

Le risonanze di cattura. Approssimazione NR.

Consideriamo ora la probabilità che un neutrone ha di sopravvivere al rallentamento che lo porta da un'energia E_0 ad un'energia E ; tale probabilità sarà data da:

$$p(E_0 \rightarrow E) = 1 - \frac{1}{S} Catt(E_0 \rightarrow E)$$

dove, con Catt si intende il numero di catture che avvengono nella zona energetica considerata. Il numero di catture può essere espresso nel modo seguente:

$$Catt(E_0 \rightarrow E) = \int_E^{E_0} \Sigma_a(E) f(E) dE$$

A volte le catture si concentrano, però, non lungo tutto il percorso energetico ma soltanto in intervalli particolarmente concentrati: le risonanze. Vediamo dunque come gestire queste situazioni. Mettiamoci, per iniziare, nel caso semplice in cui sia presente una sola risonanza: le catture che avvengono nella zona di risonanza sono date dalla seguente relazione:

$$Catt_{Ris} = \int_{\langle Ris \rangle} \Sigma_a(E) f(E) dE$$

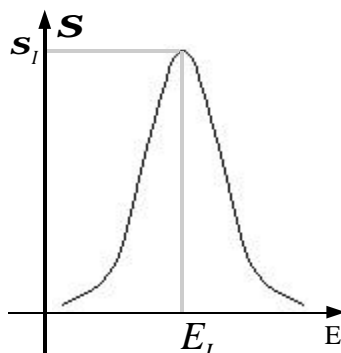
Mettendosi nell'ipotesi che il moderatore assorba molto poco in confronto a quanto assorbe l'assorbitore, si avrà:

$$\Sigma_a = N^{Ass} s_g^{Ass}(E)$$

dove Ass sta per assorbitore. Ci rifacciamo ora alla formula di Breit-Wigner relativa alla singola risonanza, secondo la quale:

$$s_g(E) = p \lambda_1^2 g \sqrt{\frac{E_1}{E}} \frac{\Gamma_n \Gamma_g}{(E - E_1)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

il cui andamento è rappresentato nella figura seguente.



Il valore di picco sarà:

$$s_1 = s_g(E_1) = p \lambda_1^2 g \frac{\Gamma_n \Gamma_g}{\Gamma^2 / 4}$$

Combinando le ultime due relazioni scritte si ottiene:

$$s_g(E) = \frac{s_1}{1 + (E - E_1)^2 \frac{4}{\Gamma^2}}$$

Definiamo ora, per semplicità, la variabile x così espressa:

$$x = (E - E_1) \frac{2}{\Gamma}$$

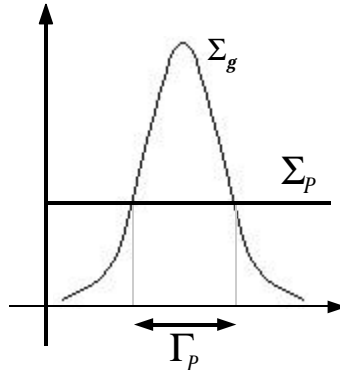
che mi permette di centrare la curva nell'origine di un sistema di riferimento; combinando inoltre le ultime due relazioni scritte, si ottiene:

$$s_g(x) = \frac{s_1}{1 + x^2}$$

Ovviamente bisogna comunque tener conto degli eventi di scattering (sia quelli dell'assorbitore che quelli del moderatore) definiamo allora una sezione d'urto macroscopica potenziale come segue:

$$\Sigma_p = N^M \mathbf{s}_s^M + N^A \mathbf{s}_s^A \quad (1)$$

dove M ed A stanno, rispettivamente, per moderatore ed assorbitore. Considerando allora la seguente rappresentazione grafica



vediamo che il pericolo per i neutroni si presenta nella zona in cui:

$$\Sigma_g > \Sigma_p$$

E' possibile, quindi, che la larghezza Γ_p sia maggiore della larghezza Γ della risonanza stessa. Passando alla variabile x , la larghezza Γ_p si deduce trovando i punti x per cui $\Sigma_g = \Sigma_p$:

$$\Sigma_p = N^A \frac{\mathbf{s}_1}{1 + x^2}$$

dalla quale si ricava:

$$1 + x^2 = \frac{N_A \mathbf{s}_1}{\Sigma_p}$$

e quindi:

$$x = \sqrt{\frac{N_A \mathbf{s}_1}{\Sigma_p} - 1} \approx \sqrt{\frac{N_A \mathbf{s}_1}{\Sigma_p}}$$

Si avrà dunque:

$$\Gamma_p = \Gamma \sqrt{\frac{N_A \mathbf{s}_1}{\Sigma_p}} \quad (2)$$

La risonanza dell' ^{238}U ad energia più bassa, che è anche la più assorbente, è caratterizzata dai seguenti dati numerici:

$$\begin{cases} E_1 = 6,67\text{eV} \\ \Gamma = 0,027\text{eV} \\ \mathbf{s}_1 = 21000\text{b} \end{cases}$$

Ricordando la relazione (1) osserviamo che:

$$\frac{\Sigma_p}{N^A} = \frac{N^M \mathbf{s}_s^M + N^A \mathbf{s}_s^A}{N^A} = \frac{N^M}{N^A} \mathbf{s}_s^M + \mathbf{s}_s^A = \mathbf{s}_p$$

in cui \mathbf{s}_p assume il significato di "sezione d'urto di scattering (potenziale) attribuita ad ogni atomo di assorbitore", e tiene conto del contributo del moderatore. La relazione (2) può dunque essere riscritta nel modo seguente:

$$\Gamma_p = \Gamma \sqrt{\frac{\mathbf{s}_1}{\mathbf{s}_p}}$$

Nel caso in cui il moderatore fosse Idrogeno puro, mettendosi nella seguente situazione particolare:

$$\begin{cases} \mathbf{s}_s^M = 20b \\ \frac{N^M}{N^A} = 1 \\ \mathbf{s}_s^{238} = 10b \end{cases}$$

si otterrebbe:

$$\Gamma_p = 0,027 \sqrt{\frac{21000}{30}} = 0,71$$

e questo significa che avremmo una banda di pericolo 26,3 volte più grande rispetto alla larghezza della risonanza. Dopo aver analizzato come si può trovare la “zona di pericolo” di una risonanza, ossia l’intervallo energetico in cui è probabile che, se avviene una collisione, dia origine ad una cattura nell’assorbitore, occupiamoci in dettaglio dei neutroni che affrontano tale pericolo. Osserviamo, innanzitutto, che quando un neutrone va incontro ad un fenomeno di scattering con il moderatore nelle vicinanze dell’energia di risonanza, perde in media la seguente quantità di energia:

$$\Delta E_M = \frac{E_1(1 - a_M)}{2}$$

e quindi i neutroni compiono un salto energetico piuttosto grande. La perdita media di energia dovuta ad eventi di scattering con l’assorbitore (continuiamo a supporre che l’assorbitore sia ^{238}U) nelle vicinanze dell’energia di risonanza sarà invece:

$$\Delta E_{238} = \frac{E_1(1 - a_{238})}{2}$$

e quindi si tratta di salti energetici molto più piccoli. Supponiamo comunque che valgano le seguenti due relazioni:

$$\begin{cases} \Delta E_M > \Gamma_p \\ \Delta E_{238} > \Gamma_p \end{cases}$$

e questo avviene sicuramente quando l’energia di risonanza è abbastanza alta (risonanza ad alta energia). In una situazione come questa, i neutroni che collidono ad energie vicine all’energia di risonanza, o subiscono uno scattering che li porta fuori dalla zona di pericolo, oppure vengono assorbiti; sono invece vietati scattering multipli all’interno della zona di pericolo. Valutiamo dunque la densità di collisione sotto la risonanza: il termine di ingresso nella risonanza sarà indipendente dalla risonanza stessa (perché i neutroni, provenendo da energie superiori, arrivano alla risonanza senza sapere che c’è) e quindi si usa la soluzione asintotica che già conosciamo:

$$F_{in}(E) = \frac{S}{\Sigma E}$$

mentre il termine di uscita sarà:

$$F_{out}(E) = \Sigma_{Tot}(E)f(E)$$

Uguagliando i due termini si ricava:

$$\Sigma_{Tot}(E)f(E) = \frac{S}{\Sigma E}$$

dove $\phi(E)$ è il flusso sotto la risonanza. Per le risonanze ad alta energia si può dunque scrivere:

$$p = 1 - \frac{1}{S} \int_{\langle Ris \rangle} \Sigma_a(E)f(E)dE = 1 - \int_{\langle Ris \rangle} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{Tot}} \frac{dE}{E}$$

La formula di Breit-Wigner ricompare dunque sotto il segno di integrale. Questa approssimazione prende il nome di approssimazione Narrow Resonance (NR).

Nel seguito dovremo occuparci delle risonanze anche a bassa energia.

Approssimazione NRIM. Effetto Doppler sulle risonanze. Più risonanze. Integrale efficace di risonanza. Reattori eterogenei. Il fattore di fissione veloce e.

Continuiamo il nostro discorso sulle risonanze; dovremo oggi occuparci delle risonanze a bassa energia come, ad esempio, la risonanza più bassa dell' ^{238}U che è a 6,67eV. In una situazione come questa si avrà che, facendo riferimento a quanto visto nella scorsa lezione:

$$\begin{cases} \Delta E_M > \Gamma_P \\ \Delta E_{238} < \Gamma_P \end{cases}$$

Questo significa che, se il neutrone scatterà con il moderatore, salterà fuori dalla zona di pericolo, mentre se urta con l'assorbitore, o viene assorbito oppure scatterà rimanendo comunque nella zona di pericolo. Poniamo che si abbia:

$$\Delta E_{238} \ll \Gamma_P$$

ovvero che il passo energetico compiuto da un neutrone che scatterà con l'assorbitore è praticamente trascurabile (l'assorbitore dunque non dà contributo al rallentamento e quindi è come se l'assorbitore avesse massa infinita). In questa situazione la densità di collisione sotto la risonanza è caratterizzata dal seguente termine di ingresso:

$$F_{In}(E)dE = \frac{S}{\mathbf{x}_M E} dE$$

e dal seguente termine di uscita:

$$F_{Out}(E)dE = \Sigma_{Tot}^* f(E)dE$$

dove sia:

$$\Sigma_{Tot}^* = N^M \mathbf{s}_s^M + \Sigma_g$$

Uguagliando il termine di ingresso e il termine di uscita si ottiene:

$$\frac{S}{\mathbf{x}_M E} dE = \Sigma_{Tot}^* f(E)dE$$

Da questa relazione si ricava:

$$f(E) = \frac{S}{\mathbf{x}_M \Sigma_{Tot}^* E}$$

L'approssimazione che abbiamo fatto in questo caso prende il nome di Narrow Resonance Infinite Mass (NRIM). Genericamente possiamo allora affermare che la probabilità che un neutrone venga catturato da una risonanza durante il rallentamento è la seguente:

$$p_{Catt} = \int_{\langle Ris \rangle} \frac{\Sigma_a}{\mathbf{x} \Sigma_{Tot}} \frac{dE^I}{E^I} \quad (1)$$

dove, a seconda delle due diverse possibili approssimazioni, si avrà: nel caso dell'approssimazione NR:

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$$

e il Σ_{Tot} che comprende gli scattering dovuti sia al moderatore che all'assorbitore; nell'approssimazione NRIM:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_M$$

e il Σ_{Tot} che si riferisce allo scattering con il solo moderatore.

Osservando, ora, che le risonanze sono molto strette, possiamo approssimare ulteriormente la relazione (1) riscrivendola nel modo seguente:

$$p_{Catt} = \frac{1}{\mathbf{x} E_1} \int_{\langle Ris \rangle} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{Tot}} dE \quad (2)$$

Siccome si era anche posto:

$$\Sigma_a = N_A \mathbf{s}_g^A = N_A \frac{\mathbf{s}_1}{1 + x^2}$$

e, inoltre, si ha:

$$dE = \frac{\Gamma}{2} dx$$

si può modificare ulteriormente la relazione (2) ottenendo:

$$p_{Catt} = \frac{\Gamma}{2} \frac{N_A}{x E_1 \Sigma_p} \int \frac{\frac{s_1}{1+x^2}}{1 + \frac{\Sigma_g}{\Sigma_p}} dx = \frac{\Gamma}{2} \frac{N_A}{x E_1 \Sigma_p} \int \frac{\frac{s_1}{1+x^2}}{1 + \frac{N_A s_1}{\Sigma_p}} dx = \frac{\Gamma}{2} \frac{N_A s_1}{x E_1 \Sigma_p} \int \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1 + \frac{1+x^2}{\Sigma_p}} dx$$

L'ammontare di scattering per ogni atomo di assorbitore può poi essere così definito:

$$s_p = \frac{\Sigma_p}{N_A}$$

e quindi, combinando le ultime due relazioni scritte, si ottiene:

$$p_{Catt} = \frac{\Gamma s_1}{2 x E_1 s_p} \int \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1 + \frac{s_1}{s_p} \frac{1}{1+x^2}} dx \quad (3)$$

Ponendo:

$$a^2 = 1 + \frac{s_1}{s_p}$$

si ottiene un integrale del tipo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \left[\frac{1}{a} \arctan x \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{a}$$

e quindi la relazione (3) diventa:

$$p_{Catt} = \frac{\Gamma s_1 \pi}{2 x E_1 s_p a}$$

Vediamo ora due esempi numerici. Il primo esempio numerico si riferisce al caso della risonanza a bassa energia ed è caratterizzato dai seguenti dati nucleari:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = 21000b \\ \Gamma = 0,027eV \\ E_1 = 6,67eV \\ E_{Max} = 20eV \\ E_{Min} = 0,5eV \\ s_s^H = 20b \\ N_M / N_A = 1 \\ s_s^{238} = 10b \\ a_{238} = 0,98333 \\ x_{238} = 0,83798 \cdot 10^{-2} \\ s_p = 30b \\ \bar{x} = 0,66946 \\ \Gamma_p = 0,71384eV \\ \Delta E_H = 3,3350eV \\ \Delta E_{238} = 0,055582eV \end{array} \right.$$

Le probabilità di cattura calcolate con i due metodi di approssimazione che abbiamo fin qui visto sono le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{CattNR} = 0,25112 \\ p_{CattNRIM} = 0,20594 \end{array} \right.$$

Confrontiamo questi risultati con i dati ottenuti grazie alle simulazioni con il metodo Montecarlo che affronta di forza il problema senza utilizzare nessuna semplificazione. Sfruttiamo allora il metodo Montecarlo valutando la storia di 1000000 di neutroni e ottenendo i seguenti risultati:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{atture} = 191118 \\ \bar{n}_{Urti} = 6 \\ \bar{E}_{Catt} = 6,47eV \\ P_{CattMon} = 0,19112 \end{array} \right.$$

Confrontando i dati ottenuti con le semplificazioni NR ed NRIM e i dati ottenuti con il metodo Montecarlo si osserva che, nel caso di risonanze a bassa energia, il metodo di approssimazione che da risultati più affidabili è, come si prevedeva, il metodo NRIM.

Il secondo esempio numerico si riferisce ad una risonanza ad alta energia ed è caratterizzato dai seguenti dati nucleari:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = 2000b \\ \Gamma = 0,048eV \\ E_1 = 273,7eV \\ E_{Max} = 2000eV \\ E_{Min} = 10eV \\ s_s^H = 20b \\ N_M / N_A = 1 \\ s_s^{238} = 10b \\ a_{238} = 0,98333 \\ x_{238} = 0,83798 \cdot 10^{-2} \\ s_p = 30b \\ \bar{x} = 0,66946 \\ \Gamma_p = 0,38897eV \\ \Delta E_H = 136,85eV \\ \Delta E_{238} = 2,2808eV \end{array} \right.$$

Le probabilità di cattura calcolate con i due metodi di approssimazione che abbiamo fin qui visto sono le seguenti:

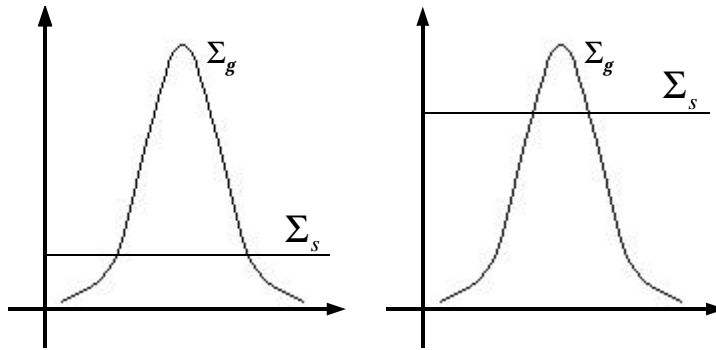
$$\left\{ \begin{array}{l} P_{CattNR} = 0,33349 \cdot 10^{-2} \\ P_{CattNRIM} = 0,27411 \cdot 10^{-2} \end{array} \right.$$

Sfruttiamo il metodo Montecarlo valutando la storia di 1000000 di neutroni e ottenendo i seguenti risultati:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{atture} = 3248 \\ \bar{n}_{Urti} = 9 \\ \bar{E}_{Catt} = 273,48eV \\ P_{CattMon} = 0,3248 \cdot 10^{-2} \end{array} \right.$$

Confrontando i dati ottenuti con le semplificazioni NR ed NRIM e i dati ottenuti con il metodo Montecarlo si osserva che, nel caso di risonanze ad alta energia, il metodo di approssimazione che da risultati più affidabili è, come si prevedeva, il metodo NR.

In entrambi gli esempi numerici si è ipotizzato che ci sia molto assorbitore nel mezzo (infatti il rapporto tra atomi di moderatore ed assorbitore è pari ad 1) e quindi ci si è posti in una situazione come quella rappresentata nella prima immagine della pagina seguente. Cambiando questo rapporto e portandolo, per esempio, al valore 500, ci si ritrova nella situazione descritta nella seconda immagine di questa pagina, nella quale la larghezza della zona di pericolo si restringe. Al limite, se il fondo piatto Σ_f cresce oltre il picco Σ_p si arriva ad avere una zona di pericolo Γ_p di larghezza nulla.



Rivediamo dunque l'esempio numerico prima visto per la risonanza a bassa energia ponendo che l'assorbitore sia molto più diluito. Consideriamo quindi i seguenti nuovi dati nucleari:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = 21000b \\ \Gamma = 0,027eV \\ E_1 = 6,67eV \\ E_{Max} = 20eV \\ E_{Min} = 1eV \\ s_s^H = 20b \\ N_M / N_A = 500 \\ s_s^{238} = 10b \\ a_{238} = 0,98333 \\ x_{238} = 0,83798 \cdot 10^{-2} \\ s_p = 10010b \\ \bar{x} = 0,99901 \\ \Gamma_p = 0,028291eV \\ \Delta E_H = 3,3350eV \\ \Delta E_{238} = 0,055582eV \end{array} \right.$$

Le probabilità di cattura calcolate con i due metodi di approssimazione che abbiamo fin qui visto sono le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{CattNR} = 0,75865 \cdot 10^{-2} \\ p_{CattNRIM} = 0,75840 \cdot 10^{-2} \end{array} \right.$$

Sfruttiamo il metodo Montecarlo valutando la storia di 1000000 di neutroni e ottenendo i seguenti risultati:

$$\left\{ \begin{array}{l} Catture = 7724 \\ \bar{n}_{Urti} = 3 \\ \bar{E}_{Catt} = 6,67eV \\ p_{CattMon} = 0,77240 \cdot 10^{-2} \end{array} \right.$$

Poiché il numero di catture è piuttosto ridotto cominciano a farsi sentire le incertezze statistiche del metodo Montecarlo. Anche in questo caso, di risonanza a bassa energia, il metodo di approssimazione più efficace appare essere il metodo NRIM; si osserva però che i risultati ricavati con i metodi NR ed NRIM tendono a coincidere.

Vediamo ora un esempio numerico di risonanza ad alta energia con assorbitore molto più diluito rispetto all'esempio precedente: partiamo dunque con il considerare i seguenti dati nucleari:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = 2000b \\ \Gamma = 0,048eV \\ E_1 = 273,7eV \\ E_{Max} = 2000eV \\ E_{Min} = 10eV \\ s_s^H = 20b \\ N_M / N_A = 500 \\ s_s^{238} = 10b \\ a_{238} = 0,98333 \\ x_{238} = 0,83798 \cdot 10^{-2} \\ s_p = 10010b \\ \bar{x} = 0,99901 \\ \Gamma_p = 0,048eV \\ \Delta E_H = 136,85eV \\ \Delta E_{238} = 2,2808eV \end{array} \right.$$

Le probabilità di cattura calcolate con i due metodi di approssimazione che abbiamo fin qui visto sono le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{CattNR} = 0,50299 \cdot 10^{-4} \\ p_{CattNRIM} = 0,50295 \cdot 10^{-4} \end{array} \right.$$

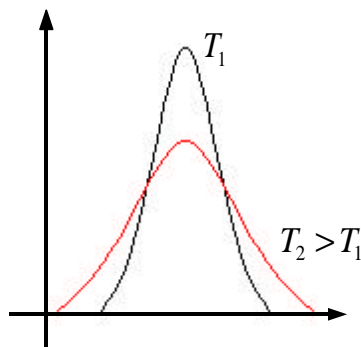
Sfruttiamo il metodo Montecarlo valutando la storia di 2000000 di neutroni e ottenendo i seguenti risultati:

$$\left\{ \begin{array}{l} Catture = 111 \\ \bar{n}_{Urti} = 6 \\ \bar{E}_{Catt} = 273,89eV \\ p_{CattMon} = 0,555 \cdot 10^{-4} \end{array} \right.$$

Poiché il numero di catture è molto ridotto, il risultato Montecarlo è affetto da un elevato errore relativo. Anche in questo caso, di risonanza ad alta energia, il metodo di approssimazione più efficace appare essere il metodo NR; si osserva però che i risultati ricavati con i metodi NR ed NRIM tendono a coincidere.

Concludendo possiamo affermare che il metodo NR è più affidabile nel caso di risonanze ad alta energia mentre il metodo NRIM è più affidabile per le risonanze a bassa energia; nella fascia energetica intermedia si dovrebbero fare dei calcoli che porterebbero ad un mix dei due casi.

E' importante sottolineare che l'ampiezza delle risonanze varia con il variare della temperatura a causa dell'effetto Doppler. Facciamo dunque riferimento al grafico seguente.

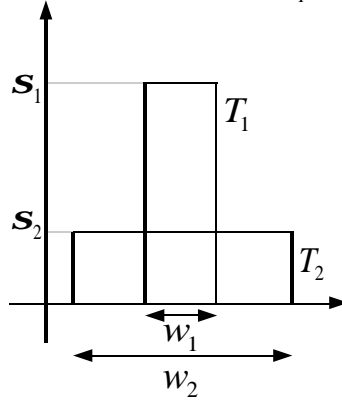


Possiamo osservare che l'area sotto la risonanza si mantiene costante, tuttavia il caso relativo alla temperatura maggiore comporta un maggior numero di catture. Per comprendere meglio quanto appena detto consideriamo la situazione semplificata che vediamo nella illustrazione seguente, in cui si immagina che la forma della risonanza sia un rettangolo, che non cambia area al cambiare della temperatura. Ciò si traduce nella semplice relazione:

$$S_1 w_1 = S_2 w_2$$

Ricordiamo ora la relazione (2) e, in particolare, concentriamoci sul solo integrale che vi appariva:

$$\int \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{Tot}} dE^I = \frac{N_A}{\Sigma_P} \int \frac{S_g(E^I)}{1 + \frac{N_A S_g(E^I)}{\Sigma_P}} dE^I$$



Facendo riferimento all'integrale a secondo membro dell'ultima relazione scritta si ha:

$$\int \frac{S_g(E^I)}{1 + \frac{S_g(E^I)}{S_P}} dE^I = \begin{cases} = \frac{const}{1 + \frac{S_1}{S_P}} & (T_1) \\ = \frac{const}{1 + \frac{S_2}{S_P}} & (T_2) \end{cases}$$

Siccome S_1 e S_2 sono diversi, le catture relative alle due diverse temperature saranno diverse (in particolare si avrà che le catture più numerose si avranno in corrispondenza della temperatura più elevata). L'effetto della temperatura tende ad annullarsi nei casi in cui il moderatore sia fortemente prevalente; ciò si spiega con il fatto che l'elevato valore di S_P riduce la variazione portata dalla differenza tra S_1 e S_2 .

Osserviamo che, in presenza di risonanze, il moderatore migliore è quello che permette ai neutroni di viaggiare con passi energetici più lunghi, (perché sarà così meno probabile cadere in una risonanza; in base a questa osservazione appare evidente che l'acqua, ricca di Idrogeno, è un moderatore migliore rispetto alla grafite perché l' α dell'idrogeno è pari a zero, mentre l' α del carbonio è pari a 0,716. L'acqua, dunque, aiuta maggiormente i neutroni a sfuggire dalle risonanze. Fino ad ora abbiamo sempre parlato come se ci fosse una sola risonanza; in realtà le risonanze che i neutroni possono incontrare durante il rallentamento sono tante; se per ogni risonanza vale allora la relazione:

$$p_i = 1 - \int \frac{\Sigma_{ai}}{x \Sigma_{Toti}} \frac{dE^I}{E^I}$$

quando siamo in presenza di tante risonanze si avrà:

$$p = \prod_{i=1}^N \left(1 - \int \frac{\Sigma_{ai}}{x \Sigma_{Toti}} \frac{dE^I}{E^I} \right)$$

ovvero, passando ai logaritmi:

$$\ln p = \sum_{i=1}^N \ln \left(1 - \int \frac{\Sigma_{ai}}{x \Sigma_{Toti}} \frac{dE^I}{E^I} \right)$$

Si avrà allora:

$$p \cong e^{-\int \frac{\Sigma_a}{x \Sigma_{Tot}} \frac{dE^I}{E^I}} \quad (4)$$

Il segno di "circa uguale" è dovuta al fatto che siamo passati ad un integrale globale. Concentriamoci dunque su tale integrale globale, che sarà:

$$\int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a}{\mathbf{x}\Sigma_{Tot}} \frac{dE^I}{E^I} = \frac{1}{\mathbf{x}} \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{Tot}} \frac{dE^I}{E^I} \quad (5)$$

Ricordiamo ora le due relazioni secondo le quali:

$$\begin{cases} \Sigma_a = N_A \mathbf{s}_g^A \\ \Sigma_{Tot} = N_A \mathbf{s}_g^A + \Sigma_P \end{cases}$$

Combinando allora le relazioni di questo sistema con l'espressione (5) si ottiene:

$$\int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a}{\mathbf{x}\Sigma_{Tot}} \frac{dE^I}{E^I} = \frac{N_A}{\mathbf{x}\Sigma_P} \int_E^{E_0} \frac{\mathbf{s}_g(E^I) dE^I}{1 + \frac{N_A \mathbf{s}_g^A(E^I)}{\Sigma_P} E^I}$$

Essendo poi:

$$\frac{\Sigma_P}{N_A} = \mathbf{s}_P$$

si ottiene, combinando le ultime due relazioni scritte:

$$\int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a}{\mathbf{x}\Sigma_{Tot}} \frac{dE^I}{E^I} = \frac{1}{\mathbf{x}\mathbf{s}_P} \int_E^{E_0} \frac{\mathbf{s}_g(E^I) dE^I}{1 + \frac{\mathbf{s}_g^A(E^I)}{\mathbf{s}_P} E^I}$$

All'interno dell'integrale a secondo membro dell'ultima relazione scritta sono contenute le informazioni sullo scattering della miscela; tale integrale prende il nome di integrale efficace di risonanza:

$$I_{Eff} = \int_E^{E_0} \frac{\mathbf{s}_g(E^I) dE^I}{1 + \frac{\mathbf{s}_g^A(E^I)}{\mathbf{s}_P} E^I}$$

Nel caso in cui si abbia diluizione infinita, ovvero nel caso in cui sia:

$$\frac{N_M}{N_A} \rightarrow \infty$$

si avrà anche:

$$\mathbf{s}_P = \frac{\Sigma_P}{N_A} \rightarrow \infty$$

e quindi l'integrale efficace diventa:

$$I_\infty = \int_E^{E_0} \mathbf{s}_g(E^I) \frac{dE^I}{E^I}$$

che, nel caso dell' ^{238}U vale:

$$I_\infty = 280b$$

Ovviamente sarà:

$$I_{Eff} < I_\infty$$

La differenza tra i due integrali è dovuta al fenomeno dell'autoschermo dell' ^{238}U .

Sfruttando la definizione di integrale efficace di risonanza possiamo riscrivere nel modo seguente la relazione (4):

$$p \cong e^{\frac{I_{Eff}}{\mathbf{x}\mathbf{s}_P}}$$

L'integrale efficace può poi essere riscritto nel modo seguente:

$$I_{eff} = a(\mathbf{s}_P)^c$$

dove a e c sono di origine sperimentale e, nel caso dell' ^{238}U , sono:

$$\begin{cases} a = 2,73 \\ c = 0,486 \end{cases}$$

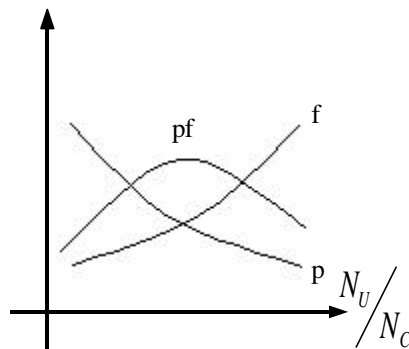
Consideriamo ora la miscela di Uranio naturale e Carbonio (grafite) e facciamo riferimento alla seguente tabella:

N_C/N_U	S_P	I_{Eff}	$P_{Salvezza}$
50	210	36,7	0,33
100	410	50,8	0,456
500	2010	110	0,71
1000	4010	154	0,784

Ovviamente a noi interessano delle situazioni nelle quali l'assorbimento durante il rallentamento non sia troppo alto. Una volta, poi, che i neutroni si sono termalizzati, mi serve la probabilità che vengano assorbiti dal combustibile, ovvero mi serve il termine f. Consideriamo allora la seguente tabella:

N_U/N_C	S_P	I_{Eff}	p	f	pf
$5 \cdot 10^{-4}$	8010	215	0,84	0,486	0,411
$2 \cdot 10^{-3}$	2010	110	0,707	0,792	0,56
$5 \cdot 10^{-3}$	810	70,7	0,575	0,905	0,52

L'andamento grafico di f, p e pf è allora il seguente:



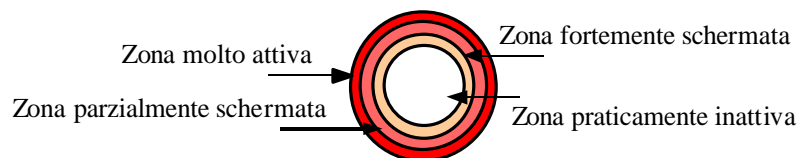
Vediamo dunque che il prodotto pf presenta un massimo che, osservando i dati riportati nell'ultima tabella, si può considerare essere 0,56. Per l'Uranio naturale, inoltre, si ha:

$$h_U = 1,33$$

e quindi, al massimo, si può ottenere:

$$pfh = 0,75$$

Non riusciamo dunque ad avvicinarci ad 1 e questo implica che un reattore omogeneo di uranio naturale e grafite non è realizzabile. Dovremo da ora in poi occuparci dei reattori eterogenei, ovvero di quei reattori nei quali l'Uranio non è in miscela con il moderatore ma è concentrato spazialmente. Solitamente, come vedremo, il combustibile è concentrato in barre cilindriche e questo permette di usare il fenomeno dell'autoschermo a proprio vantaggio. Come si vede nell'immagine seguente, infatti, solo l'Uranio che si trova sul bordo esterno della barra contribuisce alle catture durante il rallentamento perché quello all'interno, a causa, appunto, del fenomeno dell'autoschermo, vede un flusso molto depresso e cattura molto poco.



Si può dunque supporre che sarà:

$$p_{ete} > p_{omo}$$

Ovviamente c'è anche un rovescio della medaglia: se infatti il fenomeno di autoschermo vale per l'assorbimento dei neutroni durante la fase di rallentamento, varrà anche per quanto riguarda l'assorbimento dei neutroni termici e infatti solo l'Uranio esterno alla barra lavora in maniera ottimale mentre quello più interno risulta schermato; si avrà dunque:

$$f_{ete} < f_{om o}$$

Quello che dobbiamo andare a valutare sarà allora il prodotto pf . Nei reattori eterogenei prederà inoltre importanza la dipendenza spaziale del flusso.

Occupandoci dei reattori omogenei vedremo anche i contributi alla fissione dovuti all' ^{238}U che presenta una sezione d'urto alla fissione veloce non nulla. Le fissioni veloci avverranno all'inizio del rallentamento, quando i neutroni hanno un'energia superiore ad una certa soglia. Per tener conto delle fissioni veloci introdurremo un nuovo termine ϵ che è definito come il numero di neutroni ottenuti dalla fissione veloce dell' ^{238}U sommato con il numero di neutroni ottenuto dalla fissione termica dell' ^{235}U , il tutto diviso per il numero di neutroni ottenuti dalla fissione termica. Si troverà che:

$$e > 1$$

L'insieme dei fattori p , f , η ed ϵ servono per descrivere l'intero ciclo dei neutroni. Supponendo infatti di avere N neutroni veloci nati dalla fissione termica dell' ^{235}U ; a causa della fissione veloce dell' ^{238}U i neutroni che inizieranno il rallentamento saranno ϵN . Quello che succede durante il rallentamento e in zona termica è poi espresso, come abbiamo precedentemente visto, dal prodotto $pf\eta$. Possiamo dunque dire che il ciclo dei neutroni è bilanciato qualora si abbia:

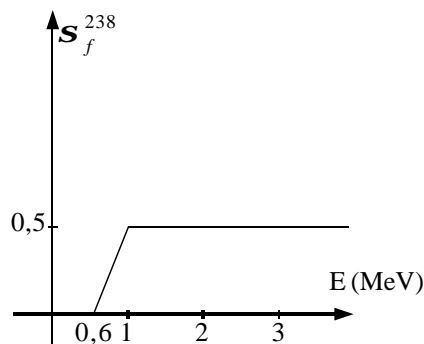
$$N = \epsilon N p f \eta$$

Nella prossima lezione ci concentreremo sul termine ϵ che, per come è stato definito, può essere espresso nel modo seguente:

$$e = 1 + \frac{n_{238}}{n_{235}} = 1 + \frac{\sum_f^{238} f_{vel}}{\sum_f^{235} f_{Th}}$$

Fattore di fissione veloce e. Criticità alla Fermi.

Per poter parlare, come si è anticipato durante la scorsa lezione, del fattore di fissione veloce ϵ , è opportuno fare riferimento al grafico seguente che esprime l'andamento della sezione d'urto microscopica relativa alla fissione dell' ^{238}U .



Si ricordi che si era definito il fattore ϵ come il rapporto tra la somma dei neutroni veloci nati dalla fissione veloce dell' ^{238}U e dalla fissione termica dell' ^{235}U e il numero dei neutroni veloci nati dalla sola fissione termica dell' ^{235}U . Il fattore ϵ poteva dunque essere espresso nel modo seguente:

$$\epsilon = 1 + \frac{n_{238}}{n_{235}}$$

Per esplicitare il rapporto che vediamo apparire a secondo membro dell'ultima relazione scritta andiamo a calcolare la probabilità che, nel primo tratto della strada energetica, i neutroni diano origine a fissione veloce con l' ^{238}U : tale probabilità è data dal rapporto tra le fissioni veloci sull' ^{238}U e tutti gli altri eventi ai quali i neutroni possono andare incontro, che in gran parte sono costituiti da scattering col moderatore, ovvero:

$$p_f^{238} \cong \frac{N_{238} s_f^{238}(E)}{N_{Mod} s_s^{Mod}(E)}$$

Questa è un'approssimazione, in genere molto buona per sistemi omogenei. Dobbiamo ora stabilire a quale energia applicare tale relazione. Consideriamo dunque il caso della grafite, caratterizzata dai seguenti valori numerici:

$$\begin{cases} a = 0,716 \\ x = 0,158 \end{cases}$$

grazie ai quali si ricava:

$$\begin{cases} e^{-x} = 0,85385 \\ \frac{1+a}{2} = 0,8580 \end{cases}$$

La quasi identità dei due valori trovati ci permette di affermare che portare avanti il discorso in funzione dell'energia piuttosto che in funzione della letargia è, nel caso della grafite, sostanzialmente la stessa cosa. Osserviamo dunque che, per neutroni che scatteranno partendo da un'energia iniziale E_0 , si avrà:

$$\begin{cases} \bar{E}_1 = E_0 e^{-x} \\ \bar{E}_2 = E_0 e^{-2x} \\ \bar{E}_3 = E_0 e^{-3x} \\ \dots \end{cases}$$

Nel caso della grafite possiamo allora compilare la prima tabella della pagina seguente. Osserviamo, quindi, che i neutroni inseriti nel mezzo con energia iniziale pari a 2 MeV potranno fare fissione veloce con l' ^{238}U con una probabilità che battezziamo p_f^0 . Se dunque avviene effettivamente la fissione verranno generati ϵp_f^0 neutroni. Ovviamente la probabilità che non ci sia fissione ma solo scattering sarà $(1 - p_f^0)$. I neutroni che effettivamente scatteranno avranno ora energia E_1 e la loro probabilità di fare fissione veloce con l' ^{238}U sarà $(1 - p_f^0) p_f^1$. Se

avviene effettivamente la fissione verranno questa volta generati $n(1-p_f^0)p_f^1$ neutroni. La probabilità che invece non ci sia fissione ma solo scattering sarà $(1-p_f^0)(1-p_f^1)$. I neutroni che effettivamente scatterano avranno poi energia E_2 e quindi si ricomincia il discorso.

n	\bar{E}_n (MeV)	s_f^{238}	s_s^C	s_f^{238} / s_s^C
0	2	0,54	1,7	0,32
1	1,707	0,5	1,87	0,27
2	1,458	0,4	2,06	0,194
3	1,245	0,2	2,26	0,0885
4	1,069	0,04	2,6	0,0154
5	0,908	0,015	2,75	0,0055
6	0,775	0,01	2,9	0,0034
7	0,662	0	3,1	0

La situazione appena descritta può essere riassunta nella seguente tabella:

Energia dei neutroni	Neutroni creati dalla fissione veloce	Probabilità di scattering
E_0	np_f^0	$1-p_f^0$
E_1	$n(1-p_f^0)p_f^1$	$(1-p_f^0)(1-p_f^1)$
E_2	$n(1-p_f^0)(1-p_f^1)p_f^2$	$(1-p_f^0)(1-p_f^1)(1-p_f^2)$
...

Nella colonna centrale di quest'ultima tabella appaiono tutti i neutroni veloci che vengono creati e sono tutti termini da aggiungere con il segno + nel bilancio dei neutroni in un reattore. Siccome poi le varie probabilità p_f^i sono tutte piuttosto piccole, è possibile trascurare tutti i termini $(p_f^i - p_f^{i+1})$ e quindi la somma dei neutroni veloci che vengono creati dalla fissione veloce dell' ^{238}U rimane:

$$n(p_f^0 + p_f^1 + \dots + p_f^N) = n \sum_{i=0}^N p_f^i$$

Come si può vedere nella prima tabella di questa pagina, nel caso dell' ^{238}U si arriva fino ad $N=6$ perché poi si scende, con l'energia dei neutroni, sotto la soglia oltre la quale non avviene più fissione veloce. Tra i neutroni che rallentano mi interessano solo quelli dell'ultima riga e quindi, con la medesima approssimazione di prima, si ha:

$$1 - p_f^0 - p_f^1 - \dots - p_f^N = 1 - \sum_{i=0}^N p_f^i$$

Partendo da un singolo neutrone, quindi, mi ritrovo alla fine con un numero di neutroni dati dalla somma delle ultime due relazioni scritte e quindi si avrà:

$$e = 1 + (n-1) \sum_{i=1}^N p_f^i = 1 + (n-1) \frac{N_{238}}{N_{Mod}} \sum_{i=1}^N \frac{s_{fi}^{238}}{s_{fi}^{Mod}}$$

Nel caso della grafite si avrà:

$$\sum_{i=1}^N \frac{s_{fi}^{238}}{s_{fi}^{Mod}} = 0,892$$

e quindi:

$$e = 1 + 1,5 \cdot 0,892 \frac{N_{238}}{N_{Mod}}$$

Scegliendo la situazione nella quale si abbia:

$$\frac{N_{238}}{N_{Mod}} = 10^{-3}$$

si ricava:

$$e = 1,0013$$

L'esempio numerico che abbiamo affrontato riguarda il caso della grafite perché in acqua con 1 o 2 urti (invece dei 6 o 7 della grafite) i neutroni escono dalla zona energetica nella quale è possibile la fissione veloce con l' ^{238}U .

In base a quanto abbiamo detto a proposito del fattore di fissione veloce ϵ , possiamo a questo punto affermare che il k_∞ di un mezzo omogeneo ed infinito è, più precisamente:

$$k_\infty = \epsilon p f h$$

Cerchiamo ora la criticità in questa nuova situazione. Avevamo in precedenza fatto delle semplificazioni secondo le quali la criticità si otteneva quando era:

$$k_\infty = 1$$

Già tenendo conto delle fughe possiamo immaginare come la condizione di criticità si trasformi nel modo seguente:

$$k_\infty > 1$$

A proposito della criticità avevamo inoltre supposto che i neutroni nascessero, dopo la fissione, già rallentati, ovvero che il bilancio espresso dall'equazione di diffusione:

$$D\nabla^2 \mathbf{f} - \Sigma_a \mathbf{f} + S = 0 \quad (1)$$

fosse corredato della relazione:

$$S = \mathbf{n} \Sigma_f \mathbf{f}$$

Ora facciamo un discorso un po' più realistico, continuiamo a supporre che i neutroni ritardati non esistano ma teniamo presente il fatto che nel reattore ci sono sia i neutroni termici che i neutroni che stanno subendo il rallentamento. Ciò significa che la relazione (1) è ancora valida ma non vale più l'ultima relazione scritta perché in questo caso la sorgente di neutroni termici è rappresentata dai neutroni che, attraverso il rallentamento, arrivano alla zona termica. In questa situazione bisognerà dunque tener conto dell'equazione dell'età:

$$\nabla^2 q = \frac{\partial q}{\partial t}$$

la relazione (1) quindi diventa:

$$D\nabla^2 \mathbf{f} - \Sigma_a \mathbf{f} + q(\mathbf{t}_{Th}, r) = 0$$

Quando avevamo ricavato l'età alla Fermi non ci eravamo però preoccupati delle catture; se ora vogliamo tener conto anche di questo effetto, dovremmo modificare ulteriormente l'ultima relazione scritta introducendo la probabilità che i neutroni vivano effettivamente abbastanza per arrivare in zona termica; avremo allora:

$$D\nabla^2 \mathbf{f} - \Sigma_a \mathbf{f} + pq(\mathbf{t}_{Th}, r) = 0 \quad (2)$$

Sfruttando ora la separabilità della q possiamo imporre che:

$$q(\mathbf{t}, r) = F(r)G(\mathbf{t})$$

Si avrà così:

$$G\nabla^2 F = FG^I$$

Da questa relazione si ricaverà:

$$\frac{\nabla F}{F} = \frac{G^I}{G} = \text{const} \quad (3)$$

Dobbiamo ora stabilire quale sia la costante. Fermi considera, a questo proposito, al seguente relazione:

$$\nabla^2 \mathbf{f}_{Th} + B_g^2 \mathbf{f}_{Th} = 0 \quad (4)$$

dalla quale si ricava che:

$$\mathbf{f}_{Th} = A F_{Th}(r)$$

dove A è una costante dovuta alla potenza del reattore mentre F esprime la forma spaziale del flusso. Si avrà quindi:

$$\frac{\nabla^2 F_{Th}(r)}{F_{Th}(r)} = -B_g^2$$

Abbiamo così trovato cosa succede per il flusso termico; Fermi ora afferma che, se siamo in un caso perfettamente omogeneo la F(r) non dipende dall'energia e questa affermazione ci permette di combinare quest'ultima relazione con la (3); si ottiene quindi:

$$\frac{\nabla F}{F} = \frac{G^I}{G} = -B_g^2$$

Concentriamoci ora sul secondo e terzo membro di quest'ultima espressione:

$$\frac{G'}{G} = -B_g^2$$

dalla quale ricaviamo:

$$G(\mathbf{t}) = G(0)e^{-B_g^2 \mathbf{t}}$$

dove $G(0)$ è la costante iniziale. Ricaviamo allora:

$$q(\mathbf{t}, r) = G(0)e^{-B_g^2 \mathbf{t}} F(r) \quad (5)$$

Qualora τ sia nulla, rimane:

$$q(0, r) = G(0)F(r)$$

Siccome quest'ultima è la distribuzione spaziale dei neutroni appena nati si potrà scrivere:

$$q(0, r) = \Sigma_a^{Th} \mathbf{f}_{Th}(r) \mathbf{f} \mathbf{h} \mathbf{e} = \frac{k_\infty}{p} \Sigma_a^{Th} \mathbf{f}_{Th}(r)$$

Combinando dunque le ultime due relazioni scritte si ottiene:

$$G(0)F(r) = \frac{k_\infty}{p} \Sigma_a^{Th} \mathbf{f}_{Th}(r)$$

ovvero:

$$G(0) = \frac{k_\infty}{F(r)p} \Sigma_a^{Th} \mathbf{f}_{Th}(r)$$

Combinando quindi tale relazione con l'equazione (5) si ottiene:

$$q(\mathbf{t}, r) = \frac{k_\infty}{p} \Sigma_a^{Th} \mathbf{f}_{Th}(r) e^{-B_g^2 \mathbf{t}}$$

dalla quale si ricava:

$$q(\mathbf{t}_{Th}, r) = \frac{k_\infty}{p} \Sigma_a^{Th} \mathbf{f}_{Th}(r) e^{-B_g^2 \mathbf{t}_{Th}}$$

A questo punto la relazione (2) può essere riscritta nel modo seguente:

$$D\nabla^2 \mathbf{f} - \Sigma_a \mathbf{f} + k_\infty \Sigma_a^{Th} \mathbf{f}_{Th}(r) e^{-B_g^2 \mathbf{t}_{Th}} = 0$$

tale equazione prende il nome di equazione di criticità alla Fermi. Il fattore esponenziale che appare nel terzo addendo è dovuto al fenomeno di fuga durante il rallentamento. Riprendendo la relazione (4) si ottiene ora:

$$\nabla^2 \mathbf{f}_{Th}(r) = -B_g^2 \mathbf{f}_{Th}(r)$$

Combinando allora le ultime due relazioni scritte si ricava:

$$-DB_g^2 \mathbf{f}_{Th}(r) - \Sigma_a \mathbf{f}_{Th}(r) + k_\infty \Sigma_a^{Th} \mathbf{f}_{Th}(r) e^{-B_g^2 \mathbf{t}_{Th}} = 0$$

Semplificando infine per il flusso si ottiene:

$$-DB_g^2 - \Sigma_a + k_\infty \Sigma_a^{Th} e^{-B_g^2 \mathbf{t}_{Th}} = 0$$

ovvero:

$$\frac{k_\infty \Sigma_a^{Th} e^{-B_g^2 \mathbf{t}_{Th}}}{\Sigma_a^{Th} + DB_g^2} = 1$$

e quindi:

$$\frac{k_\infty e^{-B_g^2 \mathbf{t}_{Th}}}{1 + \frac{D}{\Sigma_a^{Th}} B_g^2} = 1$$

Ricordiamo ora la relazione secondo la quale:

$$\frac{D}{\Sigma_a^{Th}} = L^2$$

Combinando le ultime due relazioni scritte si ricava:

$$\frac{k_{\infty} e^{-B_g^2 t_{Th}}}{1 + L^2 B_g^2} = 1$$

In generale:

$$\frac{k_{\infty} e^{-B_g^2 t_{Th}}}{1 + L^2 B_g^2} = k_{Eff}$$

in quanto solo in criticità si ha:

$$k_{Eff} = 1$$

La probabilità di non fuga durante il rallentamento è:

$$p_{NFR} = e^{-B_g^2 t_{Th}} \quad (6)$$

da cui si ricava:

$$k_{Eff} = k_{\infty} p_{NFT} p_{NFR} = \mathbf{epf} \mathbf{h} p_{NFT} p_{NFR} \quad (7)$$

Soffermiamoci ora ulteriormente sulla relazione (6) e, per far questo, andiamo a calcolare la probabilità di fuga che, ovviamente, è definita come il rapporto tra i neutroni che fuggono nell'intervallo letargico dU e il numero complessivo di neutroni, ovvero:

$$p = \frac{\int_{Vol} \vec{J}(U, r) \times \underline{ndS}}{\int_{Vol} q(U, r) dV} dU = \frac{\int_{Vol} \text{div} \vec{J} dV}{\int_{Vol} q(U, r) dV} dU = \frac{-D \int_{Vol} \nabla^2 f(U, r) dV}{\int_{Vol} q(U, r) dV} dU$$

Sfruttando la relazione (4) possiamo scrivere:

$$p = \frac{D(U, r) B_g^2 \int_{Vol} f(U, r) dV}{\int_{Vol} q(U, r) dV} dU \quad (8)$$

Ora ricordiamo che, nelle ipotesi di rallentamento continuo e di neutroni che si comportano tutti come il neutrone medio, si era arrivati alla seguente relazione:

$$q(U, r) = F(U, r) \mathbf{x}$$

ovvero:

$$q(U, r) = \Sigma_s \mathbf{f} \mathbf{x}$$

Sostituendo quest'ultima espressione nella relazione (8) si ottiene:

$$p = \frac{D(U, r) B_g^2 \int_{Vol} f(U, r) dV}{\Sigma_s \mathbf{x} \int_{Vol} f(U, r) dV} dU = \frac{D(U, r) B_g^2}{\Sigma_s \mathbf{x}} dU$$

La probabilità di non fuga si otterrà allora tramite la seguente relazione:

$$p_{NFdU} = 1 - \frac{D(U, r) B_g^2}{\Sigma_s \mathbf{x}} dU$$

Complessivamente si avrà:

$$p_{NF} = \prod \left(1 - \frac{D(U, r) B_g^2}{\Sigma_s \mathbf{x}} dU \right)$$

Passando ai logaritmi si ottiene:

$$\ln p_{NF} = \sum \ln \left(1 - \frac{D(U, r) B_g^2}{\Sigma_s \mathbf{x}} dU \right) \cong - \sum_i \frac{D_i B_g^2}{\Sigma_{s_i} \mathbf{x}} dU_i = -B_g^2 \int_0^U \frac{D(U^1)}{\mathbf{x} \Sigma_s(U^1)} dU^1$$

Togliendo poi i logaritmi si ricava:

$$p_{NFR} = e^{-B_g^2 \int_0^U \frac{D}{\mathbf{x} \Sigma_s} dU^1}$$

Ricordando la definizione dell'età alla Fermi, secondo la quale:

$$t = \int_0^U \frac{D}{x\Sigma_s} dU$$

ricaviamo nuovamente la relazione (6), della quale quindi abbiamo dimostrato la validità.

Ricordiamo che il termine η cambia con il tempo a seconda di come cambia la composizione della miscela del combustibile. In conclusione osserviamo, sfruttando la seguente tabella come la relazione (7) esprima il ciclo dei neutroni:

N	Sono i neutroni nati dalla fissione termica dell' ^{235}U .
Ne	Sono i neutroni nati dalla fissione termica dell' ^{235}U e dalla fissione veloce dell' ^{238}U .
Ne_{NFR}	Sono i neutroni nati dalla fissione termica dell' ^{235}U e dalla fissione veloce dell' ^{238}U che sono rimasti nel reattore dopo il rallentamento.
$Ne_{NFR}p$	Sono i neutroni nati dalla fissione termica dell' ^{235}U e dalla fissione veloce dell' ^{238}U che sono rimasti nel reattore dopo il rallentamento e che sono sopravvissuti alle catture di risonanza.
$Ne_{NFR}pp_{NFT}$	Sono i neutroni nati dalla fissione termica dell' ^{235}U e dalla fissione veloce dell' ^{238}U che sono rimasti nel reattore dopo il rallentamento, sono sopravvissuti alle catture di risonanza e non sono fuggiti dal reattore una volta divenuti termici.
$Ne_{NFR}p_{NFT}pf$	Sono i neutroni nati dalla fissione termica dell' ^{235}U e dalla fissione veloce dell' ^{238}U che sono rimasti nel reattore dopo il rallentamento, sono sopravvissuti alle catture di risonanza, non sono fuggiti dal reattore una volta divenuti termici e sono stati catturati dal combustibile.
$Ne_{NFR}p_{NFT}p_{fh}$	Sono i nuovi neutroni nati da fissione termica dell' ^{235}U , a conclusione dell'intero ciclo di vita.

Conversione $^{238}\text{U}/^{239}\text{Pu}$. Criticità a due gruppi. Criticità a due gruppi con riflettore. Reattori eterogenei. Barre di combustibile. Cella elementare.

Nella lezione precedente, in cui avevamo considerato un ciclo di vita dei neutroni, avevamo visto che i neutroni che sopravvivono alla cattura in risonanza sono espressi dalla seguente relazione:

$$Nep_{NFR} p$$

e quindi le catture in risonanza dell' ^{238}U sono:

$$Nep_{NFR} (1 - p) \quad (1)$$

Ricordiamo poi che le catture termiche del combustibile sono espresse nel modo seguente:

$$Nep_{NFR} p_{NFT} pf$$

Delle catture termiche del combustibile separiamo quelle relative all' ^{235}U e quelle relative all' ^{238}U ottenendo, rispettivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} Nep_{NFR} p_{NFT} pf \frac{\Sigma_a^{235}}{\Sigma_a^U} \\ Nep_{NFR} p_{NFT} pf \frac{\Sigma_a^{238}}{\Sigma_a^U} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Nep_{NFR} p_{NFT} pf \frac{\Sigma_a^{235}}{\Sigma_a^U} \\ Nep_{NFR} p_{NFT} pf \frac{\Sigma_a^{238}}{\Sigma_a^U} \end{array} \right. \quad (3)$$

I neutroni che possono dare origine alla conversione dell' ^{238}U in ^{239}Pu sono quelli che subiscono cattura di risonanza (ovvero quelli espressi dalla relazione (1)) e quelli che vengono assorbiti in zona termica dall' ^{238}U (espressi dalla relazione (3)). Per vedere quanto ^{239}Pu si forma dobbiamo allora considerare la seguente relazione:

$$\frac{Nep_{NFR} (1 - p) + Nep_{NFR} p_{NFT} pf \frac{\Sigma_a^{238}}{\Sigma_a^U}}{Nep_{NFR} p_{NFT} pf \frac{\Sigma_a^{235}}{\Sigma_a^U}} = \frac{\Sigma_a^{238}}{\Sigma_a^{235}} + \frac{1 - p}{pfp_{NFT}} \cdot \frac{\Sigma_a^U}{\Sigma_a^{235}} = C.C.D.$$

Ovviamente si tratta del Coefficiente di Conversione Differenziale valutato all'istante iniziale. E' facilmente comprensibile come in un reattore che contenesse inizialmente solo ^{235}U non si potrebbe ottenere ^{239}Pu ; nel caso, invece, di un reattore che funzionasse con Uranio naturale e grafite, si avrebbero i seguenti valori numerici:

$$\left\{ \begin{array}{l} p = 0,9 \\ f = 0,89 \\ p_{NFT} = 0,95 \end{array} \right.$$

dai quali si ricaverebbe:

$$C.C.D. \approx 0,7$$

Con certi tipi di reattori si riesce anche ad arrivare a C.C.D. maggiori di 1 e questo significa che il reattore costruisce da sé il suo combustibile. Siccome anche il ^{239}Pu si consuma, sarebbe dopo un po' interessante andare a vedere, dopo un certo tempo, quanto ne rimane.

Torniamo ora all'equazione della criticità alla Fermi con due gruppi energetici che avevamo trovato nella lezione precedente, secondo la quale:

$$k_{Eff} = \frac{k_{\infty} e^{-B_g^2 t_m}}{1 + L^2 B_g^2} = 1 \quad (4)$$

Ricordiamo che, nel caso della criticità ad un solo gruppo, si era ottenuta la seguente relazione:

$$k_{Eff} = \frac{k_{\infty}}{1 + L^2 B_g^2} = 1 \quad (5)$$

dalla quale si otteneva:

$$\frac{k_{\infty} - 1}{L^2} = B_g^2$$

e quindi:

$$B_m^2 = B_g^2$$

Ora vogliamo ricavare l'espressione del B_m^2 anche nella situazione a due gruppi energetici; supponiamo allora, per fare questo, che il reattore sia molto grosso, così che il prodotto $B_g^2 t_{Th}$ sia tanto piccolo da consentire uno sviluppo in serie dell'esponenziale. Riscriviamo dunque la relazione (4) nel modo seguente:

$$k_{Eff} = \frac{k_\infty}{(1 + L^2 B_g^2) e^{B_g^2 t_{Th}}}$$

Sviluppando in serie l'esponenziale (sarà sufficiente fermarsi al primo termine dello sviluppo) si otterrà:

$$k_{Eff} \cong \frac{k_\infty}{(1 + L^2 B_g^2)(1 + B_g^2 t_{Th})}$$

ovvero, non considerando il termine di secondo ordine in B_g^2 che, come detto, si può considerare trascurabile:

$$k_{Eff} \cong \frac{k_\infty}{1 + L^2 B_g^2 + B_g^2 t_{Th}} = \frac{k_\infty}{1 + B_g^2 M^2}$$

Abbiamo ottenuto così una relazione formalmente simile alla relazione (5) dalla quale si può ricavare:

$$\frac{k_\infty - 1}{M^2} = B_m^2 = B_g^2$$

Facendo un rapido esempio numerico possiamo utilizzare i valori caratteristici dei reattori ad Uranio naturale e Grafite, espressi nel seguente sistema:

$$\begin{cases} k_\infty = 1,05 \\ t_{Th} = 370 \text{ cm}^2 \\ L^2 = L_C^2 (1 - f) = 230 \text{ cm}^2 \\ M^2 = 600 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

grazie ai quali si ricava:

$$B_m^2 = 8,3 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-2}$$

Riscriviamo ora la relazione (4) nella forma seguente:

$$\frac{k_\infty}{1 + L^2 B^2} = e^{-B^2 t_{Th}}$$

che può diventare:

$$B^2 t_{Th} = \ln \frac{k_\infty}{1 + L^2 B^2}$$

e quindi:

$$B_{i+1}^2 = \frac{1}{t_{Th}} \ln \frac{k_\infty}{1 + L^2 B_i^2}$$

Che può essere risolta per iterazioni successive, fino ad arrivare a convergenza al valore $8,1607 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-2}$.

Abbiamo fino ad ora visto la criticità a due gruppi senza il riflettore; mettiamo ora attorno al nocciolo del reattore un riflettore e vediamo che sorge subito un problema legato al fatto che la criticità per reattore nudo si basa sull'affermazione che $F(r)$ non dipende da E . Se mettiamo il riflettore, però, tale ipotesi non è più verificata. Consideriamo a questo proposito il primo grafico della pagina seguente. In questa nuova situazione non possiamo più utilizzare l'equazione della diffusione e l'equazione dell'età. Risolviamo dunque il problema osservando che, nel caso della criticità ad un gruppo si aveva:

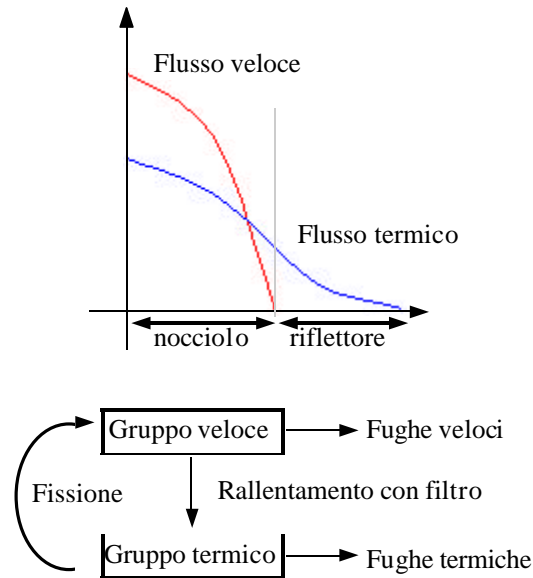
$$\frac{k_\infty - 1}{L^2} = B_m^2 = B_g^2$$

mentre per la criticità a due gruppi si è ottenuto:

$$\frac{k_\infty - 1}{M^2} = B_m^2 = B_g^2$$

L'espressione relativa alla criticità ad un gruppo deriva dalla sola equazione della diffusione mentre l'espressione relativa alla criticità a due gruppi deriva dall'equazione della diffusione completata con l'equazione dell'età. Le due

equazioni, però, sono molto simili e questo ci suggerisce che si può costruire, nel caso di reattore con riflettore, un'espressione di criticità che non contenga l'equazione dell'età. Facciamo riferimento alla seconda immagine di questa pagina per vedere cosa effettivamente succede.



Siccome dobbiamo rendere quello che è descritto da questo schema a blocchi con la sola equazione della diffusione, consideriamo separatamente i due gruppi. Per quanto riguarda il gruppo veloce si avrà:

$$D_1 \nabla^2 f_1 - \Sigma_1 f_1 + \frac{k_\infty}{p} \Sigma_2 f_2 = 0 \quad (6)$$

dove D_1 è il valor medio del coefficiente di diffusione per la zona di rallentamento, f_1 è il flusso nel gruppo veloce e f_2 è il flusso nel gruppo termico. Il secondo addendo dell'ultima relazione scritta rappresenta dunque quello che esce dal gruppo veloce mentre il terzo addendo rappresenta la sorgente del gruppo. Per il gruppo termico, invece, si avrà:

$$D_2 \nabla^2 f_2 - \Sigma_2 f_2 + p \Sigma_1 f_1 = 0 \quad (7)$$

dove D_2 è il coefficiente di diffusione in zona termica. Nel caso di reattore nudo, inoltre, vale la seguente relazione:

$$D_2 f_{1/2} + B_g^2 f_{1/2} = 0$$

e quindi le relazioni (6) e (7) possono essere rispettivamente riscritte nel modo seguente:

$$\begin{cases} -D_1 B_g^2 f_1 - \Sigma_1 f_1 + \frac{k_\infty}{p} \Sigma_2 f_2 = 0 \\ -D_2 B_g^2 f_2 - \Sigma_2 f_2 + p \Sigma_1 f_1 = 0 \end{cases}$$

Separando i flussi si ottiene:

$$\begin{cases} (\Sigma_1 + D_1 B_g^2) f_1 = \frac{k_\infty}{p} \Sigma_2 f_2 \\ (\Sigma_2 + D_2 B_g^2) f_2 = p \Sigma_1 f_1 \end{cases}$$

Moltiplicando membro a membro le ultime due relazioni scritte si ottiene:

$$(\Sigma_1 + D_1 B_g^2)(\Sigma_2 + D_2 B_g^2) = \Sigma_1 \Sigma_2 k_\infty$$

ovvero:

$$\frac{(\Sigma_1 + D_1 B_g^2)}{\Sigma_1} \frac{(\Sigma_2 + D_2 B_g^2)}{\Sigma_2} = k_\infty$$

e quindi:

$$\left(1 + \frac{D_1}{\Sigma_1} B_g^2\right) \left(1 + \frac{D_2}{\Sigma_2} B_g^2\right) = k_\infty$$

Quest'ultima relazione può poi essere così riscritta:

$$\left(1 + \frac{D_1}{\Sigma_1} B_g^2\right) (1 + L^2 B_g^2) = k_\infty \quad (8)$$

Imponiamo ora che sia:

$$\frac{D_1}{\Sigma_1} = t_{Th} \quad (9)$$

che, combinata con la definizione di età, fornisce la seguente espressione

$$\Sigma_1 = \frac{\mathbf{x}\Sigma_s}{U_{Th}}$$

Questo ci permette di definire la Σ_1 come la sezione d'urto fittizia che porta via i neutroni dal gruppo veloce.

Combinando la relazione (8) e la relazione (9) si ottiene dunque:

$$(1 + t_{Th} B_g^2) (1 + L^2 B_g^2) = k_\infty$$

dalla quale si ricava:

$$\frac{k_\infty}{(1 + t_{Th} B_g^2) (1 + L^2 B_g^2)} = 1$$

Quando siamo nel caso di reattore riflesso, possiamo usare un'equazione di diffusione per il nocciolo (Core), che sarà:

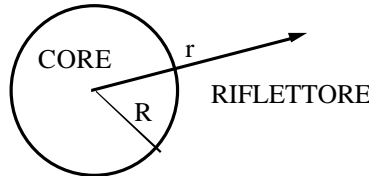
$$\nabla^2 \mathbf{f}_{Core} + B_{Core}^2 \mathbf{f}_{Core} = 0$$

ed un'equazione di diffusione per il riflettore, che, invece, sarà:

$$\nabla^2 \mathbf{f}_{Rif} - \frac{\mathbf{f}_{Rif}}{M_{Rif}^2} = 0$$

nella quale M_{Rif}^2 è l'area di migrazione nel riflettore. Quando siamo in geometria piana il risparmio totale tenderà ad essere $2M_{Rif}$.

Poniamoci ora nel caso di geometria sferica e di reattore infinito (si faccia riferimento al seguente disegno).



Nella zona moltiplicante si ha:

$$\mathbf{f}_{Core} = A \frac{\sin(B_{Core} r)}{r}$$

mentre nel riflettore si avrà:

$$\mathbf{f}_{Rif} = A' \frac{e^{-r/M_{Rif}}}{r}$$

Poniamo ora le condizioni al contorno, ovvero poniamo che ci sia continuità nel flusso alla frontiera tra Core e riflettore; ciò significa imporre la seguente condizione:

$$A \frac{\sin(B_{Core} R)}{R} = A' \frac{e^{-R/M_{Rif}}}{R}$$

ovvero:

$$A \sin(B_{Core} R) = A' e^{-R/M_{Rif}} \quad (10)$$

Una medesima condizione di continuità dovrà poi essere posta anche nel caso delle correnti; si deve quindi considerare la relazione:

$$D_{Core} A \frac{\sin(B_{Core} R) - (B_{Core} R) \cos(B_{Core} R)}{R^2} = D_{Rif} A' \frac{\left(\frac{R}{M_{Rif}} + 1 \right) e^{-R/M_{Rif}}}{R^2}$$

ovvero:

$$D_{Core} A [\sin(B_{Core} R) - (B_{Core} R) \cos(B_{Core} R)] = D_{Rif} A' \left(\frac{R}{M_{Rif}} + 1 \right) e^{-R/M_{Rif}} \quad (11)$$

Il rapporto tra la relazione (11) e la relazione (10) mi permette di ottenere la seguente espressione:

$$\cot g(B_{Core} R) = \frac{1}{B_{Core} R} \left(1 - \frac{D_{Rif}}{D_{Core}} \right) - \frac{D_{Rif}}{D_{Core}} \frac{1}{B_{Core} M_{Rif}}$$

Siccome quasi sempre si è nella situazione in cui:

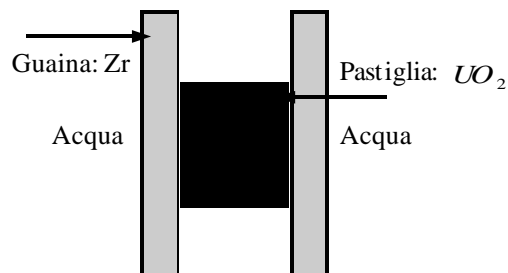
$$D_{Core} \approx D_{Rif}$$

la penultima relazione si riduce nel modo seguente:

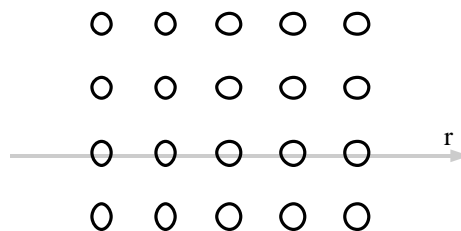
$$\cot g(B_{Core} R) = -\frac{1}{B_{Core} M_{Rif}}$$

Da questa espressione è possibile ricavare il raggio del reattore sferico con riflettore infinito. Siccome di riflettore se ne mette sempre in abbondanza si può sempre supporre di essere nel caso di riflettore infinito.

Possiamo ora iniziare ad occuparci in maniera approfondita dei reattori eterogenei. Come abbiamo accennato in precedenza un reattore eterogeneo è un reattore nel quale il combustibile non è miscelato con il moderatore ma è racchiuso spazialmente in zone ben definite: tali zone sono le barre di combustibile. Nell'immagine seguente vediamo rappresentata una barra di combustibile con la guaina in Zirconio (Zr) e le pastiglie di diametro pari a circa 0,81 cm di UO_2 al suo interno. Le barre sono lambite all'esterno dal moderatore (in questo caso dall'acqua).



Nell'immagine seguente vediamo invece la disposizione delle barre all'interno del reattore (reticolo).



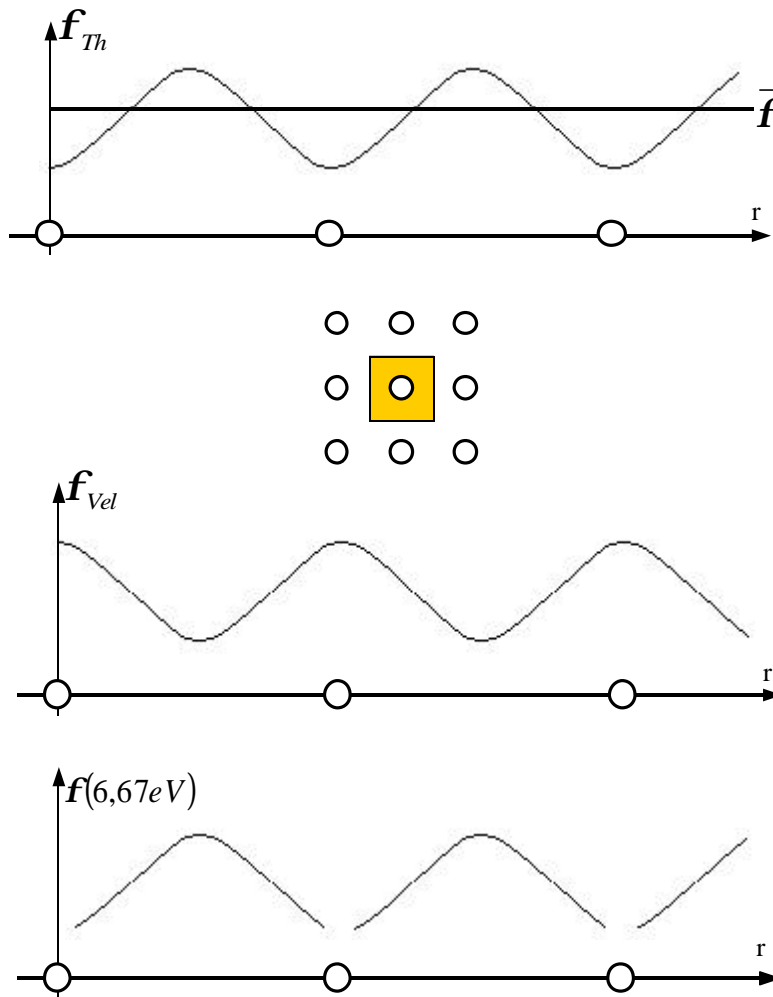
Mettiamoci nel caso di un reattore eterogeneo infinito. Come abbiamo avuto modo di accennare in precedenza, è ovvio che il moderatore e il combustibile non vedranno il medesimo flusso; in generale si avrà:

$$\bar{f}_{Fuel} < \bar{f}_{Mod}$$

L'andamento del flusso termico lungo la direzione r sarà qualitativamente quello rappresentato nella prima immagine della pagina seguente. Da tale immagine si vede che nel reattore omogeneo il flusso termico era costante mentre nel reattore eterogeneo rimane costante solo il suo valor medio. Sfruttando la medesima figura si osserva che l'andamento del flusso termico è ripetitivo; concentrandoci dunque sulla cella elementare che vediamo nella seconda immagine della pagina seguente, possiamo comprendere cosa accade in tutto il reattore. Un discorso analogo può essere fatto anche per quanto riguarda il flusso veloce il cui andamento è rappresentato nella terza immagine della pagina seguente. Vediamo quindi che, studiando quanto accade nella cella singola, si ha una panoramica completa di quello che avviene nel reattore. Facciamo ora riferimento alla quarta immagine della pagina seguente nella quale vediamo l'andamento del flusso ad energia 6,67 eV (ovvero all'energia caratteristica di una delle risonanze dell' ^{238}U). Da tale immagine

vediamo che, siccome l' ^{238}U attivo è solo quello sulla superficie della barra, i neutroni che vengono catturati sono meno e quindi se ne salvano molti di più. Come conseguenza di questa osservazione sarà necessario modificare la relazione.

$$k_{\infty} = \epsilon p f h$$



Per capire meglio la differenza tra il reattore omogeneo ed il reattore eterogeneo si considera la situazione omogenea associata alla situazione reale che stiamo analizzando. Esprimiamo quindi il volume che, all'interno della singola cella, spetta al moderatore; detta d la distanza tra gli assi di due barre contigue ed R il loro raggio, tale volume sarà:

$$V_{Mod} = (d^2 - \pi R^2)h$$

dove h è l'altezza della cella che viene posta pari ad 1. Ovviamente, per poter effettivamente parlare di situazione omogenea associata, dovranno essere valide le due seguenti relazioni:

$$\begin{cases} N_{Mod} V_{Mod} = N_{Mod}^{OmoAss} V_{Cella} \\ N_{Fuel} V_{Fuel} = N_{Fuel}^{OmoAss} V_{Cella} \end{cases}$$

dove sia:

$$V_{Cella} = V_{Mod} + V_{Fuel}$$

Dall'ultimo sistema scritto si ottiene:

$$\frac{N_{Mod}^{OmoAss}}{N_{Fuel}^{OmoAss}} = \frac{N_{Mod} V_{Mod}}{N_{Fuel} V_{Fuel}}$$

Nel caso omogeneo si avrà dunque:

$$f_{OmoAss} = \frac{\mathbf{s}_a^{Fuel} N_{Fuel}^{OmoAss}}{\mathbf{s}_a^{Fuel} N_{Fuel}^{OmoAss} + \mathbf{s}_a^{Mod} N_{Mod}^{OmoAss}}$$

Dobbiamo dunque calcolare come si presenta l' f_{Ete} .

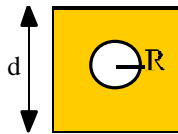
Cella elementare. Parametro f nel reattore eterogeneo. Il reattore di Chinon. Parametro p nel reattore eterogeneo.

Nella lezione precedente eravamo giunti ad osservare che, facendo riferimento alla cella elementare, era necessario andare a calcolare l' f_{Ete} . Ricordiamo innanzitutto come fosse:

$$f_{Omo} = \frac{\sum_a^{FuelOmoAss}}{\sum_a^{FuelOmoAss} + \sum_a^{ModOmoAss}} = \frac{1}{1 + \frac{\sum_a^{ModOmoAss}}{\sum_a^{FuelOmoAss}}} = \frac{1}{1 + \frac{s_a^{Mod} N_{Mod}^{OmoAss}}{s_a^{Fuel} N_{Fuel}^{OmoAss}}} \quad (1)$$

Per passare al caso eterogeneo dobbiamo ricordare che, ponendo unitaria l'altezza della cella elementare, si aveva:

$$\begin{cases} V_{Fuel} = pR^2 \\ V_{Mod} = d^2 - pR^2 \end{cases}$$



Si avrà dunque:

$$f_{Ete} = \frac{\sum_a^{Fuel} V_{Fuel} \bar{f}_{Fuel}}{\sum_a^{Fuel} V_{Fuel} \bar{f}_{Fuel} + \sum_a^{Mod} V_{Mod} \bar{f}_{Mod}} = \frac{1}{1 + \frac{\sum_a^{Mod} V_{Mod} \bar{f}_{Mod}}{\sum_a^{Fuel} V_{Fuel} \bar{f}_{Fuel}}} \quad (2)$$

Nella lezione precedente avevamo anche trovato la seguente relazione:

$$\frac{N_{Mod}^{OmoAss}}{N_{Fuel}^{OmoAss}} = \frac{N_{Mod} V_{Mod}}{N_{Fuel} V_{Fuel}}$$

che, sostituita nella relazione (1), ci permette di scrivere:

$$f_{Omo} = \frac{1}{1 + \frac{s_a^{Mod} N_{Mod} V_{Mod}}{s_a^{Fuel} N_{Fuel} V_{Fuel}}} = \frac{1}{1 + \frac{\sum_a^{Mod} V_{Mod}}{\sum_a^{Fuel} V_{Fuel}}}$$

Confrontando quest'ultima relazione con l'espressione (2) ricaviamo subito l'evidente differenza tra i due casi. Definiamo dunque il fattore di svantaggio:

$$z = \frac{\bar{f}_{Mod}}{\bar{f}_{Fuel}} > 1$$

Risulta allora, evidentemente, che:

$$f_{Ete} < f_{Omo}$$

Sfruttando la teoria della diffusione possiamo poi calcolare \bar{f}_{Mod} e \bar{f}_{Fuel} .

Per fare un esempio numerico facciamo riferimento al reattore francese di Chinon che è un reattore ad Uranio naturale e Grafite per i quali si hanno i seguenti dati numerici:

$$\left\{ \begin{array}{l} R = 1,3cm \\ d = 21,27cm \\ \mathbf{r}_U = 18,9 \frac{g}{cm^3} \\ \mathbf{r}_C = 1,6 \frac{g}{cm^3} \\ \mathbf{s}_a^U = 7,6b \\ \mathbf{s}_a^C = 4,8mb \end{array} \right.$$

da tali numerici si ricava, per prima cosa, i seguenti risultati intermedi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{V_{Mod}}{V_{Fuel}} = \frac{d^2}{pR^2} - 1 = 84,21 \\ N_{Fuel} = \frac{N_{Av}}{A_U \mathbf{r}_U} = 4,783 \cdot 10^{22} \frac{nuclei}{cm^3} \\ \Sigma_a^{Fuel} = N_{Fuel} \mathbf{s}_a^{Fuel} = 0,3635 cm^{-1} \\ N_{Mod} = \frac{N_{Av}}{A_C \mathbf{r}_C} = 8,03 \cdot 10^{22} \frac{nuclei}{cm^3} \\ \Sigma_a^{Mod} = N_{Mod} \mathbf{s}_a^{Mod} = 3,854 \cdot 10^{-4} cm^{-1} \end{array} \right.$$

Ricaviamo quindi che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{N_{Mod}}{N_{Fuel}} = 1,679 \\ \frac{\Sigma_a^{Mod}}{\Sigma_a^{Fuel}} = 1,0603 \cdot 10^{-3} \\ \frac{\Sigma_a^{Mod} V_{Mod}}{\Sigma_a^{Fuel} V_{Fuel}} = 0,0893 \end{array} \right.$$

Si potrà dunque ottenere:

$$f_{Omo} = 0,918$$

Viene inoltre fornito il seguente valore:

$$z = 1,6354$$

e quindi:

$$f_{Ete} = 0,8726$$

Fino ad ora abbiamo osservato che, passando da un reattore omogeneo ad un reattore eterogeneo, il parametro f scende. Dobbiamo ora occuparci del parametro p . Nel calcolo del parametro p il fenomeno dell'autoschermo e il fatto che il combustibile è concentrato, sono due aspetti particolarmente comodi perché è possibile che i neutroni che rallentano non tocchino affatto la barra e quindi la loro probabilità di salvezza risulta molto incrementata. Nel caso omogeneo, dunque, si aveva:

$$p_{Omo} = e^{-\left(\frac{I_{Eff}}{\mathbf{s}_p}\right)_{Omo}} \quad (3)$$

dove era:

$$I_{Eff} = 2,73(\mathbf{s}_p)^{0,486}$$

e anche:

$$\mathbf{s}_p^{Omo} = \mathbf{s}_p^{Fuel} + \mathbf{s}_s^{Mod} \left(\frac{N_{Mod}^{Omo}}{N_{Fuel}^{Omo}} \right)$$

Aggiungiamo dunque ai dati prima visti per il reattore francese i seguenti due:

$$\begin{cases} \mathbf{s}_s^{Fuel} = 8,29b \\ \mathbf{s}_s^{Mod} = 4,65b \end{cases}$$

Si ottiene inoltre, con i dati numerici in nostro possesso:

$$\left(\frac{N_{Mod}}{N_{Fuel}} \right)_{Omo} = \frac{N_{Mod}}{N_{Fuel}} \frac{V_{Mod}}{V_{Fuel}} = 141,39$$

e quindi:

$$\begin{cases} \mathbf{s}_p^{Omo} = 665,75b \\ I_{Eff}^{Omo} = 64,31b \end{cases}$$

Soffermandosi invece sul denominatore dell'esponente della relazione (3) si avrà:

$$\left(\mathbf{x}\mathbf{s}_p \right)_{Omo} = \mathbf{x}_{Fuel} \mathbf{s}_p^{Fuel} + \mathbf{x}_{Mod} \mathbf{s}_p^{Mod} \left(\frac{N_{Mod}}{N_{Fuel}} \right)_{Omo}$$

Sapendo che:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{Fuel} = 0,00838 \\ \mathbf{x}_{Mod} = 0,158 \end{cases}$$

si otterrà:

$$\left(\mathbf{x}\mathbf{s}_p \right)_{Omo} = 103,95b$$

Sostituendo tutti i valori numerici nella relazione (3) si ricava:

$$p_{Omo} = 0,5387$$

Nel caso del reattore eterogeneo, invece, i neutroni vengono assorbiti dall' ^{238}U praticamente solo sulla superficie della barra (il contributo dato dall'interno è assolutamente trascurabile). Nel caso del reattore francese viene fornita la seguente formula semiempirica:

$$I_{Eff}^{Ete} = a + b \sqrt{\frac{S}{M}} \quad (4)$$

dove S è la superficie esposta ed M è la massa contenuta; si ha quindi:

$$\begin{cases} S = 2pR \\ M = pR^2 r_U \end{cases}$$

dalle quali si ricava:

$$\frac{S}{M} = \frac{2}{Rr_U} = 8,14 \cdot 10^{-2}$$

a e b sono invece delle costanti che dipendono dal tipo di combustibile e che, nel nostro caso particolare, sono:

$$\begin{cases} a = 2,8 \\ b = 27,1 \end{cases}$$

Sostituendo tutti i valori numerici nella relazione (4) si ricava:

$$I_{Eff}^{Ete} = 10,532b$$

Dobbiamo ora valutare il termine $\left(\mathbf{x}\mathbf{s}_p \right)_{Ete}$; siccome, però non cambia il numero di nuclei coinvolti ma solamente la loro disposizione, possiamo supporre che sia:

$$\left(\mathbf{x}\mathbf{s}_p \right)_{Ete} = \left(\mathbf{x}\mathbf{s}_p \right)_{Omo}$$

sostituendo quindi nella relazione (3) i valori numerici relativi al caso eterogeneo, si ottiene:

$$p_{Ete} = 0,9036$$

e quindi, passando dal reattore omogeneo al reattore eterogeneo, il termine p cresce notevolmente.

Parametro ϵ nel reattore eterogeneo. Parametro h nel reattore eterogeneo. Fattibilità di un reattore eterogeneo. Criticità in un reattore eterogeneo. La massa di caricamento. La reattività. Effetti di temperatura. I veleni.

Ci occupiamo ora di come cambia il parametro ϵ passando dal caso omogeneo al caso eterogeneo; per quanto riguarda il caso omogeneo, ricordiamo che avevamo trovato la relazione secondo la quale:

$$e_{Omo} = 1 + (n - 1) \sum_i p_f^i = 1 + (n - 1) \frac{N_{Fuel}}{N_{Mod}} \sum_i \frac{s_f^i}{s_s^i}$$

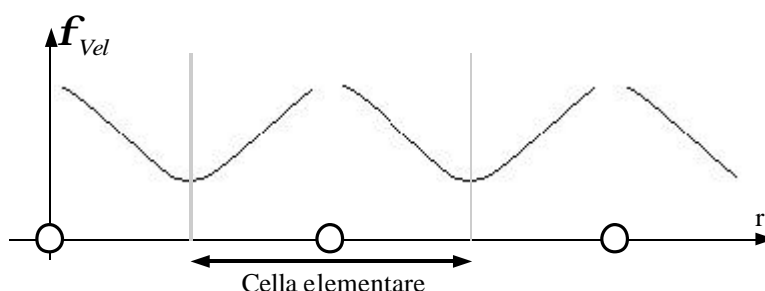
sfruttando i valori numerici che sono stati esposti nella lezione precedente a proposito del reattore francese e ricordando che si ha:

$$n \cong 2,5$$

si ricava, per il reattore in questione:

$$e_{Omo} = 1,0095$$

per passare al caso eterogeneo dobbiamo osservare che l'andamento del flusso veloce all'interno di una cella elementare è il seguente:



Tale andamento si ricava dall'equazione dell'età. Senza soffermarci a fare i conti utilizziamo l'espressione semiempirica fornita dai francesi secondo la quale:

$$e_{Ete} = 1 + KR$$

con:

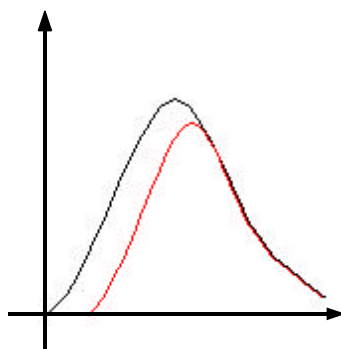
$$K = 2,432 \cdot 10^{-2}$$

Si ottiene così, con i dati forniti nella scorsa lezione:

$$e_{Ete} = 1,030$$

Anche il parametro ϵ , dunque, aumenta passando dal reattore omogeneo al reattore eterogeneo.

Per quanto riguarda, infine, il parametro η nel caso di reattore eterogeneo, osserviamo nell'immagine seguente che, nella situazione omogenea la distribuzione dei neutroni termici è rappresentata da una curva maxwelliana che viene solo leggermente distorta quando passiamo al caso eterogeneo (e consideriamo dunque quello che avviene all'interno delle barre), per effetto della cattura da parte del combustibile.



Con Uranio naturale e barrette del raggio del reattore francese, possiamo però ipotizzare che si abbia:

$$h_{Omo} = h_{Ete}$$

Riassumendo possiamo osservare che il passaggio dal caso omogeneo al caso eterogeneo comporta una variazione dei parametri f , p , ϵ e η riassunti nella prima tabella della pagina seguente. Osservando quei valori osserviamo che si avrà:

$$\{k_{\infty}^{Omo} = 0,654\} \rightarrow \{k_{\infty}^{Ete} = 1,0639\}$$

Ne deduciamo allora che un reattore omogeneo a grafite ed uranio naturale non è possibile, un reattore eterogeneo sì. E' importante osservare che solitamente l'uranio che si utilizza in un reattore non è uranio naturale ma uranio arricchito;

tanto più l'uranio è arricchito, inoltre, e tanto più, nel passaggio dal caso omogeneo al caso eterogeneo, il parametro f si riduce; oltre ad una certa soglia, dunque, passando dal caso omogeneo al caso eterogeneo si ha comunque un $\Delta k_\infty < 0$. La soglia alla quale si è accennato è quella relativa ad un arricchimento superiore all'8%. Per arricchimenti inferiore a tale soglia, però, il passaggio dal caso omogeneo al caso eterogeneo prevede $\Delta k_\infty > 0$.

Omogeneo	Parametro	Eterogeneo
0,918	f	0,8726
0,5397	p	0,9036
1,0095	ε	1,030
1,31	η	1,31

Il discorso del passaggio dal caso omogeneo al caso eterogeneo è stato fatto sfruttando un reattore ad uranio naturale e grafite perché usando un reattore ad uranio arricchito (al 3%) e acqua, sarebbero venute meno delle ipotesi semplificative che avrebbero complicato in maniera notevole il discorso. Ritorniamo dunque a concentrarci sul reattore eterogeneo ad uranio naturale e grafite, per il quale si è trovato:

$$k_\infty = 1,0639$$

Ricordiamo che la condizione di criticità era stata espressa nel modo seguente:

$$k_{Eff} = \frac{k_\infty e^{-B_g^2 t_m}}{1 + L^2 B_g^2} = 1 \quad (1)$$

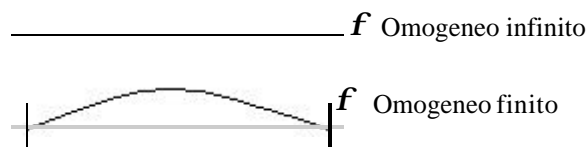
con:

$$L^2 = L_{Mod}^2 (1 - f)$$

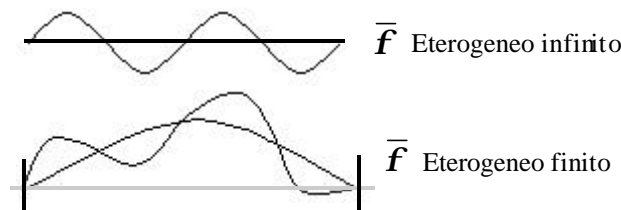
Le probabilità di non fuga erano invece:

$$\begin{cases} p_{NFT} = \frac{1}{1 + L^2 B_g^2} \\ p_{NFR} = e^{-B_g^2 t_m} \end{cases}$$

nelle quali i parametri fondamentali sono L^2 , B_g^2 e t_{Th} . Vediamo ora cosa succede nel passaggio dalla situazione omogenea alla situazione eterogenea. Innanzitutto osserviamo che passando dal caso omogeneo infinito al caso omogeneo finito, ovvero al caso nel quale vale la relazione (1), si assiste ad una curvatura del flusso (come si vede nell'immagine seguente).



Passando dal caso eterogeneo infinito al caso eterogeneo finito si ha, invece, una curvatura del valor medio del flusso.



Il parallelismo tra queste due situazioni fa sì che la relazione (1) possa essere utilizzata anche nel caso dei reattori eterogenei finiti. I calcoli precisi sottolineerebbero che siamo in presenza di una approssimazione. Approssimiamo ulteriormente la relazione (1) osservando che k_∞ è molto vicino ad 1e che quindi il reattore sarà grosso; questo ci permette di scrivere che:

$$M^2 = L^2 + t$$

e quindi possiamo conglobare le due probabilità di non fuga riscrivendo la relazione (1) nel modo seguente:

$$k_{Eff} = \frac{k_\infty}{1 + M^2 B_g^2} = 1$$

Sempre con riferimento al reattore francese osserviamo che, usando i seguenti valori numerici:

$$\begin{cases} k_{\infty} = 1,0639 \\ L_{Mod}^2 = 2209 cm^2 \\ t = 352,3 cm^2 \end{cases}$$

si ricava:

$$\begin{cases} L^2 = 281,43 cm^2 \\ M^2 = 633,73 cm^2 \end{cases}$$

e quindi, utilizzando la forma approssimata:

$$B_{Core}^2 * = \frac{k_{\infty} - 1}{M^2} = 1,00832 \cdot 10^{-4} cm^{-2}$$

Sfruttando la forma esatta con ripetute iterazioni si sarebbe invece ottenuto

$$B_{Core}^2 = 9,833 \cdot 10^{-5} cm^{-2}$$

dalla quale, quindi:

$$B_{Core} = 9,9164 \cdot 10^{-3} cm^{-1} \quad (2)$$

Consideriamo la geometria cilindrica per la quale, lo ricordiamo, si aveva:

$$B_g^2 = \left(\frac{p}{h}\right)^2 + \left(\frac{2,405}{R}\right)^2$$

Nel caso cilindrico, la situazione che risultava migliore dal punto di vista del risparmio del combustibile era quella di cilindro di sezione quasi quadrata; supponiamo per semplicità di porci nella situazione caratterizzata da:

$$h = 2R$$

Combinando allora le ultime due relazioni scritte si ricava:

$$B_g^2 = \left(\frac{p}{2R}\right)^2 + \left(\frac{2,405}{R}\right)^2$$

Ponendo poi:

$$B_g^2 = B_{Core}^2$$

si ricava:

$$R_{CN} = 289,68 cm$$

dove il pedice CN sta per Cilindro Nudo. Partendo da tale raggio si ricava il volume del cilindro nudo:

$$V_{CN} = p R_{CN}^2 \cdot 2R_{CN} = 152,73 m^3$$

Il reattore però è riflesso, anzi è circondato da uno spessore tale di grafite da permettere l'approssimazione di riflettore infinito. Il riflettore infinito nel caso del cilindro viene simulato da un riflettore infinito nel caso di una sfera; si pone allora:

$$\frac{V_{CR}}{V_{CN}} \approx \frac{V_{SR}}{V_{SN}}$$

dove CR sta per Cilindro Riflesso, SN sta per Sfera Nuda ed SR sta per Sfera Riflessa. Da tale relazione ricaviamo:

$$V_{CR} = V_{CN} \frac{V_{SR}}{V_{SN}} \quad (3)$$

Per ottenere il volume del cilindro riflesso dovremo dunque occuparci della sfera; ricordiamo innanzitutto, che, nel caso della sfera, si ha:

$$B_g^2 = \left(\frac{p}{R}\right)^2$$

Uguagliando quindi quest'ultima relazione con l'espressione (2) si ricava:

$$R_{SN} = \frac{p}{B_{Core}} = 316,81 cm$$

Per quanto riguarda, invece, la sfera riflessa, ricordiamo la relazione secondo la quale:

$$\cot g(B_{Core}R) = -\frac{1}{B_{Core}M_{Rif}}$$

dalla quale si ricava:

$$\tan(B_{Core}R) = -B_{Core}M_{Rif} \quad (4)$$

Ovviamente si avrà:

$$M_{Rif}^2 = L_{Mod}^2 + t$$

e quindi, sfruttando i dati numerici francesi:

$$M_{Rif} = 50,61cm$$

Combinando quest'ultima relazione con la (2) e con la (4) si ricava:

$$\tan(B_{Core}R) = -0,5019$$

e quindi:

$$B_{Core}R_{SN} = 2,6765$$

Si faccia attenzione che, nel passaggio dalla penultima all'ultima espressione scritta, la calcolatrice avrebbe dato un valore negativo al quale, per ottenere il risultato che effettivamente ci interessa, sarebbe stato necessario aggiungere π . Dall'ultima relazione scritta si ricava, dunque:

$$R_{SR} = \frac{2,6765}{B_{Core}} = 269,9cm$$

Sfruttiamo ora la seguente relazione:

$$\frac{V_{SR}}{V_{SN}} = \left(\frac{R_{SR}}{R_{SN}} \right)^3 = 0,6183$$

Combinando quest'ultima relazione con l'equazione (3) si ricava allora:

$$V_{CR} = V_{CN} \cdot 0,6183 = 94,44m^3$$

e quindi:

$$\begin{cases} R_{CR} = 2,47m \\ h = 2R = 4,94m \end{cases}$$

Vediamo ora quanto Uranio avremmo dovuto metterci; in precedenza avevamo trovato il seguente dato:

$$\frac{V_{Mod}}{V_{Fuel}} = 84,21$$

Ovviamente si ha:

$$V_{CR} = V_{Mod} + V_{Fuel}$$

e quindi, sfruttando tutti i dati in nostro possesso, si ricava:

$$V_U = \frac{V_{Core}}{84,21} = 1,1083m^3$$

Conoscendo la densità dell'Uranio che è:

$$r_U = 18,9$$

si ricava che sono necessarie 20,95 tonnellate di Uranio (i calcoli precisi dei francesi portano ad una massa critica di 24,3 tonnellate) alle quale vanno aggiunte 120 tonnellate di Grafite.

Tra i dati forniti dai francesi vi è anche la massa di caricamento che corrisponde a 100 tonnellate di Uranio. Per comprendere per quale motivo il core del reattore ha un volume quattro volte superiore a quello necessario per raggiungere la criticità, dobbiamo ricordare che i calcoli che abbiamo fatto riguardano un reattore fresco e pulito (CC = Cold Clean reactor) ma, in una tale situazione, appena un atomo di Uranio brucia, il reattore si ferma. E' quindi necessario introdurre molto più Uranio per sopperire alle perdite future nel bilancio.

Da ora in poi ci occuperemo, per un po', di cosa succede quando un reattore viene avviato e così comprenderemo il motivo dell'ingente massa aggiuntiva di Uranio che viene utilizzata. Come prima cosa osserviamo che, utilizzando la massa critica di circa 24 tonnellate di uranio, si ha:

$$k_{Eff} = 1$$

utilizzando invece la massa di caricamento, si avrà, ovviamente:

$$k_{Eff}^* > 1$$

Introduciamo a questo punto un nuovo parametro, detto reattività e così definito:

$$r = \frac{k-1}{k}$$

Appare allora evidente che, nel caso della massa critica, si avrà:

$$r = 0$$

Dobbiamo ora valutare quale sarà il ρ iniziale che serve per sopperire alle perdite di reattività dovute alla temperatura, ai veleni, al consumo di combustibile; la produzione di ^{239}Pu sarà invece un fattore che tenderà ad aumentare la reattività. Con i dati che avevamo trovato in precedenza si otteneva:

$$r_{\infty} = r_{Max} = \frac{1,0639-1}{1,0639} = 6,006\% = 6006 pcm$$

(pcm = parti per centomila). Per sopperire alle perdite sarà ovviamente necessario partire con una reattività maggiore di zero. Quando il reattore è critico, si avrà:

$$r = \frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1+B^2M^2}{k_{\infty}} = \frac{k_{\infty}-1-B^2M^2}{k_{\infty}} = \frac{B_0^2M^2 - B^2M^2}{k_{\infty}} = \frac{B_0^2M^2 \left[1 - \frac{B^2}{B_0^2} \right]}{k_{\infty}}$$

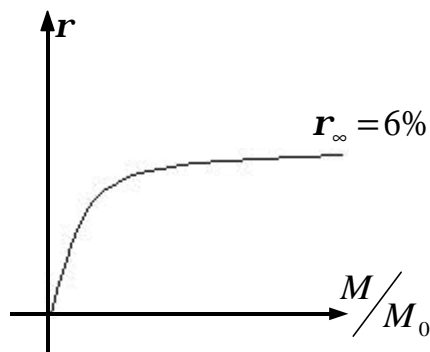
nella quale si fa distinzione tra B_0^2 che è quello relativo alla situazione critica e B^2 che è quello relativo alla situazione “gonfiata” per sopperire alle perdite. La reattività può dunque essere espressa tramite il rapporto B^2 / B_0^2 . Riscriviamo dunque tale rapporto in funzione della massa:

$$\frac{B^2}{B_0^2} = \left(\frac{M_0}{M} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Combinando dunque le ultime due relazioni scritte, si ha:

$$r = \frac{(k_{\infty}-1) \left[1 - \left(\frac{M_0}{M} \right)^{\frac{2}{3}} \right]}{k_{\infty}} = r_{\infty} \left[1 - \left(\frac{M_0}{M} \right)^{\frac{2}{3}} \right]$$

Dal punto di vista grafico si avrà allora:



Alcuni valori numerici sono rappresentati nella seguente tabella:

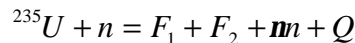
M/M_0	r/r_{∞}
1	0
2	37%
3	52%
4	60%

Nel caso che stavamo analizzando il rapporto tra la massa di caricamento e la massa critica era pari a 4 e quindi ci aspettiamo una reattività in eccesso del 3,6% (che è il 60% di 6pcm). In effetti, nei reattori ad Uranio naturale e Grafite (come appunto quello francese) la reattività in eccesso iniziale è circa del 4%. Nel caso dei reattori ad Uranio arricchito (al 4%) ed acqua (solitamente dei PWR) la reattività in eccesso iniziale è dell'ordine del 35%. Per gestire una reattività

in eccesso talmente alta le sole barre di controllo non bastano più e quindi si utilizza anche dell'acido borico sciolto nell'acqua: a inizio vita la frazione di Boro nell'acqua arriva anche a 1500 ppm (parti per milione in peso).

Tra tutti i fattori che contribuiscono ad abbassare la reattività iniziale, iniziamo ad occuparci degli effetti legati alla temperatura. A questo scopo osserviamo che, in praticamente tutti i parametri che ci interessano, rientra la sezione d'urto macroscopica Σ . Tale sezione d'urto dipende anche dalla densità che, a sua volta, dipende dalla temperatura. La variazione della temperatura porta dunque a due effetti, uno macroscopico ed uno microscopico. L'effetto macroscopico è legato appunto alla variazione di densità, in particolare alla variazione di densità del moderatore: nel caso dell'acqua infatti (che si dilata molto all'aumentare della temperatura al contrario della grafite che si dilata poco) aumentando la temperatura e diminuendo la densità si assiste ad una diminuzione del suo potere rallentante. Gli effetti microscopici sono legati al fatto che, variando la maxwelliana sulla quale sono mediati i termini σ , le sezioni d'urto microscopiche cambieranno anch'esse; inoltre, in zona epitermica, entra in gioco anche l'effetto Doppler che tende ad allargare la zona di pericolo legata alle risonanze. I dati forniti dai francesi affermano che, per sopperire agli effetti di temperatura è necessaria una reattività in eccesso pari allo 0,65%.

Passiamo ora alla seconda grossa causa di deperimento della reattività: i veleni. I francesi segnalano come maggiormente pericolosi lo Xenon (Xe) e il Samario (Sm) che presentano sezioni d'urto microscopiche di cattura rispettivamente di $2,8 \cdot 10^6 b$ e di $5 \cdot 10^4 b$. I francesi prevedono di sopperire ai veleni con una reattività in eccesso pari allo 0,85%. Approfondiamo ulteriormente il discorso sui veleni ricordando che, ogni volta che avviene una fissione, dobbiamo tener conto della seguente reazione:



Ognuno dei due frammenti che si formano va mediamente incontro a 3 o 4 decadimenti λ ; per ogni prodotto di fissione sarebbe dunque necessario calcolare la resa (yield), la costante di decadimento (λ) e la sezione d'urto microscopica di cattura (σ). In generale la sezione d'urto di cattura dei veleni va come $1/v$ e quindi le catture avvengono quasi tutte in zona termica; la nascita dei veleni andrà allora ad influire sul parametro f . Si avrà allora:

$$f = \frac{\sum_a^{\text{Fuel}} V_{\text{Fuel}} \bar{\sigma}_{\text{Fuel}}}{\sum_a^{\text{Fuel}} V_{\text{Fuel}} \bar{\sigma}_{\text{Fuel}} + \sum_a^{\text{Mod}} V_{\text{Mod}} \bar{\sigma}_{\text{Mod}} + \sum_a^{\text{Veleni}} V_{\text{Fuel}} \bar{\sigma}_{\text{Fuel}}}$$

Il problema sarà il calcolo del termine:

$$\sum_a^{\text{Veleni}} = \sum_{i=1}^N s_a^{\text{Veleno}i} N_{\text{Veleno}}^i$$

Come già accennato in precedenza, i veleni più pericolosi sono ${}^{135}\text{Xe}$ e ${}^{149}\text{Sm}$.

I veleni. Lo Xenon. Il Samario.

Dobbiamo analizzare come i veleni interferiscono con il parametro f . In assenza di veleni (ovvero all'inizio della storia di irraggiamento) si ha:

$$f = \frac{\sum_a^{Fuel} V_{Fuel} \bar{f}_{Fuel}}{\sum_a^{Fuel} V_{Fuel} \bar{f}_{Fuel} + \sum_a^{Mod} V_{Mod} \bar{f}_{Mod}} \quad (1)$$

Quando invece, all'interno del combustibile, nascono i veleni, la relazione precedente si modifica come segue:

$$f' = \frac{\sum_a^{Fuel} V_{Fuel} \bar{f}_{Fuel}}{\sum_a^{Fuel} V_{Fuel} \bar{f}_{Fuel} + \sum_a^{Mod} V_{Mod} \bar{f}_{Mod} + \sum_a^{Veleni} V_{Fuel} \bar{f}_{Fuel}} \quad (2)$$

La sezione d'urto \sum_a^{Fuel} non cambia perché i veleni principali nascono praticamente subito; pensiamo invece al parametro k e notiamo che, essendo legato al termine f dalla relazione:

$$k = epfh \quad (3)$$

appare evidente che, considerando il termine f' , si potrà di conseguenza introdurre un termine k' così che la variazione di reattività dovuta alla presenza dei veleni possa essere espressa come:

$$r_{Veleni} = \frac{k' - k}{k'} = \frac{f' - f}{f'}$$

Esplicitando ora i termini f ed f' come mostrato nelle relazioni (1) e (2) si ottiene:

$$r_{Veleni} = - \frac{\sum_a^{Veleni} V_{Fuel} \bar{f}_{Fuel}}{\sum_a^{Fuel} V_{Fuel} \bar{f}_{Fuel} + \sum_a^{Mod} V_{Mod} \bar{f}_{Mod}} \quad (4)$$

Combinando ora la relazione (3) con la relazione (1) si ottiene:

$$k = ep \frac{\sum_a^{Fuel} V_{Fuel} \bar{f}_{Fuel}}{\sum_a^{Fuel} V_{Fuel} \bar{f}_{Fuel} + \sum_a^{Mod} V_{Mod} \bar{f}_{Mod}} h$$

dalla quale si ricava:

$$\sum_a^{Fuel} V_{Fuel} \bar{f}_{Fuel} + \sum_a^{Mod} V_{Mod} \bar{f}_{Mod} = \frac{ep \sum_a^{Fuel} V_{Fuel} \bar{f}_{Fuel} h}{k}$$

Sostituendo dunque quest'ultima espressione nella relazione (4) si ottiene:

$$r_{Veleni} = - \frac{k \sum_a^{Veleni}}{\sum_a^{Fuel} ep h}$$

Sempre dalla relazione (3) si può ricavare:

$$f = \frac{k}{ep e}$$

e quindi, combinando le ultime due relazioni scritte, si ricava:

$$r_{Veleni} = -f \frac{\sum_a^{Veleni}}{\sum_a^{Fuel}} \quad (5)$$

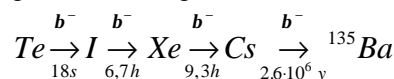
Definiamo ora il fattore di avvelenamento nel modo seguente:

$$P = \frac{\sum_a^{Veleni}}{\sum_a^{Fuel}}$$

così da poter riscrivere la relazione (5) come segue:

$$r_{Veleni} = -fP$$

Come avevamo accennato nella scorsa lezione i due veleni più pericolosi sono lo Xenon (Xe) e il Samario (Sm); per iniziare ci occuperemo dello ^{135}Xe , protagonista della seguente catena di decadimenti:



Siccome il Tellurio (Te) decade in un tempo assolutamente irrilevante rispetto agli altri, possiamo evitare di considerarlo e supporre che la catena parta dallo Iodio (I), caratterizzato da una resa:

$$y_I = 6,1\%$$

Oltre a derivare dallo Iodio, lo Xenon ha anche una resa diretta:

$$y_{Xe} = 0,3\%$$

Notiamo poi che Iodio, Cesio (Cs) e Bario (Ba) hanno una sezione d'urto di cattura talmente piccola da non essere dei veleni significativi; il pezzo di catena che ci interessa ai fini dello studio dell'avvelenamento del reattore è dunque solo il seguente:



E' ovviamente essenziale conoscere le costanti di decadimento, che sono:

$$\begin{cases} \lambda_I = 2,87 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \\ \lambda_{Xe} = 2,09 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \end{cases}$$

Iniziamo dunque a considerare l'equazione di bilancio relativa allo Iodio, che sarà:

$$\frac{dI}{dt} = \sum_f f y_I - \lambda_I I - s_a^I f I$$

La sparizione dello Iodio per decadimento in Xenon è talmente preponderante rispetto alla sparizione per assorbimento da poter riscrivere quest'ultima espressione nel modo seguente:

$$\frac{dI}{dt} = \sum_f f y_I - \lambda_I I$$

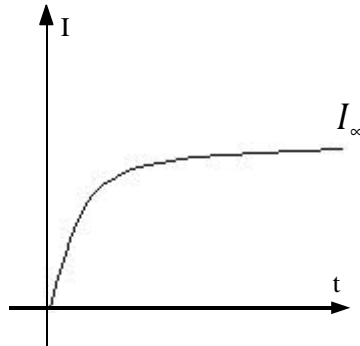
dalla quale si ricava:

$$I = \frac{\sum_f f y_I}{\lambda_I} (1 - e^{-\lambda_I t}) = I_\infty (1 - e^{-\lambda_I t})$$

dove si è posto:

$$I_\infty = \frac{\sum_f f y_I}{\lambda_I} \quad (7)$$

Dal punto di vista grafico si avrà allora:



Il numero di atomi di Iodio che, a saturazione, decadono nell'unità di tempo, sono dunque:

$$\lambda_I I_\infty = \sum_f f y_I$$

Passiamo ora alla seconda parte della reazione (6), ovvero concentriamoci sulla produzione dello Xenon. L'equazione di bilancio sarà, in questo caso:

$$\frac{dXe}{dt} = \lambda_I I + \sum_f f y_{Xe} - \lambda_{Xe} Xe - s_a^{Xe} f Xe$$

Tale equazione di bilancio ci porta, come vediamo nel primo grafico della pagina seguente, a qualcosa di più complesso. In questo caso si avrà:

$$Xe_\infty = \frac{\lambda_I I_\infty + \sum_f f y_{Xe}}{\lambda_{Xe} + s_a^{Xe} f}$$

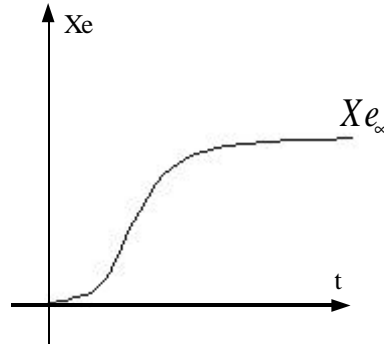
Combinando quest'ultima espressione con la relazione (7) si ricava:

$$Xe_\infty = \frac{\sum_f f (y_I + y_{Xe})}{\lambda_{Xe} + s_a^{Xe} f} = \frac{\sum_f f y_{Xe}^{Tot}}{\lambda_{Xe} + s_a^{Xe} f}$$

dove si è posto:

$$y_{Xe}^{Tot} = y_I + y_{Xe}$$

che prende il nome di resa totale dello Xe.



Ora abbiamo tutto quello che ci serve per valutare il fattore di avvelenamento dovuto allo Xe, che sarà:

$$P_{Xe} = \frac{s_a^{Xe} Xe_\infty}{\sum_a^{Fuel}} = \frac{s_a^{Xe} (\sum_f f y_{Xe}^{Tot})}{(I_{Xe} + s_a^{Xe} f) \sum_a^{Fuel}}$$

L'eccesso di reattività per contrastare l'avvelenamento da Xe sarà allora:

$$r_{Xe} = -f \frac{s_a^{Xe} (\sum_f f y_{Xe}^{Tot})}{(I_{Xe} + s_a^{Xe} f) \sum_a^{Fuel}} \quad (8)$$

Dati i seguenti valori numerici:

$$\begin{cases} I_{Xe} = 2,09 \cdot 10^{-5} \\ s_a^{Xe} = 2,7 \cdot 10^6 \cdot 10^{-24} \end{cases}$$

possiamo osservare che, quando il flusso è elevato, è possibile fare la seguente semplificazione:

$$I_{Xe} + s_a^{Xe} f \approx s_a^{Xe} f$$

che, sostituita nella relazione (8) ci permette di scrivere, sempre nel caso di flussi elevati:

$$r_{Xe} \approx -f \frac{\sum_f y_{Xe}^{Tot}}{\sum_a^{Fuel}} \quad (9)$$

Partendo con combustibile critico si avrà:

$$epf\eta = 1$$

ovvero:

$$epf \frac{d\sum_f}{\sum_a^{Fuel}} = 1$$

dalla quale si ricava:

$$f = \frac{1}{epn} \frac{\sum_a^{Fuel}}{\sum_f}$$

Riscrivendo la relazione (9) combinata con quest'ultima ed esprimendo l'effettivo danno che lo Xenon arreca alla reattività (ovvero considerando il tutto con il segno positivo) si ottiene:

$$r_{Xe} \equiv \frac{y_{Xe}^{Tot}}{epn}$$

Sfruttando i valori numerici prima assegnati e ponendo:

$$ep \approx 0,9$$

si ricava:

$$r_{Xe} = 2,84\%$$

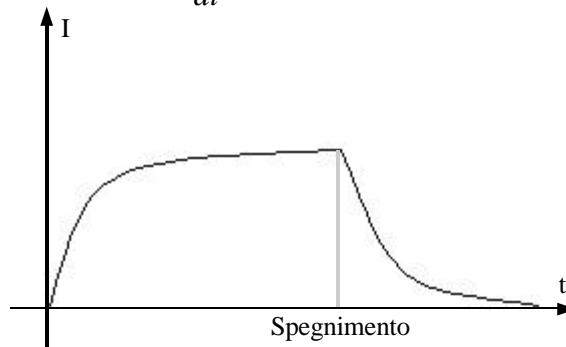
Abbiamo dunque trovato il massimo danno alla reattività che lo Xenon può fare.

Supponiamo ora, dopo aver raggiunto la saturazione sia per lo Iodio che per lo Xenon, di spegnere il reattore. Anche in questo caso dovremo scrivere delle reazioni di bilancio per vedere come si comportano lo Iodio e lo Xenon; siccome non c'è più produzione, l'equazione di bilancio relativa allo Iodio sarà:

$$\frac{dI}{dt} = -\lambda_I I$$

dalla quale si ottiene l'andamento rappresentato nel grafico seguente. Nel caso dello Xenon, invece, l'equazione di bilancio dopo lo spegnimento sarà:

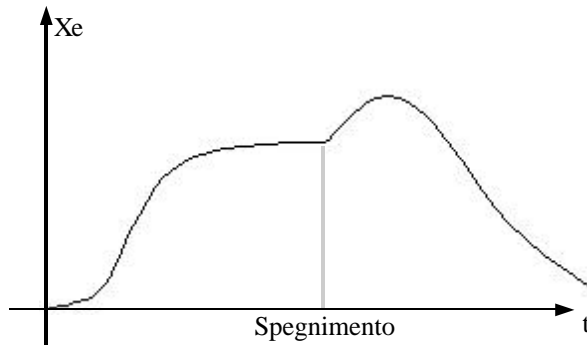
$$\frac{dX_e}{dt} = I_1 I - I_{Xe} X_e$$



Il livello di flusso precedente lo spegnimento è l'elemento che determina il segno della differenza che appare a secondo membro; quando il flusso è alto si ha:

$$I_1 I > I_{Xe} X_e \tag{10}$$

e quindi l'andamento è quello rappresentato dal grafico seguente.



Da tale grafico possiamo osservare come sia possibile che la perdita di reattività dopo lo spegnimento sia maggiore della perdita di reattività durante il funzionamento del reattore. Questo significa che durante un certo tempo Δt dopo lo spegnimento potrei non essere più in grado di riaccendere il reattore. Un modo per diminuire tale tempo morto consiste nell'aumentare la reattività in eccesso; dobbiamo comunque ricordare che, spegnendo il reattore, le temperature scendono e quindi riesco comunque a recuperare un po' di reattività in eccesso che prima mi serviva per contrastare gli effetti di temperatura. A volte, dunque, invece di non riuscire a riaccendere il reattore, semplicemente bisogna farlo lavorare per un po' a potenze molto ridotte.

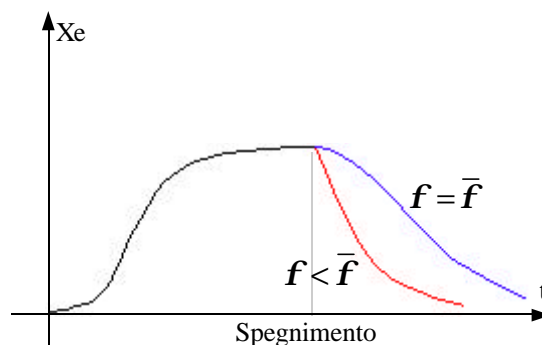
Riscriviamo ora la relazione (10) nel modo seguente:

$$y_I > \frac{I_{Xe} (y_I + y_{Xe})}{I_{Xe} + s_a^{Xe} f}$$

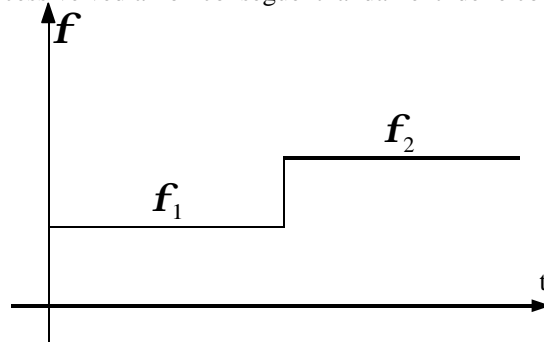
dalla quale si ricava:

$$f > \frac{I_{Xe} y_{Xe}}{s_a^{Xe} y_I} = 3,4 \cdot 10^{11}$$

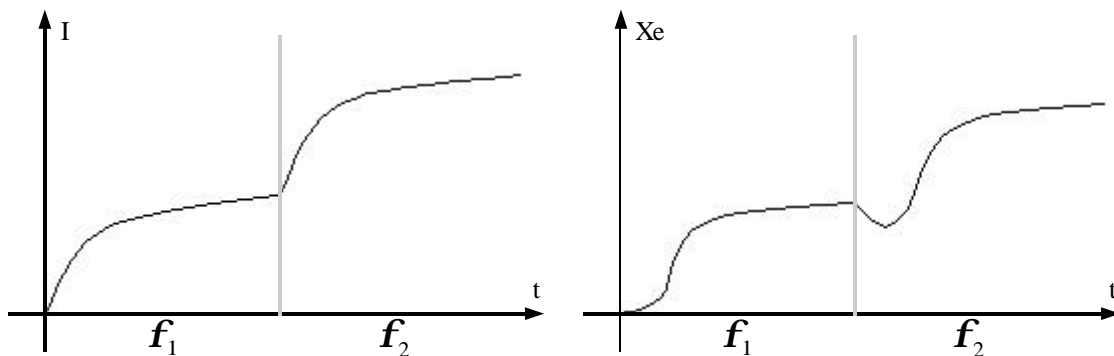
abbiamo dunque trovato il limite oltre il quale l'andamento della concentrazione di Xenon cresce inizialmente dopo che il reattore è stato spento. Quando il flusso è uguale o minore di questo limite, l'andamento della concentrazione di Xe dopo lo spegnimento sarà quello rappresentato nell'immagine seguente:



Un discorso del tutto analogo può essere fatto anche nel caso in cui il flusso, anche senza spegnersi, si abbassa. Il discorso inverso vale quando il flusso si alza. Nell'immagine seguente vediamo il flusso che si alza di una certa quantità; nelle due immagini successive vediamo i conseguenti andamenti delle concentrazioni di I e di Xe.

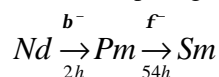


In questo caso vediamo, osservando l'andamento della concentrazione di Xe, che alzando il flusso, la concentrazione può anche scendere.

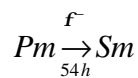


Le instabilità dovute allo Xe possono provocare dei problemi ed è quindi importante monitorare attentamente tutto il reattore onde evitare pericolosi sbilanciamenti del flusso.

Passiamo ora al secondo dei due veleni principali: il ^{149}Sm , protagonista della seguente catena di decadimenti:



Anche in questo caso approssimiamo la catena e supponiamo che la fissione faccia nascere direttamente Pm. La catena di decadimenti si riduce quindi ad essere:



Sono necessari i due valori numerici riguardanti il rendimento e la costante di decadimento del Pm:

$$\begin{cases} y_{\text{Pm}} = 1,13\% \\ \lambda_{\text{Pm}} = 3,56 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1} \end{cases}$$

Anche in questo caso saranno necessarie due equazioni di equilibrio: quella relativa al Pm sarà la seguente:

$$\frac{d\text{Pm}}{dt} = \sum_f f y_{\text{Pm}} - \lambda_{\text{Pm}} \text{Pm}$$

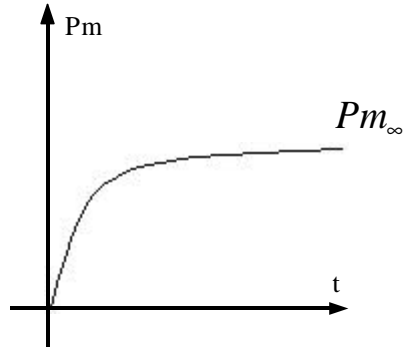
dalla quale si ricava:

$$\text{Pm} = \frac{\sum_f f y_{\text{Pm}}}{\lambda_{\text{Pm}}} (1 - e^{-\lambda_{\text{Pm}} t}) = \text{Pm}_{\infty} (1 - e^{-\lambda_{\text{Pm}} t})$$

dove sia:

$$\text{Pm}_{\infty} = \frac{\sum_f f y_{\text{Pm}}}{\lambda_{\text{Pm}}}$$

L'andamento della concentrazione del Pm sarà dunque il seguente



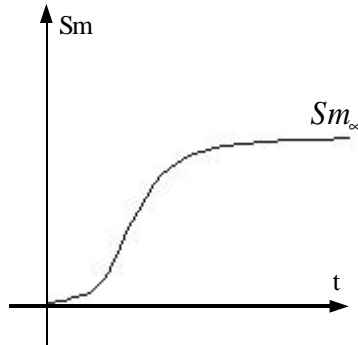
Per quanto riguarda il Sm, invece, l'equazione di equilibrio sarà la seguente:

$$\frac{dSm}{dt} = I_{Pm} Pm - s_a^{Sm} f Sm$$

dalla quale si ricava:

$$Sm_{\infty} = \frac{I_{Pm} Pm_{\infty}}{s_a^{Sm} f} = \frac{\sum_f f y_{Pm}}{s_a^{Sm} f} = \frac{\sum_f y_{Pm}}{s_a^{Sm}}$$

L'andamento della concentrazione di Sm è il seguente



Nell'ultima relazione scritta vediamo sparire la dipendenza dal flusso, ciò è comprensibile perché il Sm è stabile e non ha resa diretta. Il fattore di avvelenamento dovuto al Sm sarà dunque:

$$P_{Sm} = \frac{\sum_f y_{Pm}}{\sum_a^{Fuel}}$$

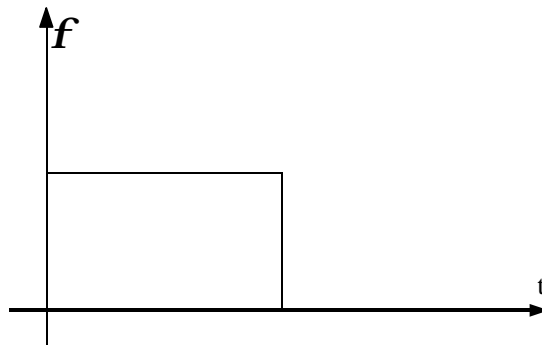
la sezione d'urto del Sm si fa sentire soltanto durante il raggiungimento dell'equilibrio. Dall'ultima relazione scritta si può ricavare, con un ragionamento identico a quello fatto per lo Xe, la perdita di reattività dovuta al Sm:

$$r_{Sm} = -f \frac{\sum_f y_{Pm}}{\sum_a^{Fuel}} = -\frac{y_{Pm}}{epn}$$

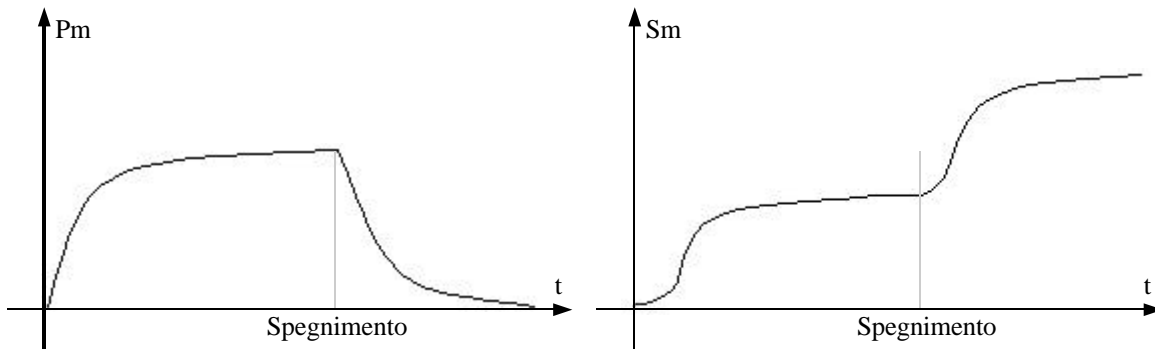
Con i medesimi numeri visti primi si ottiene:

$$r_{Sm} \cong 0,5\%$$

Anche per quanto riguarda il Sm possiamo fare il medesimo discorso visto nel caso dello Xe a proposito dello spegnimento; se dunque l'andamento del flusso fosse il seguente:

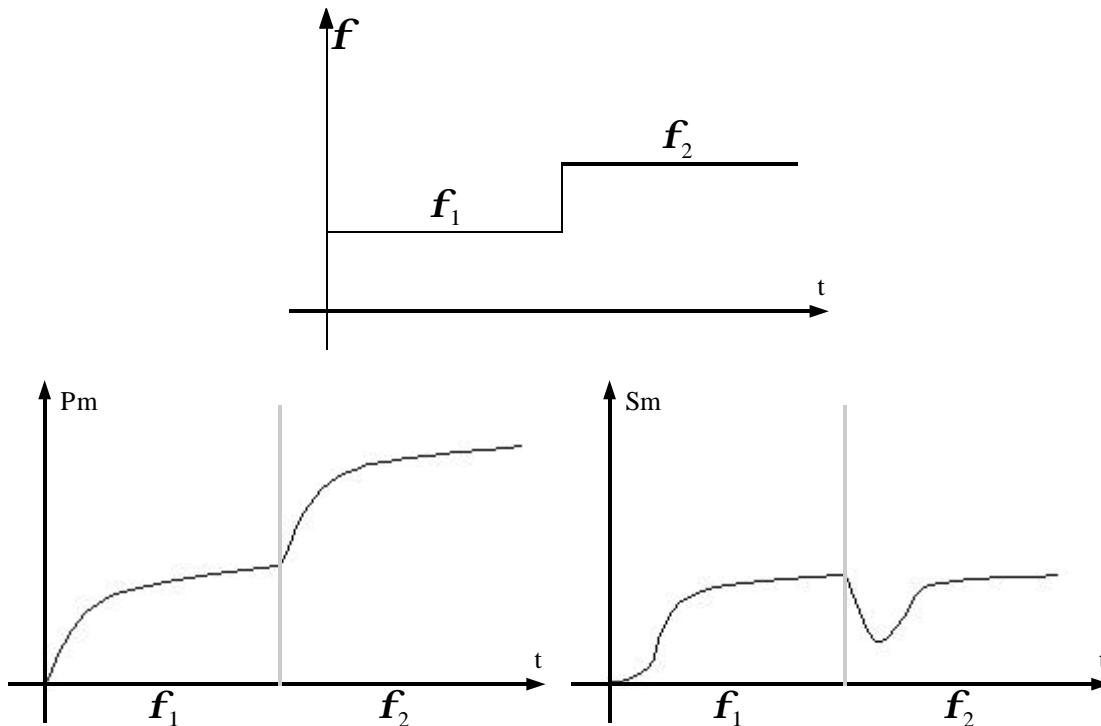


L'andamento delle concentrazioni di Pm e di Sm sarebbe, di conseguenza, il seguente:



Se invece l'andamento del flusso fosse quello rappresentato nella immagine seguente, come conseguenza le concentrazioni di Pm e di Sm evolverebbero come mostrato nelle immagini successive. Anche nel caso del Sm, dunque, ci sono delle oscillazioni che, però, sono meno problematiche di quelle dovute allo Xe a causa di valori assoluti nettamente minori.

Siccome Xe e Sm raggiungono il massimo della loro concentrazione in tempi brevi rispetto al tempo di giacenza del combustibile nel reattore, questi due veleni sono detti veleni saturabili.



La giacenza del combustibile nel reattore si misura, più che in tempo, in energia specifica e in flusso integrato; nei reattori ad acqua si può arrivare fino a bruciamenti di 40000 MWD per tonnellata e fluenze di $4 \cdot 10^{21} n / cm^2$. Anche per i veleni meno assorbenti si dovranno considerare equazioni di bilancio del tipo:

$$\frac{dA}{dt} = \sum_f f y_A - s_A f_A - I_A A$$

dalle quali si otterranno espressioni del tipo:

$$A = \frac{\sum_f f y_A}{I_A + s_A f} \left(1 - e^{-(I_A + s_A f)t} \right)$$

Anche per questi veleni si raggiunge quindi la saturazione, il problema è però quello di stabilire il tempo necessario perché ciò avvenga. I calcoli dimostrano che tutti gli altri veleni sono non saturabili, nel senso che saturano in un tempo enorme rispetto a quello di effettiva giacenza in reattore.

Veleni non saturabili. Veleni saturabili a vita breve. Variazione di composizione del combustibile.

I veleni non saturabili sono moltissimi e non ci soffermiamo su ognuno di essi con l'accuratezza con la quale ci siamo fermati sui due veleni più importanti; ci basiamo invece sull'informazione secondo la quale studi approfonditi hanno garantito che, per gestire la caduta di reattività dovuta a tali veleni, è sufficiente immaginare che, per ogni fissione, appaia una sezione d'urto microscopica di cattura di 50 b. Per vedere come tutto ciò influisce nella perdita complessiva di reattività ricordiamo le due importanti relazioni seguenti:

$$\begin{cases} \mathbf{r} = -fP \\ P = \frac{\sum_{\text{Veleno}}}{\sum_a^{Fuel}} \end{cases}$$

Dall'equazione di bilancio si ottiene inoltre, come abbiamo visto in chiusura della scorsa lezione, la seguente relazione:

$$A = \frac{\sum_f \mathbf{f}y_A}{\mathbf{I}_A + \mathbf{s}_a^A \mathbf{f}} \left(1 - e^{-(\mathbf{I}_A + \mathbf{s}_a^A \mathbf{f})t}\right)$$

dalla quale si ricava complessivamente, per tutti i veleni non saturabili:

$$N_{NonSat}(t) = \frac{\sum_f \mathbf{f}y}{\mathbf{I} + \mathbf{s}_{NonSat} \mathbf{f}} \left(1 - e^{-(\mathbf{I} + \mathbf{s}_{NonSat} \mathbf{f})t}\right) \quad (1)$$

Quando si parla di non saturabilità si intende che il tempo di saturazione è molto più grande dei tempi caratteristici del reattore, ovvero che:

$$T = \frac{1}{\mathbf{I} + \mathbf{s}_{NonSat} \mathbf{f}} \gg T_{Reatt}$$

In queste ipotesi la relazione (1) può essere sviluppata in serie ottenendo:

$$N_{NonSat}(t) = \frac{\sum_f \mathbf{f}y}{\mathbf{I} + \mathbf{s}_{NonSat} \mathbf{f}} \left(1 + \mathbf{s}_{NonSat} \mathbf{f}t\right) = \sum_f \mathbf{f}y t = \sum_f y[\mathbf{f}t]$$

dove $[\mathbf{f}t]$ prende il nome di flusso integrato o fluena. Dall'ultima relazione scritta discende che c'è un andamento lineare in funzione del tempo; nonostante questo si fa riferimento al flusso integrato e non semplicemente al tempo perché durante la sua vita, il reattore può essere spento e riacceso, funzionare a potenze differenti per tempi differenti. Per ovviare a questi aspetti si fa riferimento al flusso integrato la cui definizione rigorosa sarebbe la seguente:

$$X = \int_0^T \mathbf{f}(t) dt$$

Solo nel caso in cui il flusso rimane costante per tutto il tempo t, si ottiene:

$$X = \mathbf{f}t$$

Il fattore di avvelenamento relativo al complesso dei veleni non saturabili sarà allora il seguente:

$$P = \frac{\mathbf{s}_{NonSat} \sum_f y X}{\sum_a^{Fuel}}$$

e quindi la perdita di reattività dovuta a tali veleni sarà:

$$\mathbf{r}_{NonSat} = -f \frac{\mathbf{s}_{NonSat} \sum_f y X}{\sum_a^{Fuel}} = -\frac{1}{\mathbf{epn}} \mathbf{s}_{NonSat} y X$$

Avendo imposto che ad ogni fissione nasce un veleno con una sezione d'urto microscopica di 50 b, si avrà:

$$y = 1$$

che, combinata con la precedente, ci permette di ottenere la seguente relazione:

$$\mathbf{r}_{NonSat} = -\frac{1}{\mathbf{epn}} \mathbf{s}_{NonSat} X$$

L'andamento della variazione di reattività dovuta ai veleni non saturabili (confrontata con quella dovuta ai veleni saturabili) è rappresentato, pensando ad una situazione di flusso costante, nella prima immagine della pagina seguente. Facendo un rapido esempio numerico possiamo osservare che, nell'ipotesi di un flusso costante

$$f = 10^{13} \frac{n}{cm^2 s}$$

e di un tempo di un mese, ovvero:

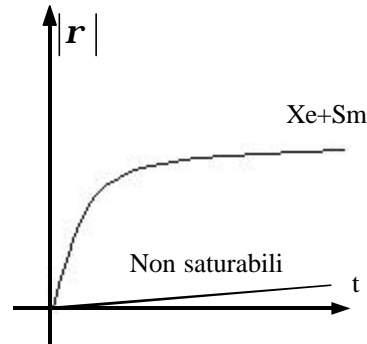
$$t = 2,592 \cdot 10^6 s$$

il flusso integrato sarebbe:

$$X = 2,6 \cdot 10^{19} \frac{n}{cm^2}$$

e quindi la caduta di reattività dovuta ai veleni non saturabili è, dopo tale periodo:

$$r_{NonSat} = 52 \frac{pcm}{mese}$$



Solo dopo quasi tre anni la caduta di reattività dovuta ai veleni non saturabili inizia ad essere confrontabile con quella dovuta ai veleni saturabili e sarà:

$$r_{NonSat} = 1,9\%$$

Iniziano dunque a comparire dei parametri che influenzano la vita del combustibile all'interno del reattore.

Dopo aver valutato i veleni saturabili più importanti e i veleni non saturabili, dobbiamo solo occuparci dei veleni saturabili di vita breve; torniamo dunque alla relazione

$$A_{\infty} = \frac{\sum_f f y_A}{I_A + s_a^A f}$$

In tutti i veleni saturabili a vita breve si ha:

$$I_A \gg s_a^A f$$

e quindi si può semplicemente scrivere:

$$A_{\infty} = \frac{\sum_f f y_A}{I_A}$$

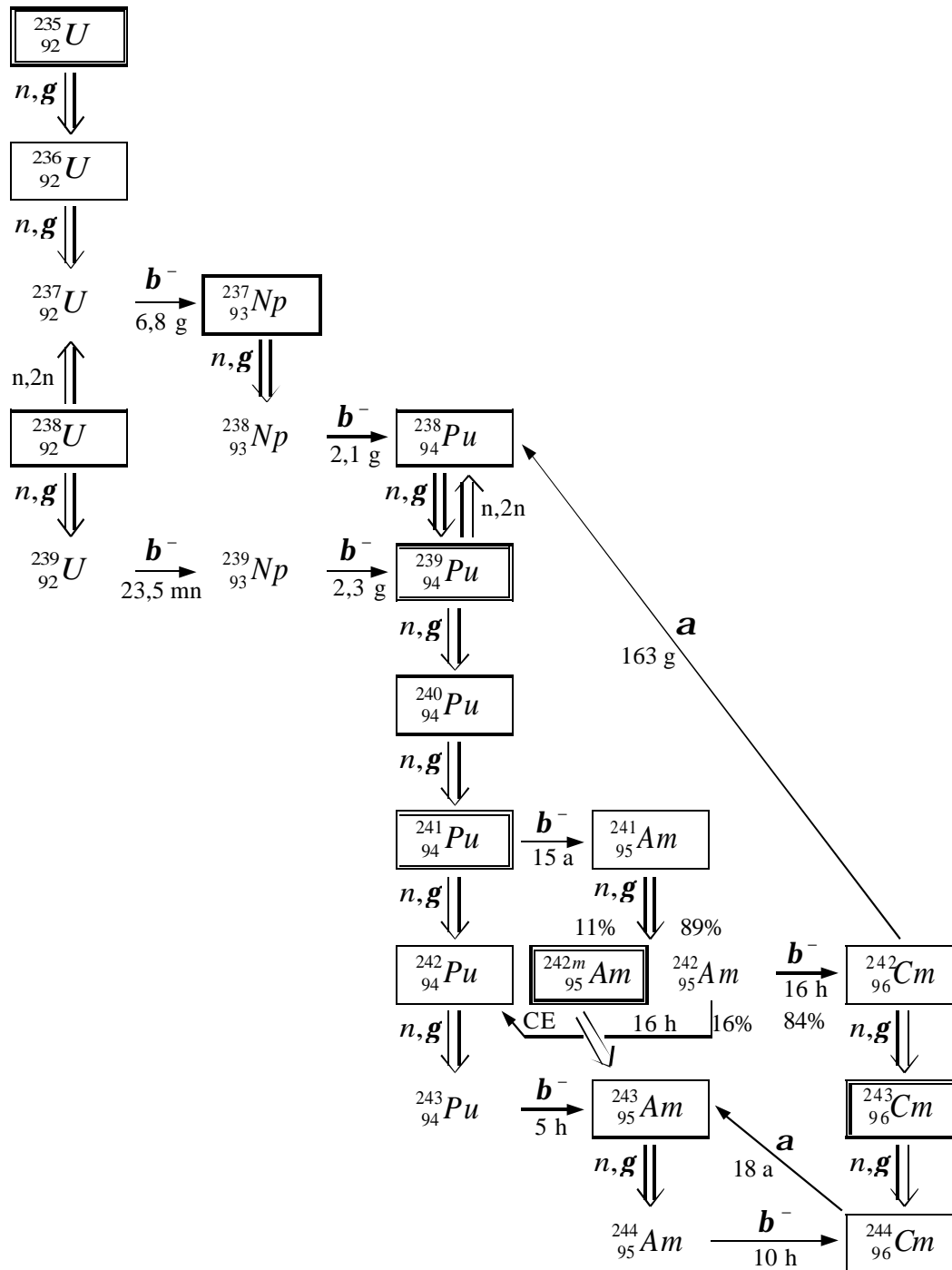
dalla quale si ricava:

$$\sum_{Veleno} = s_a^{Veleno} N_{Veleno} = \frac{\sum_f f y_A s_a^A}{I_A}$$

Possiamo dunque dire, osservando che la sez. d'urto è trascurabile, che i veleni saturabili di vita breve sono trascurabili. Vediamo ora come evolve nel tempo la composizione del combustibile, in particolare ci concentriamo su quello che avviene in un arco di tempo piuttosto ristretto (circa un mese). Dal punto di vista della reattività, in un tale intervallo di tempo si assiste ad una perdita di circa il 3% (indipendentemente dal tipo di reattore) dovuta ai veleni saturabili e ad una perdita dell'1% (nei reattori moderati a grafite) o del 10-15% (nei reattori moderati ad acqua) dovuta agli effetti di temperatura. Vediamo allora come si evolve il combustibile a partire dal primo mese (finito) e partiamo da una situazione nella quale il combustibile sia solo ^{235}U e ^{238}U . Nell'immagine della pagina seguente vediamo la catena (semplificata) dell'Uranio mentre in quella successiva vediamo quella del Torio che ci danno un'idea di come evolve il combustibile all'interno del reattore. Osservando tali schemi vediamo che le reazioni più frequenti sono (n,γ) ed $(n,2n)$; vediamo dunque che si originano una gran quantità di elementi; per avere una comprensione completa di come si evolve la reattività nel reattore dovremmo sapere, istante per istante, come evolvono tutti questi elementi. Ovviamente un'analisi così dettagliata è improponibile. Ricordiamo dunque la seguente relazione:

$$k_{\infty} = \epsilon p f h$$

Sappiamo però che il termine k è dato dal rapporto tra la produzione e la somma delle catture e delle fughe.



Se consideriamo un reattore nel quale le fughe sono trascurabili (ovvero un reattore grosso) il termine k si riduce ad essere il rapporto tra la produzione e la cattura; all'inizio del funzionamento del reattore il termine di produzione sarà il seguente:

$$prod = n^{238} \Sigma_f^{238} \mathbf{f} + n^{235} \Sigma_f^{235} \mathbf{f}$$

in quanto sono presenti solo i due isotopi dell'Uranio; ad un generico tempo t della vita del reattore, quando già sono presenti molti altri elementi, si avrà:

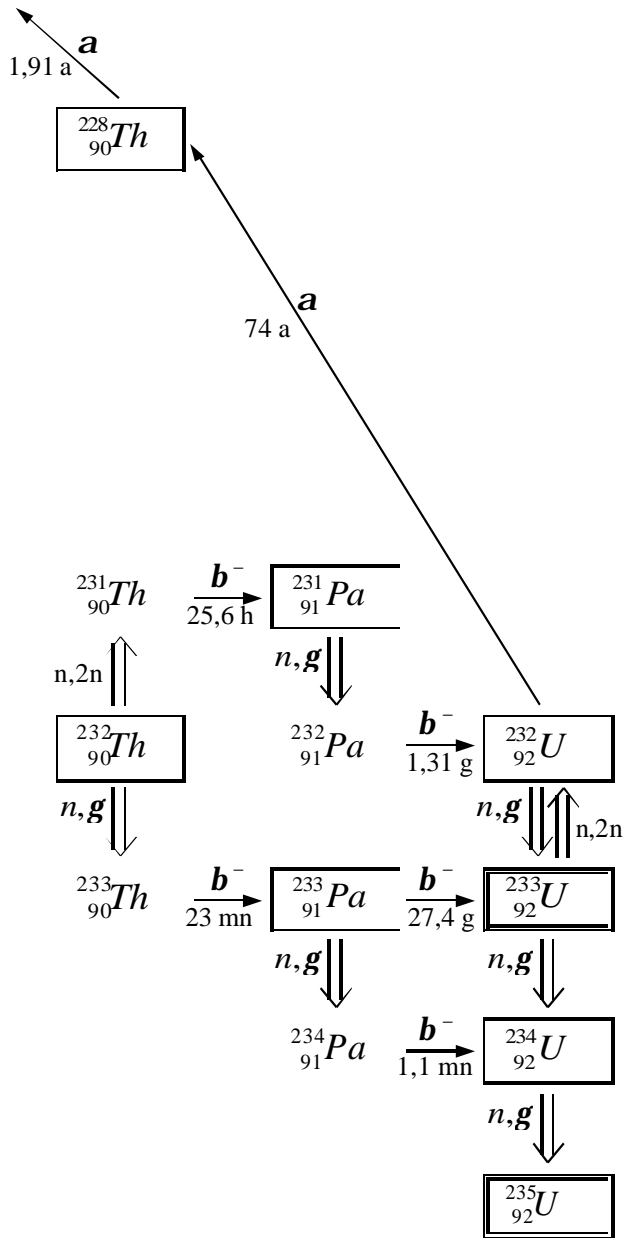
$$prod = \sum_i n^i \Sigma_f^i \mathbf{f}$$

Un discorso analogo può essere fatto per il termine di cattura, all'istante iniziale si avrà:

$$catt = \Sigma_a^{238} \mathbf{f} + \Sigma_a^{235} \mathbf{f} + \Sigma_R \mathbf{f}$$

in cui Σ_R racchiude il moderatore, i veleni saturabili e tutti i materiali strutturali. All'istante generico, invece, si avrà:

$$catt = \sum_i \Sigma_a^i \mathbf{f} + \Sigma_R \mathbf{f} + \Sigma_{NonSat} \mathbf{f}$$



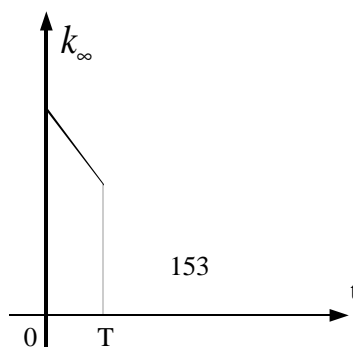
Con riferimento al tempo iniziale si può dunque scrivere:

$$k_{\infty}(t=0) = \frac{(n^{238} \Sigma_f^{238} + n^{235} \Sigma_f^{235}) \mathbf{f}_0}{(\Sigma_a^{238} + \Sigma_a^{235}) \mathbf{f}_0 + \Sigma_R \mathbf{f}_0}$$

Questa può essere utilizzata per ricavare Σ_R in quanto, nella situazione iniziale, tutti gli altri parametri sono noti. Dopo un certo tempo, invece, si avrà:

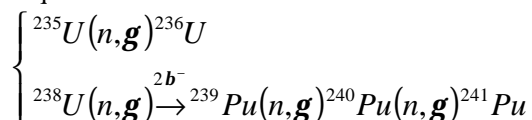
$$k_{\infty}(t=T) = \frac{\sum_i n^i \Sigma_f^i \mathbf{f}}{\sum_i \Sigma_a^i \mathbf{f} + \Sigma_R \mathbf{f} + \Sigma_{NonSat} \mathbf{f}}$$

L'andamento del parametro k è rappresentato nel grafico seguente.



Storia del combustibile. Approssimazione a 6 isotopi. La fluenza. Il burnup. Matrice esponenziale. I coefficienti di conversione.

Il combustibile lavora all'interno del reattore per circa quattro anni; dopo tale periodo viene estratto e raffreddato per altri 5 anni. Tale raffreddamento avviene in piscine (progettate con un geometria tale da non dare luogo a pericoli di criticità) nelle quali avvengono anche reazioni (n,α) e fissioni spontanee, che originano un piccolo flusso. Dopo il tempo di raffreddamento ci può essere il processo di separazione chimica tramite il quale si estrae U e Pu (che servirà per fare del nuovo combustibile), prodotti di fissione e attinidi minori. In ognuna di queste fasi è necessario conoscere la quantità dei vari elementi. In questo corso ci si occupa ovviamente solo del primo step, nel quale il combustibile è effettivamente all'interno del reattore. Questa è l'unica fase della vita del combustibile nella quale c'è un flusso elevato. Torniamo dunque a fare riferimento alle catene semplificate dell'Uranio che sono state viste nella lezione precedente e le semplifichiamo ulteriormente. Da questo momento faremo infatti riferimento alle seguenti due semplici catene:



Utilizzando solo queste due catene semplificate ci occuperemo solo di sei nuclidi: ${}^{238}\text{U}$, ${}^{236}\text{U}$, ${}^{235}\text{U}$, ${}^{239}\text{Pu}$, ${}^{240}\text{Pu}$ e ${}^{241}\text{Pu}$. Ci metteremo nel caso di Uranio arricchito al 3%, ovvero di Uranio che presenta, per ogni tonnellata, 30 kg di ${}^{235}\text{U}$ e 970 kg di ${}^{238}\text{U}$. Ci disinteresseremo, inoltre, del tempo di decadimento del ${}^{239}\text{Pu}$, che decade in ${}^{235}\text{U}$ ma con un tempo di dimezzamento di 24000 anni. Per quanto riguarda l' ${}^{235}\text{U}$ dovremo allora considerare la seguente equazione di bilancio:

$$\frac{dN_{235}}{dt} = -s_a^{235} f N_{235} \quad (1)$$

che deve ovviamente essere corredata della condizione iniziale, ovvero della concentrazione iniziale che chiameremo N_0^{235} . Per quanto riguarda l' ${}^{238}\text{U}$, invece, l'equazione di bilancio dovrà essere la seguente:

$$\frac{dN_{238}}{dt} = -s_a^{238} f N_{238}$$

corredata anch'essa di una concentrazione iniziale N_0^{238} . Nel caso del ${}^{239}\text{Pu}$ la condizione iniziale sarà la seguente:

$$N_0^{239} = 0$$

perché se ci mettiamo nel caso di combustibile pulito non abbiamo inizialmente ${}^{239}\text{Pu}$; l'equazione di equilibrio sarà:

$$\frac{dN_{239}}{dt} = s_g^{238} f N_{238} - s_a^{239} f N_{239}$$

il medesimo discorso verrà poi fatto per gli altri nuclidi in questione. Per il ${}^{240}\text{Pu}$ si avrà:

$$\frac{dN_{240}}{dt} = s_g^{239} f N_{239} - s_a^{240} f N_{240}$$

Per il ${}^{241}\text{Pu}$ si avrà:

$$\frac{dN_{241}}{dt} = s_g^{240} f N_{240} - s_a^{241} f N_{241}$$

Troviamo dunque sempre delle equazioni differenziali lineari del I ordine; dall'equazione relativa all' ${}^{235}\text{U}$ si ricava quindi:

$$N_{235}(t) = N_0^{235} e^{-s_a^{235} f t} \quad (2)$$

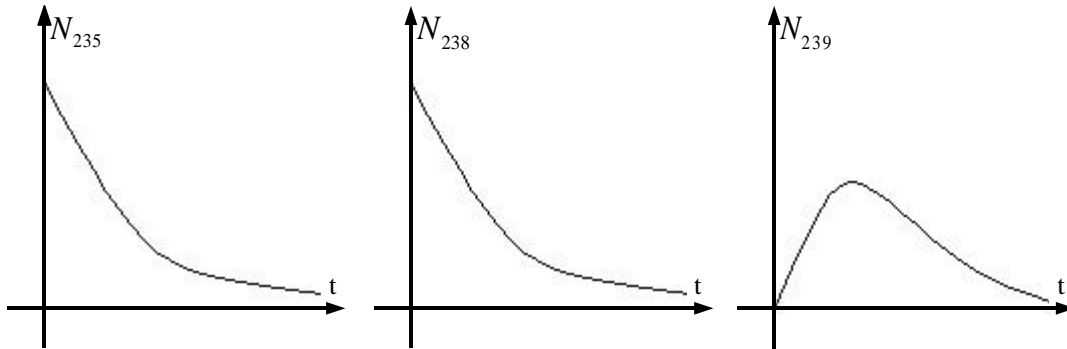
il cui grafico è il primo che segue. Dall'equazione relativa all' ${}^{238}\text{U}$ si ottiene:

$$N_{238}(t) = N_0^{238} e^{-s_a^{238} f t}$$

il cui grafico è il secondo che segue. Per quanto riguarda il ${}^{239}\text{Pu}$, a partire dalla sua equazione di bilancio si otterrà:

$$N_{239}(t) = \frac{N_0^{238} s_g^{238}}{s_a^{239} - s_a^{238}} \left(e^{-s_a^{238} f t} - e^{-s_a^{239} f t} \right)$$

il cui grafico è il terzo che segue. Stesso discorso per gli altri nuclidi. Ovviamente, più si va avanti nelle catene, più il numero degli esponenziali aumenta; proprio per questo motivo, invece di utilizzare la soluzione analitica, si utilizza un metodo numerico che vedremo in seguito.



Ad aumentare la complicazione è necessario precisare che, volendo operare in maniera rigorosa, invece di termini tipo

$$s_a^{235} f$$

si dovrebbero usare termini più complessi del tipo:

$$\int_0^{15MeV} s_a^{235}(E) f(E) dE$$

Oltre a questo bisognerebbe tener conto della dipendenza spaziale del flusso e anche di come il flusso varia nel tempo. I calcoli andrebbero dunque continuamente aggiornati, sia nello spazio che nel tempo. Per semplificare il problema useremo un flusso mediato nello spazio del reattore e nel tempo; siccome, inoltre, il flusso termico è quello che meglio si conosce, porremo:

$$R.R. = \int_0^{15MeV} s_a^{235}(E) f(E) dE = \bar{s} f_{Th}$$

dove ovviamente si avrà la conservazione del tasso di reazione:

$$\bar{s} = \frac{R.R.}{f_{Th}}$$

da ora in avanti utilizzeremo queste sezioni d'urto mediate. Torniamo dunque alla relazione (2), che vale se il flusso è costante; è opportuno precisare che nei reattori di potenza il flusso è costante solo di rado perché quello che più conta è che sia costante la potenza, non tanto il flusso (in effetti anche la potenza non rimane costante per periodi molto lunghi perché comunque una volta all'anno bisogna spegnere il reattore per ricaricarlo) Alcuni concetti ci serviranno per bypassare tutti questi problemi. Ricordiamo innanzitutto la definizione di flusso integrato, secondo la quale si aveva:

$$X = \int f(t) dt$$

detta anche fluenza, da questa relazione si ricava:

$$dX = f(t) dt$$

Ciò ci permette di riscrivere la relazione (1) nel modo seguente:

$$\frac{dN_{235}}{dX} = -s_a^{235} N_{235}(t)$$

la cui soluzione sarà:

$$N_{235}(X) = N_0^{235} e^{-s_a^{235} X}$$

Non importa dunque quando arrivano i neutroni, il parametro che conta è la fluenza, che deve però essere nota; in questo modo l'ultima relazione scritta risulta perfettamente compatibile con la relazione (2). Quando faremo ancora riferimento al tempo ci riferiremo all'effettivo full power time. Mettiamoci ora nell'ipotesi di potenza costante. Ovviamente la potenza è proporzionale al flusso, in presenza di solo ^{235}U , si avrà:

$$P \div s_f^{235} f(t) N_{235}(t)$$

Se dunque la potenza è costante si avrà:

$$s_f^{235} f(t) N_{235}(t) = s_f^{235} f_0 N_0^{235}$$

ovvero:

$$f(t) N_{235}(t) = f_0 N_0^{235} \quad (3)$$

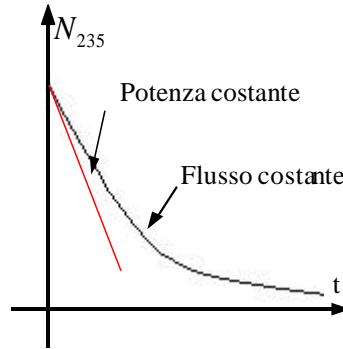
Possiamo allora considerare la seguente relazione:

$$\frac{dN_{235}}{dt} = s_a^{235} f_0 N_0^{235} = \text{const}$$

dalla quale si ricava:

$$N_{235}(t) = N_0^{235} [1 - s_a^{235} f_0 T]$$

Nel grafico seguente vediamo allora come si evolve la concentrazione, per esempio dell' ^{235}U nel caso in cui si mantenga costante il flusso o nel caso in cui si mantenga costante la potenza.



Combinando l'ultima relazione scritta con la (3) si ottiene:

$$f(t) = \frac{f_0 N_0^{235}}{N_0^{235} [1 - s_a^{235} f_0 T]} = \frac{f_0}{1 - s_a^{235} f_0 T} \quad (4)$$

vediamo dunque che il flusso sale.

Definiamo ora la resa energetica (altrimenti detta burnup) che non è altro che l'energia ricavata dal consumo del combustibile; il consumo dell' ^{235}U ha la seguente resa energetica:

$$E_{\text{resa}} = [N_0^{235} - N_{235}(T)] \frac{s_g^{235}}{s_a^{235}} E$$

Solitamente il burnup si misura in MWD/t.

Due parametri importanti per un reattore sono dunque il flusso integrato X e il burnup. Come abbiamo visto, inoltre, ci sono due situazioni particolarmente importanti: la situazione (1) è quella nella quale il flusso è costante; in questa situazione si potrà scrivere:

$$X = f_0 T$$

e si avrà dunque:

$$N_0^{235} - N_{235}(x) = \Delta N^{235} = N_0^{235} [1 - e^{-s_a^{235} X}] \quad (5)$$

da quest'ultima relazione si può poi ricavare il burnup. La seconda situazione importante è quella nella quale sia la potenza ad essere costante. In questo caso vale invece la relazione (4) e quindi la fluenza sarà:

$$X^I = \int f(t) dt = \int \frac{f_0'}{1 - s_a^{235} f_0' t} dt = -\frac{1}{s_a^{235}} \ln[1 - s_a^{235} f_0' T^I]$$

e si avrà dunque:

$$\Delta N^{235} = N_0^{235} s_a^{235} f_0' T^I \quad (6)$$

Imponiamo ora che la fluenza relativa al caso di flusso costante sia uguale alla fluenza relativa al caso di potenza costante; imponiamo dunque che sia:

$$X = X^I$$

che implica che anche le relazioni (5) e (6) siano tra di loro uguali, ovvero che sia:

$$1 - e^{-s_a^{235} X} = s_a^{235} f_0' T^I$$

Da questa relazione si ricava:

$$1 - s_a^{235} f_0' T^I = e^{-s_a^{235} X}$$

ovvero:

$$1 - s_a^{235} f_0' T^I = e^{-s_a^{235} f_0 T}$$

Passando poi ai logaritmi si ricava:

$$\ln(1 - s_a^{235} f_0^l T^l) = -s_a^{235} f_0^l T^l$$

ovvero:

$$-\frac{1}{s_a^{235}} \ln(1 - s_a^{235} f_0^l T^l) = f_0^l T^l$$

Da questa relazione si deduce che imponendo la medesima fluensa anche i consumi dovranno essere gli stessi.

Occupiamoci ora del metodo di risoluzione numerico al quale si era accennato in precedenza. Tale soluzione numerica nasce dall'osservazione che siamo sempre in presenza di equazioni lineari del I ordine. Torniamo dunque alla relazione (1) ed osserviamo che ha la seguente forma generica:

$$\dot{y} = ky$$

che, risolta, porta ad una soluzione del tipo:

$$y = y_0 e^{kt}$$

che si può sviluppare in serie nel modo seguente:

$$y = y_0 \left[1 + kt + \frac{(kt)^2}{2} + \dots \right]$$

che converge rapidamente se $kt \ll 1$.

Risolta poi un'equazione del primo ordine, si possono risolvere equazioni di ordini successivi grazie ad un processo ciclico e quindi si risolvono anche equazioni che hanno la seguente forma generica:

$$\begin{cases} \ddot{y} = k \dot{y} \\ \dddot{y} = k \ddot{y} \\ \dots \end{cases}$$

Il sistema delle equazioni di bilancio relative all' ^{235}U , all' ^{238}U ed al ^{239}Pu può dunque essere riscritto nel modo seguente:

$$\begin{cases} \dot{N}_{235} = -s_a^{235} f N_{235} \\ \dot{N}_{238} = -s_a^{238} f N_{238} \\ \dot{N}_{239} = s_g^{238} f N_{238} - s_a^{239} f N_{239} \end{cases}$$

Costruiamo quindi la seguente matrice che presenta, sulla diagonale principale, i termini di consumo:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} -s_a^{235} f & 0 & 0 \\ 0 & -s_a^{238} f & 0 \\ 0 & s_g^{238} f & -s_a^{239} f \end{bmatrix}$$

Il sistema potrà allora essere riproposto in forma matriciale nel modo seguente:

$$\dot{\underline{N}} = \underline{\underline{M}} \underline{N}(0)$$

Le soluzioni che si otterranno saranno del tipo:

$$\underline{N}(t) = \underline{\underline{e}}^{Mt} \underline{N}(0)$$

dove sia:

$$\underline{\underline{e}}^{Mt} = \left[\underline{I} + \underline{\underline{M}}t + \frac{(\underline{\underline{M}}t)^2}{2} + \dots \right]$$

Tale matrice prende il nome di matrice esponenziale e quindi il metodo numerico di cui stiamo parlando sarà il metodo della matrice esponenziale.

Anche in forma matriciale si possono eseguire operazioni cicliche, si avrà in questo caso:

$$\begin{cases} \ddot{N} = \underline{\underline{M}} \dot{N} \\ \dots \\ \dot{N} = \underline{\underline{M}} N \\ \dots \end{cases}$$

Volendo considerare tutti e 6 i nuclidi dei quali si è accennato all'inizio della lezione si avrà una matrice esponenziale così strutturata:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{matrix} & \begin{bmatrix} {}^{235}U \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} {}^{236}U \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} {}^{238}U \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} {}^{239}Pu \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} {}^{240}Pu \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} {}^{241}Pu \end{bmatrix} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \begin{bmatrix} {}^{235}U \end{bmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \begin{bmatrix} {}^{236}U \end{bmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \begin{bmatrix} {}^{238}U \end{bmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \begin{bmatrix} {}^{239}Pu \end{bmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \begin{bmatrix} {}^{240}Pu \end{bmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \begin{bmatrix} {}^{241}Pu \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Con questo metodo si possono calcolare le concentrazioni in funzione del tempo, della fluensa o del burnup. Con le relazioni che abbiamo appena visto e con il metodo numerico che abbiamo introdotto siamo in grado di calcolare, per esempio, quanto ${}^{239}Pu$ è rimasto al generico tempo t; per calcolare, invece, quanto ${}^{239}Pu$ è stato prodotto al tempo t, dobbiamo utilizzare la seguente relazione:

$${}^{239}Pu_p = (N_0^{238} - N_{238}) \frac{s_g^{238}}{s_a^{238}}$$

Altre informazioni importanti per gestire al meglio il combustibile all'interno del reattore sono il coefficiente di conversione differenziale (C.C.D.) e il coefficiente di conversione integrale (C.C.I.). Il C.C.D. non è altro che il rapporto tra il tasso di produzione del ${}^{239}Pu$ e il tasso di bruciamento dell' ${}^{235}U$ e sarà quindi:

$$C.C.D.(t) = \frac{s_g^{238} N_{238}(t)}{s_a^{235} N_{235}(t)}$$

Il coefficiente di conversione integrale è invece dato dal rapporto tra il ${}^{239}Pu$ presente ad un certo tempo t e l' ${}^{235}U$ fino a tale tempo bruciato, sarà quindi:

$$C.C.I.(t) = \frac{N_{239}(t)}{N_0^{235} - N_{235}(t)}$$

Qualora si consideri anche il ${}^{241}Pu$ (che è anche lui un buon fissile) il C.C.I. diventerà pari al rapporto tra la somma del ${}^{239}Pu$ e del ${}^{241}Pu$ presenti al tempo t e l' ${}^{235}U$ bruciato.

Un ulteriore parametro importante è la resa energetica per tonnellata ad un tempo t, che sarà ovviamente proporzionale alla totalità delle fissioni avvenute. Per ricavare le fissioni avvenute si può sfruttare ancora il metodo della matrice esponenziale ma bisogna utilizzare questa volta una matrice ottenuta orlando quella precedente con una nuova riga ed una nuova colonna; la nuova matrice esponenziale sarà la seguente:

$$\underline{\underline{M}}_1 = \begin{matrix} & \begin{bmatrix} {}^{235}U \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} {}^{236}U \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} {}^{238}U \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} {}^{239}Pu \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} {}^{240}Pu \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} {}^{241}Pu \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \begin{bmatrix} {}^{235}U \end{bmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \begin{bmatrix} {}^{236}U \end{bmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \begin{bmatrix} {}^{238}U \end{bmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \begin{bmatrix} {}^{239}Pu \end{bmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \begin{bmatrix} {}^{240}Pu \end{bmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \begin{bmatrix} {}^{241}Pu \end{bmatrix} \\ s_f^{235} f & s_f^{236} f & s_f^{238} f & s_f^{239} f & s_f^{240} f & s_f^{241} f & 1 & \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} \end{matrix}$$

La matrice esponenziale, dopo essere stata orlata in questo modo, va moltiplicata per il vettore colonna

$$\begin{bmatrix} N_{235} \\ N_{236} \\ N_{238} \\ N_{239} \\ N_{240} \\ N_{241} \\ f \end{bmatrix}$$

per ottenere le concentrazioni di isotopi e l'energia resa dal combustibile al successivo passo temporale.