cercare una combinazione di esponenziali che si annulli in $\pm a$. Una simile combinazione di esponenziali può essere il seno iperbolico, pur di trovare un argomento opportuno. Possiamo ricavare quello che volevamo imponendo che l'argomento sia il seguente

$$t = \frac{a/2 - x}{L}$$

Si ottiene dunque:

$$f(x) = A \cdot \sinh\left(\frac{a/2 - x}{L}\right)$$

L'unico modo con il quale possiamo ora ricavare la costante A è quello delle condizioni di sorgente (il secondo approccio non è utilizzabile per i mezzi finiti). Si avrà allora:

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_x = \frac{r_0}{2}$$

ovvero:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-D \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{r_0}{2}$$

ovvero:

$$\frac{DA}{L} \cosh\left(\frac{a}{2L}\right) = \frac{r_0}{2}$$

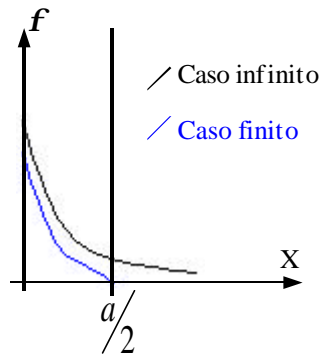
e quindi:

$$A = \frac{r_0}{2} \frac{L}{D} \frac{1}{\cosh\left(\frac{a}{2L}\right)}$$

Osserviamo che c'è un termine che tiene conto della dimensione finita del mezzo; notiamo inoltre che facendo tendere a all'infinito si torna alla soluzione vista nel caso della sorgente piana infinita nel mezzo infinito omogeneo. Complessivamente si ha allora:

$$f(x) = \frac{r_0}{2} \frac{L}{D} \frac{\sinh\left(\frac{a/2 - x}{L}\right)}{\cosh\left(\frac{a}{2L}\right)}$$

Osserviamo ora il seguente grafico nel quale viene sottolineato come il flusso sia meno intenso in ogni punto del mezzo rispetto al caso infinito.



La differenza è ovvia perché, nel caso finito, i neutroni hanno una possibilità in più di sparire: la fuga. Possiamo allora calcolare il rapporto tra i flussi nell'origine relativamente al caso finito e al caso infinito:

$$\left(\frac{f_{fin}}{f_{\infty}} \right)_{x=0} = \tanh\left(\frac{a}{2L}\right)$$