

Matrice esponenziale. Disposizione del combustibile. Cinetica del reattore.

Nella scorsa lezione, per seguire l'evoluzione temporale di N nuclidi abbiamo introdotto la relativa matrice esponenziale di ordine N, che abbiamo poi orlato con un'ulteriore riga contenente le sezioni d'urto di fissione. Moltiplicando tale matrice per il vettore colonna delle concentrazioni e burnup al tempo t, si ottengono le stesse quantità al tempo t+Δt. Vediamo ora un esempio numerico dell'applicazione del metodo della matrice esponenziale; consideriamo dunque un reattore con Uranio arricchito al 3,5% e moderato ad acqua. Le sezioni d'urto caratteristiche che mi servono verranno ricavate da codici particolari, in particolare utilizzeremo il codice SCALE che mi permette di ottenere le sezioni d'urto in funzione del tempo (non considereremo, invece, la dipendenza spaziale). Siccome, come abbiamo visto, un reattore può essere descritto in due situazioni caratteristiche: quella relativa al flusso costante e quella relativa alla potenza costante, dobbiamo decidere quale tipo di approccio seguiremo: decidiamo dunque di utilizzare l'approccio a flusso costante sapendo che i risultati coincideranno con quelli a potenza costante pur di utilizzare la stessa fluenza e lo stesso burnup. Ricordiamo innanzitutto che:

$$200 \frac{\text{MeV}}{\text{fissione}} = 3,708 \cdot 10^{-22} \frac{\text{MWD}}{\text{fissione}}$$

Ricordiamo inoltre che, per ogni tonnellata di ^{235}U si avrà:

$$N_{235} = 2,653 \cdot 10^{27}$$

dalla quale ricaviamo la resa dell' ^{235}U (considerando che non tutto il consumo è dovuto alla fissione) che sarà:

$$\text{burnup}_{235} = 802794 \frac{\text{MWD}}{\text{ton}}$$

analogamente, per gli altri due fissili principali, si avrà:

$$\begin{cases} \text{burnup}_{239} = 659029 \frac{\text{MWD}}{\text{ton}} \\ \text{burnup}_{241} = 926700 \frac{\text{MWD}}{\text{ton}} \end{cases}$$

Siccome abbiamo detto che l'Uranio utilizzato è arricchito al 3,5%, il burnup teorico relativo all' ^{235}U sarebbe:

$$\text{burnup}_{235} = 0,035 \cdot 802794 = 38098 \frac{\text{MWD}}{\text{ton}}$$

Dobbiamo poi fare una ulteriore correzione dovuta al fatto che il combustibile non viene utilizzato fino a quando è completamente esaurito ma solo fino a quando la concentrazione di ^{235}U scende, nel caso in esame, allo 0,77% e quindi l'effettivo burnup dovuto all' ^{235}U sarà:

$$\text{burnup}_{235} = (0,035 - 0,0077) \cdot 802794 = 21900 \frac{\text{MWD}}{\text{ton}}$$

Sommando tutti i contributi dovuti a tutti gli isotopi fissili presenti già dall'inizio nel combustibile o che nascono durante il suo irraggiamento, il burnup di una tonnellata di combustibile si aggira intorno ai 35000 MWD.

Vediamo dunque un esempio numerico di applicazione della matrice esponenziale e consideriamo la seguente matrice:

$$\underline{\underline{\mathbf{s}}} = \begin{bmatrix} -484,18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 75,18 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,40 & -1503 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 443 & -750 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 747,5 & -1300 & 0 \\ 409 & 0 & 0,6 & 1060 & 2,5 & 1110 & 0 \end{bmatrix}$$

che bisogna moltiplicare per il flusso e per Δt. Quindi alla sottomatrice 6x6 viene applicato l'operatore esponenziale. Analizzando tale tabella si osserva come si siano usati i seguenti dati numerici:

$$\begin{cases} \mathbf{s}_a^{235} = 484,18b \\ \mathbf{s}_g^{238} = 75,18b \\ \mathbf{s}_f^{235} = 409b \end{cases}$$

mentre fino ad ora erano stati sempre riportati i seguenti valori:

$$\begin{cases} \mathbf{s}_a^{235} = 680b \\ \mathbf{s}_f^{235} = 580b \end{cases}$$

Le differenze numeriche sono dovute al fatto che gli ultimi valori citati sono quelli relativi ad un nucleo di ^{235}U che interagisce con un neutrone con le seguenti caratteristiche:

$$\begin{cases} v = 2200 \frac{m}{s} \\ E \approx 0,025eV \end{cases}$$

I valori che appaiono nella matrice sono invece valori efficaci che vengono ottenuti con relazioni come la seguente:

$$\bar{\mathbf{s}} = \frac{\int \mathbf{s}(E)\mathbf{f}(E)dE}{\int \mathbf{f}(E)dE} = \frac{\int \mathbf{s}(E)\mathbf{f}(E)dE}{\mathbf{f}_{Th}}$$

Le differenze sono dunque dovute agli effetti di temperatura e di autoschermo. Una differenza molto più marcata si ha, inoltre, per quanto riguarda i valori relativi all' ^{238}U ; osservando la matrice si deduce infatti che sono stati usati i seguenti valori:

$$\begin{cases} \mathbf{s}_a^{238} = 8b \\ \mathbf{s}_g^{238} = 7,4b \\ \mathbf{s}_f^{238} = 0,6b \end{cases}$$

Mettiamoci dunque nel caso di flusso costante e ricordiamo che il rendimento energetico di una fissione è pari a 200 MeV. In realtà si dovrebbe specificare che il rendimento energetico per fissione varia a seconda dell'elemento che fissiona; per semplicità noi porremo che tale valore sia uguale per tutti e sei i nuclidi che stiamo analizzando (ovvero supponiamo che i relativi termini correttivi siano tutti pari ad 1). Ci servono a questo punto delle informazioni aggiuntive relative alla potenza specifica iniziale, alla sezione d'urto microscopica dei veleni non saturabili e al flusso termico iniziale:

$$\begin{cases} P_{iniz} = 36,6739 \frac{MW}{t} \\ \mathbf{s}_{NonSat} = 50b \\ \mathbf{f}_{Th}^{iniz} = 30 \cdot 10^{12} \frac{n}{cm^2 s} \end{cases}$$

Fissando ora una potenza complessiva (che poniamo sia pari a 3000 MW) possiamo sfruttare la seguente relazione per ricavare l'effettiva massa di combustibile necessaria:

$$m = \frac{P_{Tot}}{P_{iniz}} = 81,8t$$

per semplicità noi continueremo invece ad occuparci di una sola tonnellata di combustibile. Imponiamo ora gli ultimi due dati numerici che ci servono: si utilizzino dunque 10 derivate (espansione di ordine 10 per il calcolo della matrice esponenziale) ed un passo temporale di 2 giorni; la matrice esponenziale è data da:

$$\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{Mt}} + \frac{(\underline{\underline{Mt}})^2}{2!} + \dots$$

Nella seguente tabella vediamo dunque i risultati numerici forniti dal calcolatore che sfrutta il metodo della matrice esponenziale; in particolare sono riportati il burnup al quale si fa riferimento, i giorni necessari a raggiungerlo, il flusso integrato che lo produce e la perdita di reattività dovuta ai veleni non saturabili.

Burnup [MWD/Ton]	Giorni	Fluenza o flusso integrato X	Perdita di reattività ρ (%)
0	0	0	0
$0,36656 \cdot 10^4$	100	$0,25920 \cdot 10^{21}$	0,631
$0,72711 \cdot 10^4$	200	$0,51840 \cdot 10^{21}$	1,254
$0,10764 \cdot 10^5$	300	$0,7776 \cdot 10^{21}$	1,872
$0,14121 \cdot 10^5$	400	$0,10368 \cdot 10^{22}$	2,487
$0,17336 \cdot 10^5$	500	$0,1296 \cdot 10^{22}$	3,098
$0,20411 \cdot 10^5$	600	$0,15552 \cdot 10^{22}$	3,703
$0,23353 \cdot 10^5$	700	$0,18144 \cdot 10^{22}$	4,300
$0,26174 \cdot 10^5$	800	$0,20736 \cdot 10^{22}$	4,890
$0,28883 \cdot 10^5$	900	$0,23328 \cdot 10^{22}$	5,472
$0,31490 \cdot 10^5$	1000	$0,2592 \cdot 10^{22}$	6,046
$0,34007 \cdot 10^5$	1100	$0,28512 \cdot 10^{22}$	6,610
$0,36440 \cdot 10^5$	1200	$0,31104 \cdot 10^{22}$	7,166

Siccome siamo nel caso di flusso costante (e non di potenza costante, in realtà la potenza diminuisce) il burnup, che è la variabile indipendente, non è lineare e quindi non è vero che il burnup relativo ai primi 500 giorni è la metà del burnup relativo ai primi mille giorni. Proprio perché il flusso è costante si ha, invece, che la fluenza è lineare e quindi la fluenza dei primi mille giorni è esattamente il doppio della fluenza dei primi 500 giorni. Bisogna inoltre osservare che, siccome il combustibile perde di reattività, nella realtà non si riuscirebbe ad arrivare a 1200 giorni senza ricambio. Nella tabella seguente vediamo invece i calcoli fatti con la matrice esponenziale riguardanti le concentrazioni dei sei nuclidi che stiamo studiando. Ovviamente si parte sempre da combustibile fresco.

Burnup [MWD/Ton]	^{235}U [kg/Ton]	^{236}U [kg/Ton]	^{238}U [kg/Ton]	^{239}Pu [kg/Ton]	^{240}Pu [kg/Ton]	^{241}Pu [kg/Ton]
0	35	0	965	0	0	0
$3,6656 \cdot 10^3$	30,872	0,643	963,001	1,538	0,088	0,006
$7,2711 \cdot 10^3$	27,231	1,210	961,006	2,576	0,294	0,035
$1,0764 \cdot 10^4$	24,019	1,708	959,016	3,276	0,552	0,096
$0,14121 \cdot 10^5$	21,186	2,147	957,029	3,747	0,825	0,183
$1,7336 \cdot 10^4$	18,687	2,533	955,047	4,063	1,090	0,291
$2,0411 \cdot 10^4$	16,483	2,872	953,068	4,274	1,335	0,409
$2,3353 \cdot 10^4$	14,539	3,171	951,094	4,414	1,555	0,532
$2,6174 \cdot 10^4$	12,824	3,433	949,124	4,505	1,748	0,654
$2,8883 \cdot 10^4$	11,312	3,663	947,158	4,564	1,915	0,771
$3,1490 \cdot 10^4$	9,978	3,865	945,196	4,601	2,057	0,879
$3,4007 \cdot 10^4$	8,801	4,043	943,238	4,622	2,177	0,978
$3,6440 \cdot 10^4$	7,763	4,198	941,284	4,634	2,278	1,067

Come possiamo ricavare da questi dati la concentrazione di ^{235}U alla fine dell'utilizzo del combustibile è scesa allo 0,77%, l' ^{238}U consumato sarà pari a 23,7 kg mentre il ^{239}Pu rimanente sarà pari a 4,634 kg e potrebbe essere conveniente estrarlo (osserviamo, dal bilancio dell' ^{238}U , che il ^{239}Pu che è stato prodotto è molto di più, quello che ho alla fine è solo quello che non è bruciato). Complessivamente, alla fine della sua vita utile, in ogni tonnellata di combustibile sono presenti circa 13 kg di fissili (^{235}U , ^{239}Pu e ^{241}Pu).

Nella tabella seguente vediamo come i vari elementi contribuiscono alla potenza generata.

Burnup [MWD/Ton]	^{235}U (%)	^{236}U (%)	^{238}U (%)	^{239}Pu (%)	^{240}Pu (%)	^{241}Pu (%)
0	96,160	0	3,840	0	0	0
$3,6656 \cdot 10^3$	85,280	0	3,853	10,825	0,001	0,040
$7,2711 \cdot 10^3$	77,178	0	3,945	18,606	0,005	0,265
$1,0764 \cdot 10^4$	70,615	0	4,084	24,546	0,010	0,746
$0,14121 \cdot 10^5$	64,964	0	4,251	29,282	0,015	1,488
$1,7336 \cdot 10^4$	59,894	0	4,434	33,187	0,021	2,464
$2,0411 \cdot 10^4$	55,227	0	4,625	36,493	0,027	3,628
$2,3353 \cdot 10^4$	50,868	0	4,820	39,352	0,033	4,928
$2,6174 \cdot 10^4$	46,768	0	5,014	41,868	0,038	6,313
$2,8883 \cdot 10^4$	42,904	0	5,204	44,113	0,043	7,736
$3,1490 \cdot 10^4$	39,267	0	5,388	46,140	0,048	9,157
$3,4007 \cdot 10^4$	35,851	0	5,566	47,984	0,053	10,546
$3,6440 \cdot 10^4$	32,655	0	5,735	49,675	0,057	11,878

Da questa tabella vediamo dunque che il primo valore sulla colonna dell' ^{238}U implica che sia:

$$e = 1,038$$

Osservando invece l'ultima riga si vede che a fine vita, l'elemento che contribuisce di più è proprio uno dei prodotti dell'irraggiamento: il ^{239}Pu .

Nella tabella seguente vediamo invece la ripartizione in energia tra i sei nuclidi in questione, ovvero vediamo quale frazione dell'energia ottenuta ad un certo burnup dipende da un nuclide piuttosto che da un altro.

Burnup [MWD/Ton]	^{235}U (%)	^{236}U (%)	^{238}U (%)	^{239}Pu (%)	^{240}Pu (%)	^{241}Pu (%)
0	96,160	0	3,840	0	0	0
$3,6656 \cdot 10^3$	90,420	0	3,838	5,730	0,001	0,011
$7,2711 \cdot 10^3$	85,796	0	3,866	10,264	0,002	0,072
$1,0764 \cdot 10^4$	81,916	0	3,913	13,962	0,004	0,205
$0,14121 \cdot 10^5$	78,552	0	3,973	17,051	0,006	0,417
$1,7336 \cdot 10^4$	75,563	0	4,041	19,685	0,008	0,703
$2,0411 \cdot 10^4$	72,852	0	4,115	21,969	0,010	1,054
$2,3353 \cdot 10^4$	70,358	0	4,191	23,979	0,013	1,459
$2,6174 \cdot 10^4$	68,038	0	4,269	25,771	0,015	1,906
$2,8883 \cdot 10^4$	65,864	0	4,348	27,385	0,018	2,386
$3,1490 \cdot 10^4$	63,813	0	4,427	28,853	0,020	2,887
$3,4007 \cdot 10^4$	61,872	0	4,504	30,199	0,022	3,403
$3,6440 \cdot 10^4$	60,028	0	4,581	31,443	0,024	3,924

Nella prima tabella della pagina seguente vediamo altri parametri significativi valutati per diversi valori del burnup. Da tale tabella possiamo osservare che non è assolutamente possibile mettere tutto il fuel all'inizio usandolo per 3 anni di seguito perché dopo un po' (dopo circa 800 giorni) il k_{∞} scende sotto l'unità e quindi il reattore diventa sottocritico. Nella realtà nel nocciolo sono contemporaneamente presenti elementi di combustibile di 3-4 diverse ricariche, che

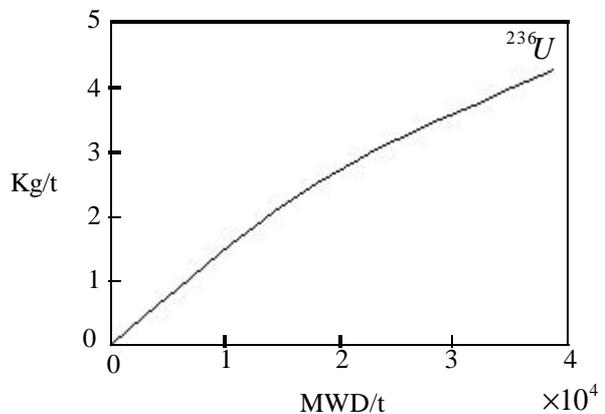
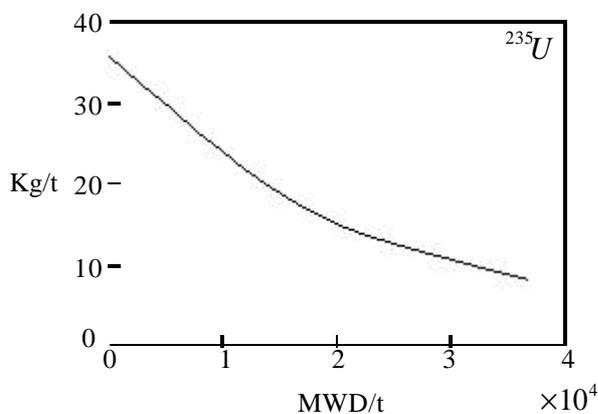
hanno cioè subito diversi gradi di bruciamento. Ovviamente quando il k scende sotto il valore 1 il reattore non è più in grado di sostenere la reazione a catena. Il C.C.I. è invece il coefficiente di conversione integrale e mi dice, istante per istante, quanti nuovi fissili sono presenti rispetto a quelli consumati; i valori numerici che appaiono in tale tabella sono quelli caratteristici dei reattori ad acqua, nel caso dei reattori veloci il C.C.I. può anche essere superiore ad 1.

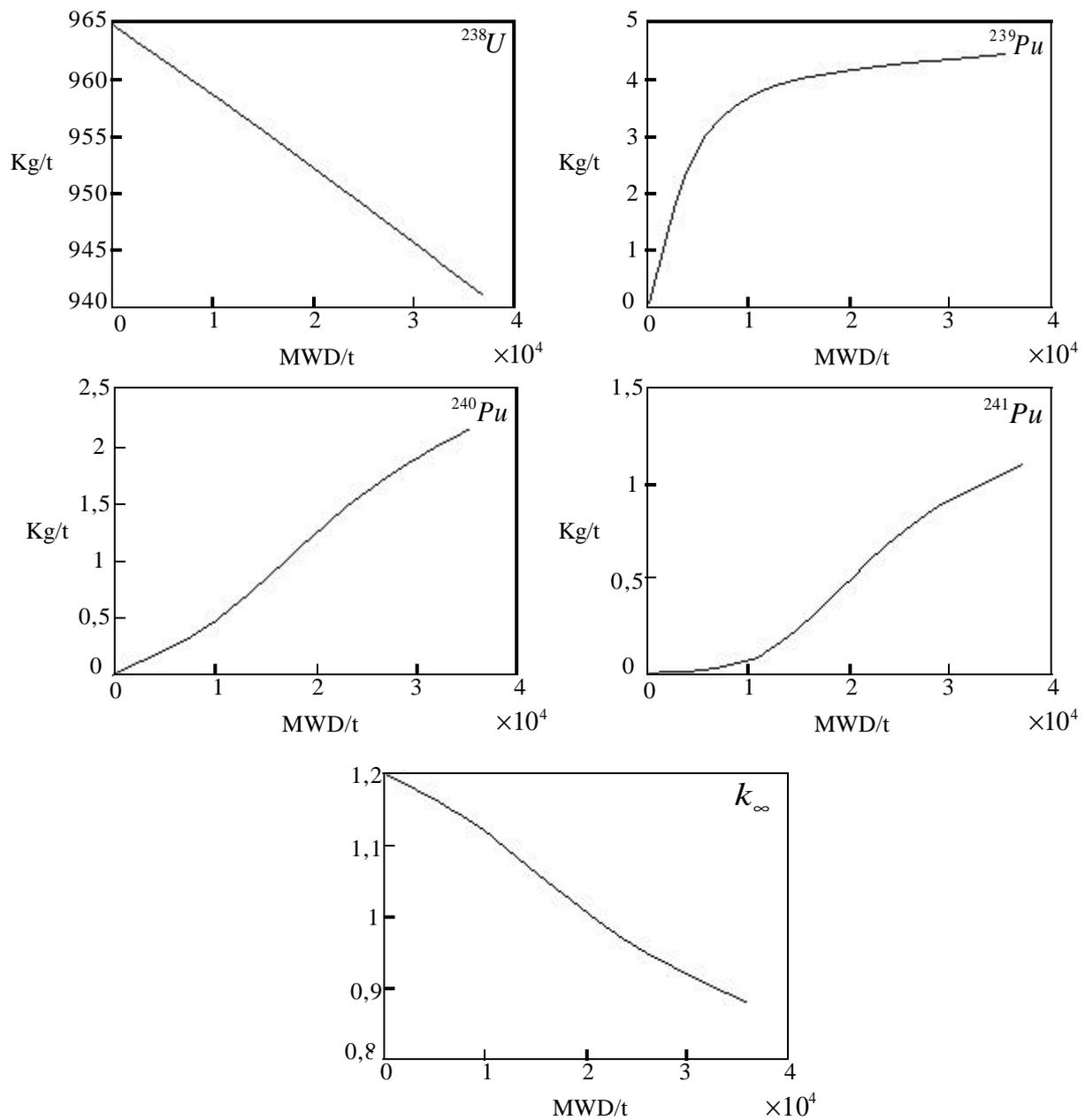
Burnup [MWD/Ton]	k_{∞}	C.C.I.	B.R.	P/P_{iniz}
0	1,2000	0,4161	0,4161	1
$0,36656 \cdot 10^4$	1,1847	0,3676	0,4122	0,9946
$0,72711 \cdot 10^4$	1,1582	0,3305	0,4248	0,9694
$0,10764 \cdot 10^5$	1,1269	0,3019	0,4467	0,9345
$0,14121 \cdot 10^5$	1,0941	0,2797	0,4739	0,8960
$0,17336 \cdot 10^5$	1,0619	0,2623	0,5042	0,8572
$0,20411 \cdot 10^5$	1,0311	0,2485	0,5360	0,8200
$0,23353 \cdot 10^5$	1,0022	0,2375	0,5681	0,7853
$0,26174 \cdot 10^5$	0,9755	0,2285	0,5998	0,7534
$0,28883 \cdot 10^5$	0,9510	0,2212	0,6305	0,7244
$0,31490 \cdot 10^5$	0,9284	0,2151	0,6600	0,6981
$0,34007 \cdot 10^5$	0,9078	0,2099	0,6881	0,6744
$0,36440 \cdot 10^5$	0,8889	0,2055	0,7145	0,6531

Il B.R. (Breeding Ratio) è un fattore differenziale e rappresenta il rapporto tra i fissili che si formano e i fissili che vengono bruciati, ovvero:

$$B.R. = \frac{s_g^{238} N_{238} + s_g^{240} N_{240}}{s_a^{235} N_{235} + s_a^{239} N_{239} + s_a^{241} N_{241}}$$

Nell'ultima colonna vediamo invece il rapporto tra la potenza istantanea e la potenza iniziale: siccome abbiamo scelto che il flusso sia costante vediamo che questo rapporto scende (ovvero scende la potenza); se avessimo scelto potenza costante quest'ultima colonna sarebbe stata il rapporto tra il flusso istantaneo e il flusso iniziale e avremmo visto tale rapporto aumentare. Quanto abbiamo visto a proposito dell'andamento delle concentrazioni dei nuclidi in analisi e del k_{∞} può essere riassunto nei sette grafici seguenti.





Questi ultimi sette grafici sono stati realizzati tenendo conto di un flusso costante di $3 \cdot 10^{13}$ per 1200 giorni. Tutti i dati ricavati nelle pagine precedenti possono essere riorganizzati in modo da poter comprendere quali siano gli effettivi consumi e le effettive produzioni riferiti ad una singola tonnellata di combustibile. Pensando allora ad un burnup di 36440 MWD/t possiamo costruire la seguente tabella:

	Iniziali	Prodotti	Bruciati	Fissione	Cattura	Presenti
^{235}U	35	0	27,237	23,008	4,229	7,763
^{238}U	965	0	23,716	1,779	21,937	941,284
^{239}Pu	0	22,029	17,395	12,268	5,127	4,634
^{240}Pu	0	5,148	2,870	0,010	2,860	2,278
^{241}Pu	0	2,872	1,805	1,541	0,264	1,067

Innanzitutto osserviamo che il numero dei fissionati (Fi) si ottiene dal numero dei bruciati (Br) tramite la seguente relazione:

$$Fi = Br \frac{S_f}{S_a}$$

mentre il numero di quelli che fanno cattura (Ca) si ottengono dalla seguente relazione:

$$Ca = Br \frac{S_g}{S_a}$$

Dalla tabella si deduce inoltre che vengono complessivamente prodotti 22,029 kg di ^{239}Pu anche se i kg di ^{238}U che fanno cattura sono solo 21,937; tale differenza numerica è dovuta al fatto che stiamo ragionando in termini di kg e non di atomi e il ^{239}Pu pesa di più dell' ^{238}U . Sfruttando questa tabella si deduce anche che i kg complessivamente scomparsi per fissione sono 38,6 e quindi questo è anche il peso dei prodotti radioattivi di scarto. Per ricavare la resa energetica netta dividiamo il burnup per la massa di fissile netto consumato, si ottiene così:

$$36440 / (27,237 - 4,634 - 1,067) = 1692 \text{ MWD} / \text{kg}$$

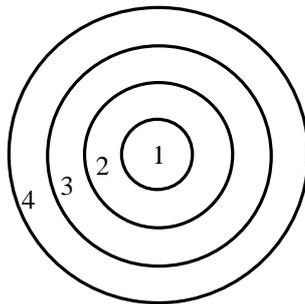
La resa energetica netta mi dà i MWD per ogni kg di fissile netto consumato. Possiamo osservare che l' ^{235}U da solo avrebbe avuto una resa di soli 800 MWD/kg. I dati che abbiamo fin qui visto sono quelli relativi ad un reattore ad acqua ed Uranio arricchito al 3,5%. Attualmente, nei reattori ad acqua, si tende ad arrivare a burnup di 40000- 50000 MWD/t, partendo da combustibile arricchito al 4 - 4.5 %.

Vediamo ora una tabella analoga a quella precedente che faccia però riferimento ad un reattore a grafite ed Uranio naturale. In questo tipo di reattori il combustibile raggiunge burnup molto inferiori, dell'ordine di 3400 MWD/t.

	Iniziali	Prodotti	Bruciati	Fissione	Cattura	Presenti
^{235}U	7,2	0	3,1	2,6	0,5	4,1
^{238}U	992,8	0	3,1	0,183	2,937	989,7
^{239}Pu	0	2,95	1,16	0,786	0,374	1,79
^{240}Pu	0	0,3725	0,0875	0	0,0875	0,285
^{241}Pu	0	0,088	0,026	0,019	0,007	0,062

La somma dei kg scomparsi complessivamente per fissione è dunque 3,59. La resa energetica netta è invece di 2724 MWD/kg. Vediamo dunque che il burnup relativo ai reattori a grafite è molto inferiore rispetto a quello dei reattori ad acqua; di contro, la resa dei reattori a grafite è migliore rispetto a quella dei reattori ad acqua (questo è dovuto al fatto che nei reattori a grafite, essendoci poco ^{235}U , viene sfruttato meglio l' ^{238}U). Bisogna però sottolineare che, dal punto di vista economico, i reattori ad acqua sono i più convenienti.

Come abbiamo visto in precedenza non è possibile caricare tutto il combustibile all'inizio e lasciarlo lavorare per 3 o 4 anni; è invece necessario approntare una strategia di caricamento del combustibile. Ad esempio, il reattore può essere suddiviso, come si vede nell'immagine seguente, in zone concentriche.



Nella zona 1 verrà caricato il combustibile fresco, nella zona 2 viene posto combustibile che ha già lavorato nel reattore per 200 giorni, nella zona 3 viene allocato combustibile vecchio di 400 giorni mentre nella zona 4 trova posto combustibile vecchio di 600 giorni. Siccome ogni zona è caratterizzata da combustibile sfruttato in maniera differente, il k complessivo sarà dato dalla media dei k relativi alle diverse zone: avendo suddiviso il reattore in 4 zone separate temporalmente da 200 giorni, si avrà:

$$\bar{k} = 1,12085$$

Una volta caricato il combustibile in questo modo si fa funzionare il reattore per 200 giorni dopodiché si elimina il combustibile della zona 4 e si ricomincia. Una storia di questo tipo è riassunta nella seguente tabella.

Zona	T(g)	K	→ 200 giorni di lavoro nel reattore	Zona	T(g)	K
1	0	1,2		1	200	1,1582
2	200	1,1582		2	400	1,0941
3	400	1,0941		3	600	1,0311
4	600	1,0311		4	800	0,9755

Dopo i 200 giorni di lavoro si avrà:

$$\bar{k} = 1,06743$$

In questo modo il combustibile lavora, complessivamente, 800 giorni nel reattore (facendo 4 turni da 200 giorni l'uno); il burnup complessivo sarà allora di 26174 MWD/t. Per migliorare il burnup posso aumentare il numero delle zone. Utilizzando 5 zone si avrà la situazione schematizzata nella seguente tabella:

Zona	T(g)	K	→ 200 giorni di lavoro nel reattore	Zona	T(g)	K
1	0	1,2		1	200	1,1582
2	200	1,1582		2	400	1,0941
3	400	1,0941		3	600	1,0311
4	600	1,0311		4	800	0,9755
5	800	0,9755		5	1000	0,9284

In questo caso i valori medi del k saranno i seguenti:

$$\begin{cases} \bar{k}_{Iniz} = 1,09178 \\ \bar{k}_{Fin} = 1,03746 \end{cases}$$

In realtà le strategie di caricamento e disposizione del combustibile sono anche molto più complicate perché, per ottimizzare la situazione si usano arricchimenti diversi a seconda delle zone, si mischiano le zone stesse etc... Fino ad ora abbiamo sempre fatto riferimento a reattori in condizioni di stabilità, ovvero di reattori caratterizzati dalla condizione:

$$k_{Eff} = 1$$

In questi casi si aveva un k_{∞} più grande dell'unità ma il Δk era sempre assorbito dalle barre di controllo (nel caso dei reattori a grafite) o dal Boro disciolto nell'acqua (nel caso dei PWR). Da ora in poi vogliamo analizzare situazioni dinamiche nelle quali per esempio il reattore sta funzionando a $2800 MW_{th}$ e si voglia passare a $3000 MW_{th}$. Da un punto di vista pratico questo significherà estrarre parte delle barre oppure diminuire la concentrazione di Boro nell'acqua per inserire reattività. Per capire come in effetti risponde il reattore a simili manipolazioni sarà ora necessario richiamare in causa i neutroni ritardati e ricordare che il ritardo medio di questi neutroni si aggira sui 12 secondi.

Cinetica del reattore. Reattore in equilibrio critico (R.E.C.). La cinetica puntiforme.

Nella lezione precedente avevamo accennato alle variazioni volontarie di potenza; prima di analizzarle in dettaglio dobbiamo fare delle semplificazioni preliminari. Innanzitutto ricordiamo che, in generale, il flusso dipende da r, Ω, E e t ; in questo caso, siccome ci vogliamo occupare della cinetica del reattore, la variabile importante è il tempo t . Porremo dunque che sia $\phi(t)$. Per poter fare questo dobbiamo imporre due semplificazioni:

- Come prima cosa dobbiamo considerare un unico gruppo energetico, ovvero porre che sia:

$$f(t) = \int_0^{15MeV} f(t, E) dE$$

- Supponiamo poi che il reattore sia grosso e ben riflesso così che le fughe siano trascurabili.
 - Ignoriamo la dipendenza spaziale del flusso, ossia consideriamo valori mediati nello spazio.
- Fatte queste semplificazioni, richiamiamo l'equazione di diffusione:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial t} - D \nabla^2 f + \Sigma_a f - S = 0$$

Sfruttando, però, la seconda delle semplificazioni fatte, tale relazione si riduce nel modo seguente:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial t} + \Sigma_a f - S = 0$$

ovvero:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial t} = S - \Sigma_a f$$

Esprimendo poi il flusso tramite la sua definizione

$$f = nv$$

si ottiene, combinando le ultime due relazioni viste:

$$\dot{n} = S - \Sigma_a nv \quad (1)$$

Come abbiamo già accennato nella lezione precedente, occupandoci della cinetica del reattore dobbiamo chiamare in causa i neutroni ritardati che derivano dal decadimento dei precursori ed hanno un ritardo medio di circa 12 secondi. Ricordiamo allora che in seguito ad una fissione, si avevano $v(1-\beta)$ neutroni pronti con un'energia media di 2 MeV e $v\beta$ neutroni ritardati con un'energia media di 750 keV. Il termine β , inoltre, varia da elemento ad elemento: per ^{233}U , ^{235}U e ^{239}Pu i valori numerici sono i seguenti:

$$\begin{cases} b_{233} = 2,6^0 /_{00} \\ b_{235} = 6,5^0 /_{00} \\ b_{239} = 2,1^0 /_{00} \end{cases}$$

I precursori (ognuno dei quali genera un unico neutrone ritardato) sono tantissimi (sicuramente più di un centinaio) ed ognuno di essi è caratterizzato da una costante di decadimento λ e da un parametro β . Oltre alla relazione (1) si devono allora considerare delle equazioni di bilancio che tengano conto dei precursori. Se chiamiamo allora c la concentrazione di un precursore, possiamo scrivere la seguente relazione:

$$\dot{c} = -\lambda c + \Sigma_f f \beta b \quad (2)$$

Avendo dunque 100 precursori ci troviamo con 101 equazioni differenziali (100 come la (2) alle quali va aggiunta la (1)). La relazione (1) può inoltre essere corretta nel modo seguente per quanto riguarda il termine relativo alla sorgente:

$$\dot{n} = \Sigma_f f \beta n (1 - b) - \Sigma_a f + \sum_{i=1}^{100} \lambda_i c_i$$

ovvero:

$$\dot{n} = \Sigma_f nv \beta n (1 - b) - \Sigma_a nv + \sum_{i=1}^{100} \lambda_i c_i$$

La fisica che sta sotto al problema è tutta qui; ora dobbiamo vedere come gestire la situazione. Consideriamo dunque la seguente relazione:

$$k = \frac{n \Sigma_f}{\Sigma_a}$$

nella quale il flusso non appare perché abbiamo in precedenza fatto una specie di omogeneizzazione del reattore. La sezione d'urto macroscopica di assorbimento che appare in quest'ultima relazione è composta dagli assorbimenti che abbiamo fino ad ora trattato e dall'assorbimento variabile dovuto ai sistemi di controllo. Combinando allora le ultime due relazioni scritte si ottiene:

$$\dot{n} = k(1 - \mathbf{b})\frac{n}{l} - \frac{n}{l} + \sum_{i=1}^{100} \mathbf{I}_i c_i \quad (3)$$

dove l sia la vita media dei neutroni nel mezzo infinito, così definita:

$$l = \frac{1}{\Sigma_a v}$$

Nel caso della relazione (2), invece, si ottiene:

$$\dot{c} = \frac{k\mathbf{b}}{l}n - \mathbf{I}c \quad (4)$$

Definiamo ora il tempo medio di generazione (che non dipende dalle operazioni sulle barre ed è quindi, da questo punto di vista, un invariante):

$$\Lambda = \frac{1}{\mathbf{n}\Sigma_f v} = \frac{l}{k}$$

Se dunque k è pari all'unità la popolazione è stabile e si ha:

$$\Lambda = l$$

se invece k è maggiore dell'unità, allora la popolazione è in crescita e quindi si ha:

$$l > \Lambda$$

Osserviamo ora la validità della seguente catena di uguaglianze:

$$\frac{k(1 - \mathbf{b})}{l}n - \frac{n}{l} = \frac{k(1 - \mathbf{b}) - 1}{\Lambda k}n = \frac{k - 1 - k\mathbf{b}}{\Lambda k}n$$

ricordiamo ora la definizione di reattività, secondo la quale:

$$\mathbf{r} = \frac{k - 1}{k}$$

Combinando allora le ultime due relazioni scritte si ricava:

$$\frac{k(1 - \mathbf{b})}{l}n - \frac{n}{l} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{b}}{\Lambda}n$$

La relazione (3) può allora essere così riscritta:

$$\dot{n} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{b}}{\Lambda}n + \sum_{i=1}^{100} \mathbf{I}_i c_i$$

Sfruttando invece la seguente uguaglianza

$$\frac{k\mathbf{b}}{l}n = \frac{k\mathbf{b}}{\Lambda k} = \frac{\mathbf{b}}{\Lambda}$$

si può riscrivere la relazione (4) nel modo seguente:

$$\dot{c} = \frac{\mathbf{b}}{\Lambda}n - \mathbf{I}c$$

Per gestire dunque la cinetica del reattore dovremo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{n} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{b}}{\Lambda}n + \sum_{i=1}^{100} \mathbf{I}_i c_i \\ \dot{c}_i = \frac{\mathbf{b}_i}{\Lambda}n - \mathbf{I}_i c_i \end{cases}$$

In tale sistema vediamo dunque apparire dei parametri nucleari (β e λ), delle informazioni sul reattore (Λ) e il parametro relativo alla reattività agente sul sistema (ρ). Ci ritroviamo allora con un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine e quindi ancora si potrebbe utilizzare un approccio di tipo numerico basato sulla matrice esponenziale. Un approccio numerico non permette però di capire la fisica del problema e quindi vediamo un approccio analitico. Innanzitutto osserviamo che un sistema di equazioni come l'ultimo scritto deve essere completato con un set di condizioni al contorno che così vengono espresse:

$$\begin{cases} n_0 \\ c_0^i \end{cases}$$

Nella situazione di reattore critico in equilibrio (R.E.C.) ovvero nella situazione nella quale il reattore è critico da lungo tempo, si avrà:

$$\dot{n} = 0; \quad \dot{c}_i = 0$$

e quindi, dalla seconda equazione del sistema, si ricava:

$$\frac{b_i}{\Lambda} n_0 = I_i c_0^i$$

dalla quale si ricava:

$$\frac{c_0^i}{n_0} = \frac{b_i}{\Lambda I_i}$$

Definendo la concentrazione iniziale nel modo seguente:

$$c_0^{Tot} = \sum_{i=1}^{100} c_0^i$$

Possiamo combinare le ultime due relazioni scritte e ricavare:

$$\frac{c_0^{Tot}}{n_0} = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^{100} \frac{b_i}{I_i}$$

Osserviamo anche che

$$\sum_{i=1}^{100} \frac{b_i}{I_i} = \sum_{i=1}^{100} b_i t_i$$

Si era anche già visto che

$$\bar{t} = \sum_{i=1}^{100} \frac{b_i t_i}{b} \approx 12 \text{ sec}$$

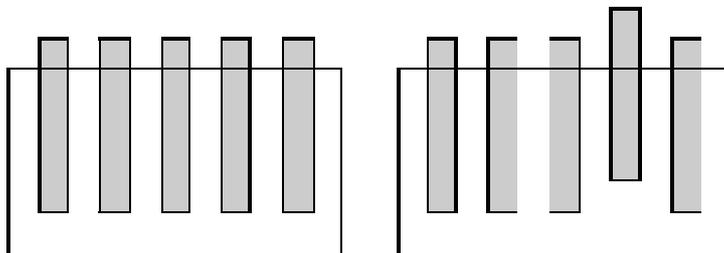
Combinando allora le ultime tre relazioni scritte si ricava:

$$\frac{c_0^{Tot}}{n_0} = \frac{1}{\Lambda} b \bar{t}$$

Nel caso dei reattori ad acqua, nei quali si ha Λ circa pari a $20 \mu\text{s}$, si avrà:

$$\left(\frac{c_0^{Tot}}{n_0} \right) = 3900$$

Dobbiamo fare un'ultima osservazione relativa all'ipotesi grazie alla quale si è trascurata la dipendenza spaziale: nelle condizioni iniziali, un reattore presenta tutte le barre inserite quasi completamente (come mostrato nella prima immagine seguente) se volgiamo modificare la potenza, per esempio innalzarla, dovremo sollevare una barra di un certo tratto (come mostrato nella seconda immagine seguente). La dipendenza spaziale sembrerebbe dunque presente!



In realtà l'approssimazione alla quale si fa riferimento prende il nome di approssimazione della cinetica puntiforme nella quale non si fa riferimento a questo discorso delle barre; ci sarebbe poi da specificare il fatto che le barre non vengono manovrate una per volta ma in gruppi e quindi l'approssimazione non è così drastica (diventa poi ancora meno drastica se si utilizza l'acqua borata anziché le barre).

Come abbiamo accennato in precedenza, anche la cinetica può essere affrontata con un approccio numerico che fa riferimento ancora alla matrice esponenziale; in questo caso la matrice alla quale si fa riferimento è la seguente:

$$\begin{array}{cccccc}
 n & c_1 & c_2 & \dots & c_n & \\
 \mathbf{r} - \mathbf{b} & \mathbf{I}_1 & \mathbf{I}_2 & \dots & \mathbf{I}_n & n \\
 \frac{\Lambda}{\Lambda} \mathbf{b}_1 & -\mathbf{I}_1 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\
 \frac{\Lambda}{\Lambda} \mathbf{b}_2 & 0 & -\mathbf{I}_2 & \dots & 0 & c_2 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \frac{\Lambda}{\Lambda} \mathbf{b}_n & 0 & 0 & \dots & -\mathbf{I}_n & c_n
 \end{array}$$

L'equazione matriciale che si utilizza è la seguente:

$$\underline{\underline{\dot{n}}} = Mn$$

Cinetica senza controeazione. Criticità pronta. Cinetica con controeazione. Reattori PWR.

Studiando la cinetica del reattore bisogna considerare due casi possibili:

- Il caso in cui si considera ρ indipendente dal reattore e quindi tutto e solo fornito dall'esterno;
- Il caso in cui ρ dipende anche dal reattore (ovvero il ρ introdotto viene modificato per effetti legati, per esempio, alla temperatura), in questo caso si parla di cinetica con controeazione.

Concentriamoci inizialmente sul primo di questi due casi; già in precedenza si era visto che una buona descrizione della cinetica del reattore era possibile sfruttando solo sei gruppi (collassamento a 6 gruppi, di cui vediamo i dati a pagina 100 del Lamarsh). Per quanto visto nelle lezioni precedenti, usare 6 gruppi significa gestire 7 equazioni differenziali. Per capire effettivamente la fisica che sta sotto alla trattazione ci poniamo in una situazione ancora più semplificata nella quale si utilizza un solo gruppo di precursori (collassamento ad 1 gruppo); questo approccio vede diminuire la precisione ma ci permette di capire la fisica che sta sotto al problema. Riconsideriamo dunque le due equazioni trovate nella scorsa lezione:

$$\begin{cases} \dot{n} = \frac{r-b}{\Lambda} n + I c & (1) \\ \dot{c} = \frac{b}{\Lambda} n - I c & (2) \end{cases}$$

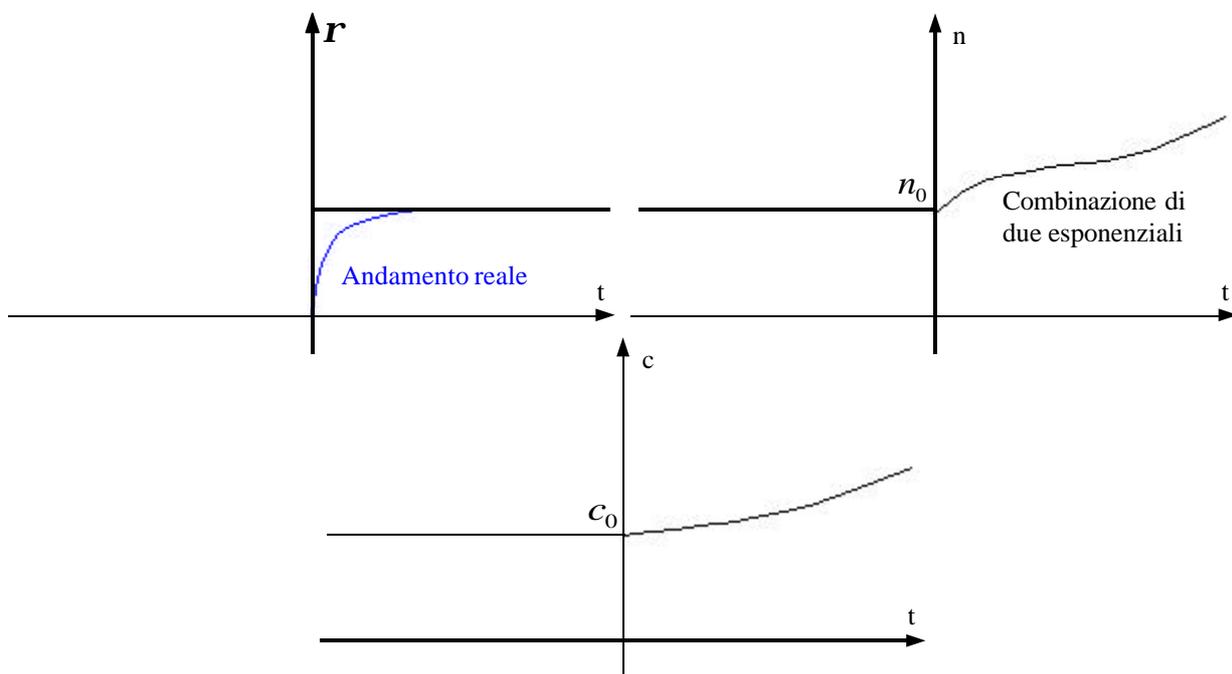
dove sia:

$$I = \frac{1}{\bar{\epsilon}}$$

Ricordiamoci che, nel caso di situazione R.E.C. si aveva:

$$\frac{c_0}{n_0} = \frac{b}{I\Lambda}$$

Vediamo ora come evolvono n e c quando c'è una variazione di ρ . Consideriamo dunque i tre grafici seguenti.



Per vedere come evolvono n e c riscriviamo nel modo seguente la prima equazione del sistema:

$$\dot{n}_0 = \frac{r}{\Lambda} n_0 - \frac{b}{\Lambda} n_0 + I c_0$$

Nella situazione R.E.C. gli ultimi due addendi del secondo membro si compensano e quindi rimane:

$$\frac{\dot{n}_0}{n_0} = \frac{r}{\Lambda}$$

ovvero \dot{n}_0 risulta essere lineare con n_0 . Definiamo ora come segue il periodo istantaneo al tempo zero:

$$T_0^{Ist} = \frac{\Lambda}{\mathbf{r}}$$

Qualora si avesse:

$$\begin{cases} \Lambda = 50 \text{ms} \\ \mathbf{r} = 100 \text{pcm} \end{cases}$$

si otterrebbe:

$$T_0^{Ist} = \frac{\Lambda}{\mathbf{r}} = 5 \cdot 10^{-2}$$

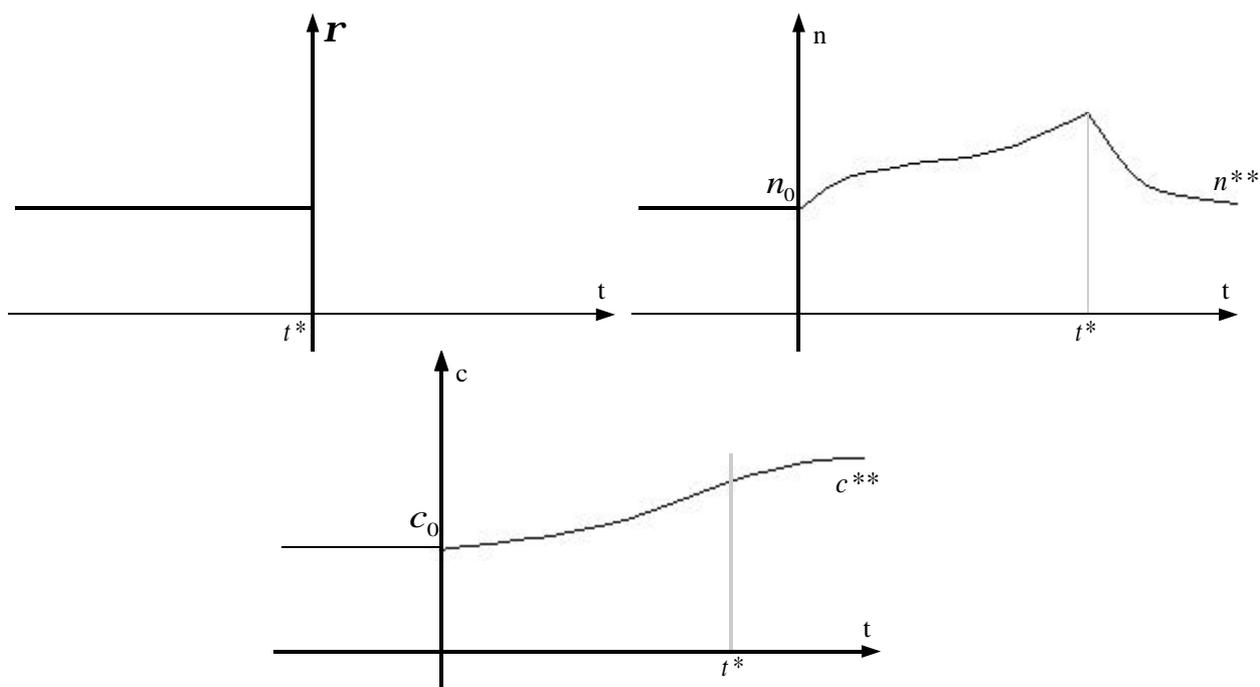
Ciò vorrebbe dire che la potenza salirebbe troppo velocemente. Concentrandosi invece sulla seconda equazione del sistema si ottiene:

$$\dot{c}_0 = \frac{\mathbf{b}}{\Lambda} n_0 - \mathbf{l} c_0$$

Sempre supponendo di essere nella situazione R.E.C. si ottiene:

$$\dot{c}_0 \equiv 0$$

Con il tempo, dunque, si ha l'effetto di freno dei neutroni ritardati. Supponiamo ora di far tornare a zero la reattività e facciamo riferimento ai tre grafici seguenti.



Con riferimento alla n avremo dunque:

$$\dot{n}(t^*) = -\frac{\mathbf{b}}{\Lambda} n^* + \mathbf{l} c^*$$

mentre per la c avremo:

$$\dot{c}(t^*) = \frac{\mathbf{b}}{\Lambda} n^* - \mathbf{l} c^*$$

Inoltre sarà:

$$\frac{c^*}{n^*} < \frac{c_0}{n_0}$$

dalle quali si ricava che:

$$\begin{cases} \dot{n}(t^*) < 0 \\ \dot{c}(t^*) > 0 \end{cases}$$

Si torna poi ad avere:

$$\frac{c^{**}}{n^{**}} < \frac{c_0}{n_0}$$

Abbiamo accennato da un gradino di 100 pcm e ricordiamo che si aveva:

$$b_{235} = 650 \text{ pcm}$$

Si ha allora che è necessario usare gradini di reattività che stiano ben lontani dal valore di β , in caso contrario si avrà il fenomeno della criticità pronta nella quale si ha:

$$k(1 - b) = 1$$

e quindi si utilizzano solo i neutroni pronti mentre i neutroni ritardati non interessano più.

Torniamo ora al sistema composto dalle equazioni (1) e (2) e risolviamo le due equazioni che lo compongono; dalla prima equazione si ricava:

$$n = n_0 \left[A_1 e^{t/T_1} + A_2 e^{t/T_2} \right]$$

dopo un certo tempo si dovrà però avere:

$$n \approx n_0 A_1 e^{t/T_1}$$

Dalla seconda equazione si ricava invece:

$$c = c_0 \left[B_1 e^{t/T_1} + B_2 e^{t/T_2} \right]$$

Ovviamente si dovrà anche avere che:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ B_1 + B_2 = 1 \end{cases}$$

Usiamo allora la tecnica delle trasformate di Laplace (un termine soprastregnato con una tilde sarà allora un termine trasformato) e otteniamo:

$$\begin{cases} s\tilde{n} - n_0 = \frac{r - b}{\Lambda} \tilde{n} + I\tilde{c} \\ s\tilde{c} - c_0 = \frac{b}{\Lambda} \tilde{n} - I\tilde{c} \end{cases}$$

dal quale si ricava:

$$\begin{cases} \left(s + \frac{r - b}{\Lambda} \right) \tilde{n} - I\tilde{c} = n_0 \\ \frac{b}{\Lambda} \tilde{n} - (s + I)\tilde{c} = -c_0 \end{cases}$$

Calcoliamo allora:

$$\Delta = \begin{vmatrix} s + \frac{r - b}{\Lambda} & -I \\ \frac{b}{\Lambda} & -(s + I) \end{vmatrix}$$

che, uguagliata a zero, origina la seguente equazione di secondo grado:

$$s^2 + \left(\frac{b - r}{\Lambda} + I \right) s - \frac{rI}{\Lambda} = 0 \quad (3)$$

dalla quale si ricavano:

$$\begin{cases} s_1 = \frac{1}{T_1} \\ s_2 = \frac{1}{T_2} \end{cases}$$

Si valutano inoltre:

$$\begin{cases} \Delta_n = \begin{vmatrix} n_0 & -\mathbf{l} \\ -c_0 & -(s+\mathbf{l}) \end{vmatrix} \\ \Delta_c = \begin{vmatrix} s + \frac{\mathbf{b}-\mathbf{r}}{\Lambda} & n_0 \\ \frac{\mathbf{b}}{\Lambda} & -c_0 \end{vmatrix} \end{cases}$$

Possiamo a questo punto ricavare:

$$\begin{cases} \tilde{n} = \frac{\Delta_n}{\Delta} = \frac{n_0(s+\mathbf{l}) + \mathbf{l}c_0}{s^2 + \left(\frac{\mathbf{b}-\mathbf{r}}{\Lambda} + \mathbf{l}\right)s - \frac{\mathbf{r}\mathbf{l}}{\Lambda}} = \frac{n_0(s+\mathbf{l}) + \mathbf{l}c_0}{(s-s_1)(s-s_2)} \\ \tilde{c} = \frac{\Delta_c}{\Delta} = \frac{c_0\left(s + \frac{\mathbf{b}-\mathbf{r}}{\Lambda}\right) + n_0\frac{\mathbf{b}}{\Lambda}}{s^2 + \left(\frac{\mathbf{b}-\mathbf{r}}{\Lambda} + \mathbf{l}\right)s - \frac{\mathbf{r}\mathbf{l}}{\Lambda}} = \frac{c_0\left(s + \frac{\mathbf{b}-\mathbf{r}}{\Lambda}\right) + n_0\frac{\mathbf{b}}{\Lambda}}{(s-s_1)(s-s_2)} \end{cases}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$\begin{cases} n = \frac{[n_0(s_1 + \mathbf{l}) + \mathbf{l}c_0]e^{s_1 t} - [n_0(s_2 + \mathbf{l}) + \mathbf{l}c_0]e^{s_2 t}}{(s_1 - s_2)} \\ c = \frac{\left[c_0\left(s_1 + \frac{\mathbf{b}-\mathbf{r}}{\Lambda}\right) + n_0\frac{\mathbf{b}}{\Lambda}\right]e^{s_1 t} - \left[c_0\left(s_2 + \frac{\mathbf{b}-\mathbf{r}}{\Lambda}\right) + n_0\frac{\mathbf{b}}{\Lambda}\right]e^{s_2 t}}{(s_1 - s_2)} \end{cases}$$

Teniamo ora conto del fatto di essere in situazione di R.E.C., ovvero teniamo conto della relazione:

$$\mathbf{l}c_0 = \frac{\mathbf{b}}{\Lambda}n_0$$

Combinando questa relazione con il sistema precedente si ottiene:

$$\begin{cases} n = n_0 \frac{\left(s_1 + \mathbf{l} + \frac{\mathbf{b}}{\Lambda}\right)e^{s_1 t} - \left(s_2 + \mathbf{l} + \frac{\mathbf{b}}{\Lambda}\right)e^{s_2 t}}{s_1 - s_2} \\ c = c_0 \frac{\left(s_1 + \frac{\mathbf{b}-\mathbf{r}}{\Lambda} + \mathbf{l}\right)e^{s_1 t} - \left(s_2 + \frac{\mathbf{b}-\mathbf{r}}{\Lambda} + \mathbf{l}\right)e^{s_2 t}}{s_1 - s_2} \end{cases}$$

Abbiamo dunque delle formule esatte dalle quali si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{s_1 + l + \frac{b}{\Lambda}}{s_1 - s_2} \\ A_2 = \frac{s_2 + l + \frac{b}{\Lambda}}{s_1 - s_2} \\ B_1 = \frac{s_1 + \frac{b-r}{\Lambda} + l}{s_1 - s_2} \\ B_2 = \frac{s_2 + \frac{b-r}{\Lambda} + l}{s_1 - s_2} \end{array} \right.$$

Concentriamoci ora sulla relazione (3). Per la regola dei segni si avrà che, se ρ è negativo, s_1 ed s_2 devono per forza essere negativi; se invece ρ è positiva, s_1 ed s_2 saranno discordi e quindi uno dei due esponenziali è negativo si smorzerà rapidamente. Mettiamoci ora nel caso in cui sia:

$$\left\{ \begin{array}{l} r > 0 \\ r < b \end{array} \right.$$

oppure sia ρ negativo; oltre alle soluzioni esatte si possono considerare delle espressioni più semplici di s_1 ed s_2 , ponendo che sia:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda \ll \frac{b}{s+l} \\ l \ll s \end{array} \right.$$

In questo modo si ottengono delle soluzioni approssimate, che saranno:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1^* = l \frac{r}{b-r} \\ s_2^* = \frac{r-b}{\Lambda} \end{array} \right.$$

ovvero:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1^* = \frac{1}{l} \frac{b-r}{r} = t \frac{b-r}{r} \\ T_2^* = \frac{\Lambda}{r-b} \end{array} \right.$$

Il secondo è l'esponente negativo che se ne andrà rapidamente. Per stimare la bontà di questa approssimazione possiamo fare riferimento alla seguente tabella con risultati numerici:

Situazione	ρ	s_1	s_2	s_1^*	s_2^*
$0 < r < b$	100 pcm	$1,514 \cdot 10^{-2}$	- 110	$1,515 \cdot 10^{-2}$	- 110
$r < 0$	-2000 pcm	$-6,29 \cdot 10^{-2}$	- 530	$-6,3 \cdot 10^{-2}$	- 530

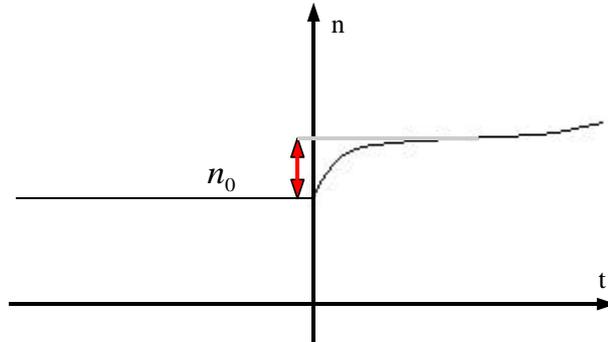
A questo punto il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} n(t) = n_0 [A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}] \\ c(t) = c_0 [B_1 e^{s_1 t} + B_2 e^{s_2 t}] \end{array} \right.$$

può essere riscritto nel modo seguente:

$$\begin{cases} n(t) \approx n_0 \left[\frac{b}{b-r} e^{s_1 t} - \frac{r}{b-r} e^{s_2 t} \right] \\ c(t) \approx c_0 \left[\left(1 + \frac{I\Lambda}{b-r} \right) e^{s_1 t} - \frac{I\Lambda}{b-r} e^{s_2 t} \right] \end{cases}$$

Queste formule approssimate consentono la distinzione tra il transitorio (rapido) ed la situazione assestata, caratterizzata da un solo esponenziale. Consideriamo ora un salto positivo di reattività e vediamo come si comportano n e c.



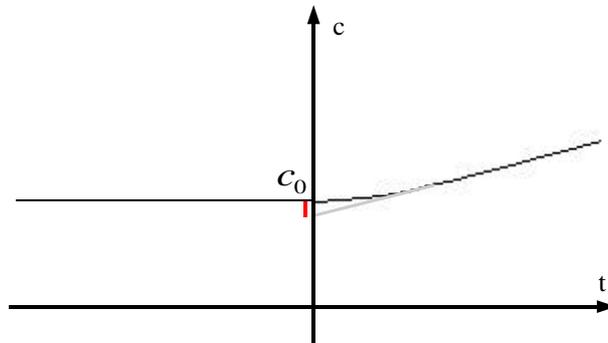
In questo grafico è evidenziato in rosso quello che prende il nome di salto pronto; tale salto avviene tra i seguenti due valori:

$$n_0 \rightarrow \frac{b}{b-r} n_0$$

Una volta esaurito il salto pronto si può invece utilizzare la seguente relazione:

$$n(t) \approx n_0 \frac{b}{b-r} e^{t/T_1}$$

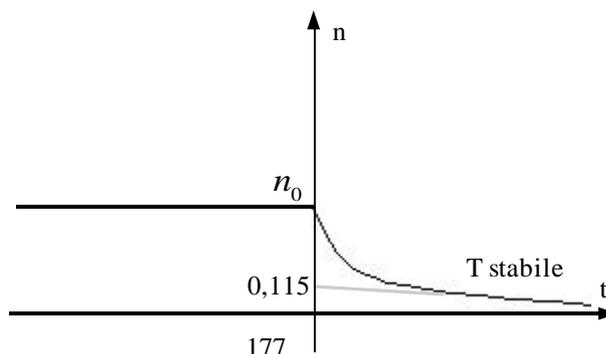
Nel caso della c si avrà invece:



In questo caso il salto pronto è molto piccolo e, comunque, dopo di esso vale la relazione:

$$c(t) \approx c_0 e^{t/T_1}$$

Da un punto di vista numerico possiamo comunque osservare che un salto positivo di reattività del 18% porterebbe ad un salto pronto di soli 7 pcm. Per quanto riguarda, invece, lo spegnimento del reattore, supponiamo di introdurre una forte reattività negativa (tipicamente -5000pcm) ed osserviamo quello che succede all'andamento della popolazione n.

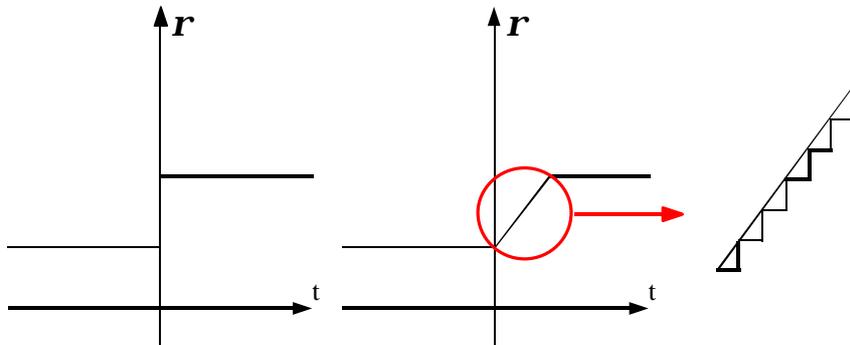


Dal grafico precedente vediamo che lo spegnimento non è istantaneo (ci sarà infatti un salto pronto negativo di 0,115 ma poi l'andamento si stabilizza); per questo motivo è necessario raffreddare il reattore per un certo periodo anche dopo che questo è stato spento. Si osservi che, per quanto grande sia la ρ negativa che è stata introdotta, a causa dei neutroni ritardati non si potrà mai avere un periodo stabile (negativo) più piccolo di 12 secondi. Il discorso che abbiamo fatto con un solo gruppo è risultato molto semplificato e quindi ben maneggevole; utilizzando sei gruppi si sarebbe infatti incontrata un'equazione di settimo grado con una soluzione positiva e le altre sei negative in modo che comunque, dopo un certo periodo, uno degli esponenziali avrebbe dominato sugli altri.

Occupiamoci ora della cinetica con controreazione nella quale la reattività inserita dall'esterno viene modificata principalmente per effetto della temperatura. In questa situazione vale ancora il sistema formato dalle equazioni (1) e (2), dove però sia:

$$r = r_{Op} + r(T)$$

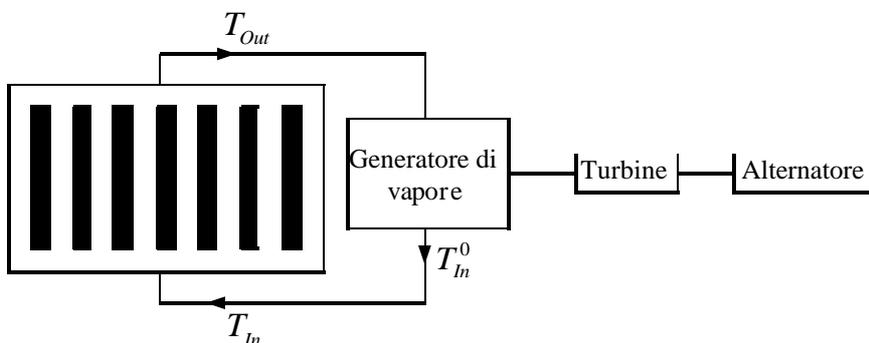
dove il pedice Op indica la reattività introdotta dall'operatore (per esempio tramite la rimozione delle barre). Quando l'operatore inietta la reattività dall'esterno (idealmente avremo un aumento come quello dato dalla prima immagine seguente, realmente l'aumento sarà come quello mostrato nella seconda immagine seguente) varia la potenza e quindi cambia la temperatura del fuel. L'aumento di temperatura del fuel implica l'effetto Doppler e quindi si ha una diminuzione della reattività. Il riscaldamento del moderatore, invece, porta ad effetti che dipendono dal tipo di moderatore utilizzato (saranno poco marcati nei reattori a grafite e molto consistenti nei reattori ad acqua) perché la densità del moderatore varia e, con essa, la sua capacità di frenare i neutroni.



Consideriamo ora un reattore ad acqua ed uranio arricchito al 3,5% di tipo PWR (Pressurized Water Reactor) che è caratterizzato dal fatto che il fluido termovettore (nonché moderatore) è acqua con le seguenti caratteristiche:

$$\begin{cases} p = 160 \frac{kg}{cm^2} \\ T = 300^\circ C \end{cases}$$

Lo schema generico di un reattore PWR (nel quale l'acqua si mantiene sempre liquida) è il seguente:



Solitamente si ha:

$$T_{Out} - T_{In} = 40^\circ C$$

Supponiamo ora di fissare la potenza elettrica e quindi, di conseguenza, anche la potenza termica del reattore (che ha un rendimento del 35% circa); qualora l'utenza richiedesse una potenza maggiore sarebbe necessario produrre più vapore e quindi si sfrutterebbe di più l'acqua in uscita dal reattore. Come conseguenza, inizialmente si avrebbe uno squilibrio delle temperature perché si avrebbe:

$$T_{In}^0 < T_{In}$$

Questo squilibrio porta ad una diminuzione complessiva della temperatura del moderatore che ne fa aumentare la densità; ciò porterà ad un aumento della capacità di rallentamento e quindi ad un aumento della reattività. Come conseguenza le barrette di combustibile si scaldano maggiormente perché lavorano di più e quindi, per effetto Doppler, la reattività diminuisce e torna ad essere quella di prima. Questa serie di avvenimenti si riassume dicendo che i reattori PWR seguono autonomamente il carico. Il fatto che un reattore segua il carico significa che è capace di passare in modo sostanzialmente automatico dalla potenza P alla potenza $P+\Delta P$, raggiungendo un nuovo stato di equilibrio critico. Un discorso analogo può essere fatto per le diminuzioni di potenza. Il reattore PWR rimane in equilibrio anche quando viene inserita reattività dall'operatore senza che ci sia una richiesta di potenza dall'esterno. Se, infatti, l'operatore inserisce reattività, aumenteranno sia la temperatura dell'acqua in ingresso che la temperatura dell'acqua in uscita dal reattore; il fatto che l'acqua sia complessivamente più calda introdurrà una reattività negativa che andrà ad opporsi alla reattività positiva introdotta dall'operatore.

Nel seguito vedremo che i reattori BWR (Boiling Water Reactor) non sono invece capaci di seguire il carico.

Reattori PWR. Variazioni di carico.

Continuiamo il discorso sulla cinetica con controreazione di temperatura nei reattori PWR. Per avere un'idea un po' più dettagliata di cosa effettivamente succede utilizziamo dei dati numerici relativi ad un reattore reale.

Come si ricava da questi dati, gli elementi di combustibile sono disposti in un reticolo 17 x 17. Dei 269 posti presenti nel reticolo, 24 sono dedicati alle barre di controllo e alle barre di strumentazione. Il numero totale delle barrette di combustibile sarà allora $157(269-24)=41605$.

DATI GENERALI		Spessore guaina	0,572 mm
DATI GENERALI		Materiale della guaina	Zr 4
Potenza termica del reattore	2878 MWt	Altezza elementi di combustibile	366 cm
Potenza elettrica lorda nominale	980 MWe	Arricch. medio del I nocciolo	2,6% in ^{235}U
Potenza elettrica netta nominale	950 Mwe	Arricch. medio all'equilibrio	3,2% in ^{235}U
Pressione nominale di esercizio del circuito primario	158 kg/cm ² ass.	Peso totale di UO_2	82,2 t
Pressione del vapore dal GV	67,8 kg/cm ² ass.	Diametro equival. del nocciolo	3040 mm
Portata di vapore	5,579 t/h	b) Barre di controllo	
Tipo di reattore	PWR W 312	Numero	52
IL SISTEMA NUCLEARE		Tipo	A grappolo
Recipiente a pressione (Vessel)		N. delle barrette per elemento	20
		Materiale	B_4C e AgInCd
Altezza totale	13 m	c) Caratteristiche termoidrauliche del nocciolo	
Diametro interno	4 m	Superficie di trasmissione del calore	4215 m ²
Peso stimato a secco	316 t	Potenza lineare media	178,5 W/cm (5,44 kW/ft)
Generatori di vapore		Portata totale di refrigerante	49500 t/h (14 (t/s)
Numero e tipo	3 verticali con tubi ad U	Temperatura di ingresso del reattore	290,4°C
Altezza totale	20,6 m	Salto termico medio del nocciolo	36,9°C
Peso stimato a secco	314 t	TURBOALTERNATORE	
Superficie di trasmis. del calore	5109 m ²	Turbina	
Materiale dei tubi	Inconel	Potenza nominale a giunto di accoppimaneto all'alternatore	1021 MW
Temperatura acqua di alimento	226,7°C	Numero corpi	1 AP e 3 BP a doppio flusso
Titolo del vapore prodotto	99,75%	Tipo di regolazione	Elettroidraulico
Pompe primarie		Velocità	1500 g/1'
Numero e tipo	3 Centrifughe verticali a singolo stadio	Lunghezza totale	43,0 m
Portata di progetto	22,164 m ³ / h	Condensatore	
Prevalenza di progetto	85,3 mH ₂ O	Vuoto in condizioni nominali	0,0518 ata
Pressione di progetto	176 kg/cm ² ass.	Salto di temperatura acqua raff.to	8°C
Potenza e tensione del motore	5280 kW 6kV	Superficie di scambio termico	62106 m ²
Pressurizzatore		Numero tubi	75408
Volume totale	40 m ³	Diametro/spessore	1"x 18 BWG
Peso a secco	70,4 t	Materiale tubi	All Brass ASTMB111
N. e potenza globale riscaldatori	78 / 1400 kW	Portata totale acqua di raffreddam.	55 m ³ / s
Nocciolo		Numero pompe di circolaz. acqua	2
a) Elementi di combustibile		Prevalenza nominale	8,7 mH ₂ O
Numero	157	Potenza del motore	2850 kW
Reticolo	17x17		
Diametro esterno della barretta	9,5 mm		

Alternatore		Gruppi Diesel aliment. emergenza	
Potenza nominale	1200 MVA	Numero	4
Raffreddamento statore/rotore	Acqua/Idrogeno	Potenza	2X6000 KVA e 2x3500 KVA
Tensione	26 kV	STRUMENTAZIONE E CONTROLLO	
Fattore di potenza	0,9	Sistema di regolazione Tipo 'reattore segue' con comando automatico delle barre di controllo	
Lunghezza totale	15,7 m	Sistema di protezione Automatico di tipo integrato con calcolatore	
Dimensione trasversale statore	4,3 m		

A proposito delle barre di controllo, osserviamo che ci sono due tipi di barre: le barre nere, che assorbono molto e che sono composte di B_4C e le barre grigie, che assorbono meno (servono per le regolazioni più fini) che sono composte di Ag-In-Cd. Osserviamo inoltre che la portata totale del refrigerante è enorme; questo è dovuto al fatto che il ΔT deve essere rigorosamente mantenuto entro un certo range.

Di questo reattore interessano anche altri dati; per esempio ci interessa sapere che, delle 82,2 tonnellate di combustibile, solo 72,46 sono di Uranio (le rimanenti sono di ossigeno) e di queste 2,3187 sono di ^{235}U . E' inoltre interessante il fattore di carico, stimato pari a 0,8333 (ovvero 300 Effective Full Power Days ogni anno). Il burnup complessivo (relativo a 3 anni e quindi, per quanto visto prima, a 900 EFPDs) è:

$$burnup = \frac{2787 \cdot 900}{72,46} = 34616 MWD / t$$

Ogni anno si scarica un terzo del reattore, ovvero 24,15 t di uranio che contengono 169 kg di ^{235}U e 121 kg di ^{239}Pu da recuperare durante il ritrattamento del combustibile. A proposito dei rifiuti, considerando solo ^{137}Cs e ^{90}Sr caratterizzati dai seguenti λ e yield:

$$\begin{cases} I = 7,32 \cdot 10^{-10} \\ y = 6\% \end{cases}$$

si può calcolare l'attività scaricata per ogni anno; ricordando che

$$1Ci = 3,7 \cdot 10^{10} \frac{dec}{s}$$

si ricava che l'energia sviluppata nel combustibile scaricato è:

$$E = burnup \cdot 24,15 = 8,36 \cdot 10^5 MWD$$

Ricordando la seguente uguaglianza:

$$200 \frac{MeV}{fiss} = 3,70833 \cdot 10^{-22} \frac{MWD}{fiss}$$

troviamo le fissioni che sono avvenute nel combustibile scaricato:

$$fiss = \frac{E}{3,70833 \cdot 10^{-22}} = 2,26 \cdot 10^{27}$$

Siccome allora la resa complessiva di Cs e Sr è del 12%, il numero di atomi di Cs e Sr nati sarà:

$$2,26 \cdot 10^{27} \cdot 0,12 = 2,7 \cdot 10^{26}$$

Trascurando dunque il decadimento avvenuto durante il funzionamento (i tempi di decadimento di questi nuclidi sono di circa 30 anni), si ha un'attività del combustibile scaricato annualmente data dalla seguente relazione:

$$\frac{2,7 \cdot 10^{26} \cdot 7,32 \cdot 10^{-10}}{3,7 \cdot 10^{16}} = 5,3 \frac{MCi}{anno}$$

La densità dell'ossido è:

$$r_{UO_2} = 9,8 \frac{g}{cm^3}$$

Conoscendo il peso complessivo dell'ossido e la sua densità si può ricavare il volume dell'ossido che sarà pari a 8,358 m^3 . Tenendo conto che il 2,5% della potenza va nell'acqua, la densità di potenza media di una barretta sarà:

$$\frac{2787(1-0,025)}{8,358 \cdot 10^6} = 325 \frac{W}{cm^3}$$

Questa prende dunque il nome di potenza specifica (per unità di volume).

Dato il raggio della barretta (0,418cm) si ricava la potenza lineare con la seguente relazione:

$$325 \cdot pr_{Bar}^2 = 178,5 \frac{W}{cm}$$

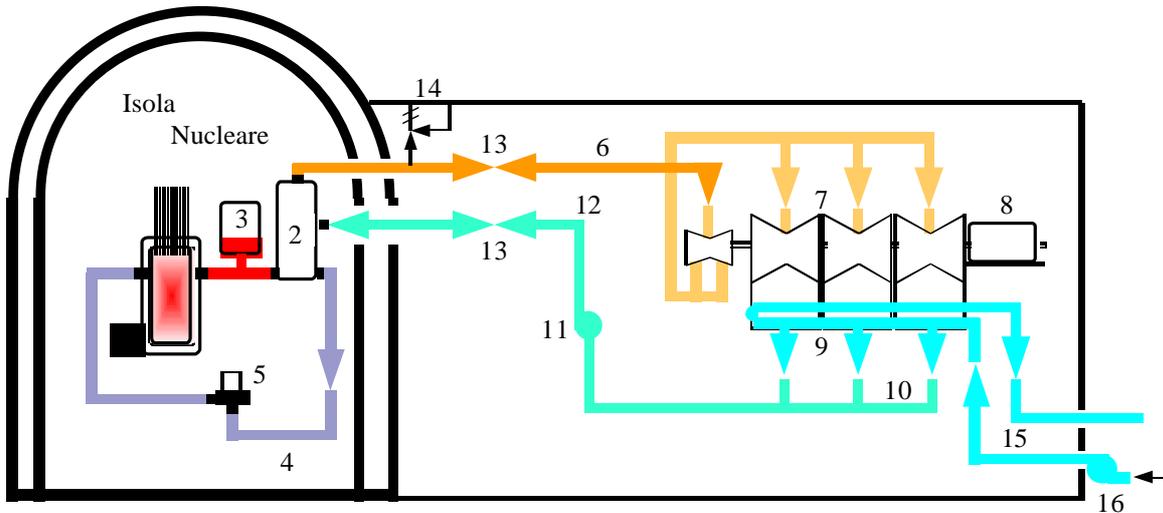
Siccome stiamo parlando di cinetica puntiforme queste potenze verranno considerate uniformi. Ci interessa anche il valore della conduttività "equivalente" della barretta (tiene conto dei salti termici nell'ossido, gap e guaina), che è circa pari a $1,44 \cdot 10^{-2} \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$. Ricordiamo infine la densità media dell'acqua:

$$0,704 \frac{g}{cc}$$

che è un dato importante perché è a questo dato che sono collegate le perdite di reattività dovute alla temperatura. Il calore specifico dell'acqua, infine, è:

$$5,8136 \frac{MJ}{t}$$

Nell'immagine seguente vediamo uno schema semplificato di un impianto nucleare PWR.



LEGENDA

- | | |
|---|--|
| 1 Recipiente in pressione del reattore (Vessel) | 9 Condensatore |
| 2 Generatore di pressione | 10 Tubazione condensato |
| 3 Pressurizzatore | 11 Pompa acqua alimento |
| 4 Circuito refrigerante primario del reattore | 12 Tubazione acqua alimento |
| 5 Pompa refrigerante primario del reattore | 13 Valvole di isolamento |
| 6 Tubazione vapore principale | 14 Valvole di sicurezza |
| 7 Turbina | 15 Tubazioni acqua di circolazione al condensatore |
| 8 Alternatore | 16 Pompa acqua di circolazione al condensatore |

Concentriamoci ora su una sola barretta e sull'acqua che le compete facendo riferimento alla prima immagine della pagina seguente. Ognuna delle N barrette vedrà una portata pari alla portata complessiva Q divisa per il numero delle barrette. Come si vede, dobbiamo considerare tre importanti fenomeni:

- l'ingresso dell'acqua nella zona di interesse e il contributo entalpico che questo apporta (A);
- l'uscita dell'acqua dalla zona di interesse (B);
- il contributo entalpico dovuto allo scambio di calore tra l'acqua e la barra (C).

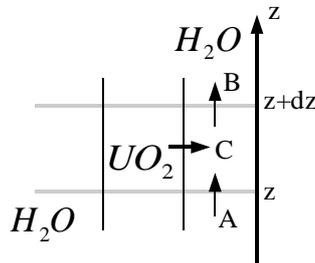
Quando siamo in condizioni di equilibrio si dovrà ovviamente avere che:

$$B - A = C \quad (1)$$

Esplicitiamo ora i tre addendi:

$$\begin{cases} B = \frac{Q}{N} c_{Mod} T_{Mod} (z + dz) \\ A = \frac{Q}{N} c_{Mod} T_{Mod} (z) \\ C = P_{Lin} dz = \frac{P}{Nh} dz \end{cases}$$

dove vediamo apparire, nell'ultima espressione, la potenza lineare e la potenza complessiva prima viste. In questa visione abbiamo trascurato il fatto che la barretta conduce anche assialmente in quanto tale scambio di calore è assolutamente trascurabile rispetto agli scambi verso l'esterno. Il gradiente verticale è infatti di $0,1^\circ\text{C}$ per cm (valore ricavato osservando che il salto termico tra l'acqua che entra e l'acqua che esce è di 36°C mentre l'altezza della barra è di 366 cm), ossia ordini di grandezza inferiore al gradiente radiale.



Esplicitando dunque i tre addendi come è stato appena mostrato, la relazione (1) può essere riscritta nel modo seguente:

$$\frac{Q}{N} c_{Mod} \frac{dT_{Mod}}{dz} dz = \frac{P}{Nh}$$

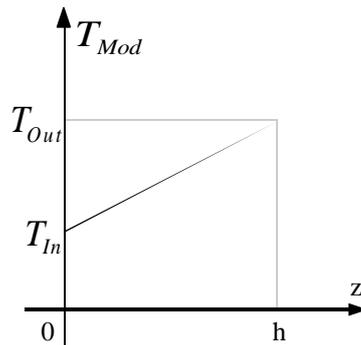
ovvero:

$$Qc_{Mod} \frac{dT_{Mod}}{dz} dz = \frac{P}{h}$$

Siccome abbiamo in precedenza imposto che la potenza lineare sia costante, l'ultima relazione scritta diventa:

$$\frac{dT_{Mod}}{dz} = const$$

dalla quale si ricava che la temperatura del moderatore varia linearmente, come mostrato nell'immagine seguente.



Questo andamento lineare deriva dall'aver considerato costante la potenza lineare al variare della quota z.

Siccome conosciamo il salto termico, possiamo sfruttare la seguente relazione:

$$P = Qc_{Mod} (T_{Out} - T_{In})$$

e, utilizzando i dati numerici prima visti, ricavare:

$$Qc_{Mod} = 77,7$$

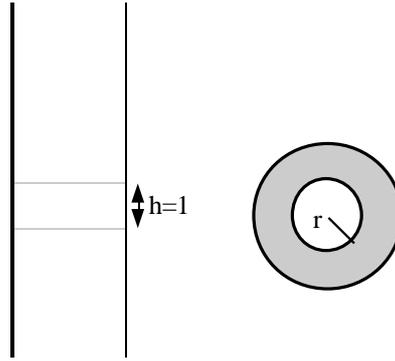
Noto poi il calore specifico del moderatore, si può risalire alla portata necessaria per ottenere una tale situazione. Imponiamo ora che la temperatura del moderatore non dipenda dalla coordinata radiale r e battezziamo come segue la temperatura media dell'acqua:

$$\bar{T}_{Mod} = \frac{T_{Out} + T_{In}}{2} = 308^\circ\text{C}$$

Dopo esserci occupati della temperatura dell'acqua vediamo cosa si può dire sulla temperatura della barretta. Facendo riferimento alla prima immagine della pagina seguente possiamo dire che, all'equilibrio, tutto il calore contenuto nella zona bianca viene trasmesso nella zona grigia e che quindi varrà la seguente relazione:

$$P_{Vol} pr^2 = -2prk_{UO_2} \frac{dT_{Fuel}}{dr}$$

nella quale vediamo apparire la densità di potenza relativa alla barra che avevamo calcolato in precedenza.



Dall'ultima relazione scritta (a secondo membro della quale troviamo la superficie di scambio, di altezza unitario), si ricava:

$$\frac{dT_{Fuel}}{dr} = -\frac{P_{Vol}}{2k_{UO_2}} r$$

da cui si ottiene:

$$T_{Fuel}(r) = const - \frac{P_{Vol}}{4k_{UO_2}} r^2$$

ovvero, conoscendo la temperatura al centro della barra:

$$T_{Fuel}(r) = T_{Fuel}^0 - \frac{P_{Vol}}{4k_{UO_2}} r^2 \quad (2)$$

Questo andamento della temperatura nella barra sarà valido per ogni quota z della barra stessa. Ovviamente si dovrà poi avere che:

$$T_{Fuel}(r_{Bar}) = T_{Mod}(z)$$

La variazione di temperatura tra il centro e l'esterno della barra sarà quindi:

$$\Delta T_{Fuel} = T_{Fuel}^0 - T_{Fuel}(r_{Bar})$$

Combinando quest'ultima relazione con la relazione (2) ed utilizzando i dati numerici precedentemente forniti, si ricava:

$$\Delta T_{Fuel} = \frac{P_{Vol}}{4k} r_{Bar}^2 = 984^\circ C$$

Il salto di temperatura diviso il raggio della barretta fornisce il gradiente radiale (medio) di temperatura; un confronto con il gradiente assiale trovato prima conferma il fatto che quel gradiente può essere trascurato. L'andamento della temperatura della barra dipende dunque, sia da z che da r e può essere rappresentato come si vede nel primo grafico della pagina seguente. Dal punto di vista numerico, al centro della barra (ovvero per $r=0$) si ha:

$$\begin{cases} \{z = 0\} \Rightarrow \{T = 1274^\circ C\} \\ \{z = h\} \Rightarrow \{T = 1310^\circ C\} \end{cases}$$

Facendo queste considerazioni sulla temperatura della barra comprendiamo anche per quale motivo il salto termico tra l'acqua che entra nel reattore e l'acqua che esce dal reattore non deve essere troppo grande: dobbiamo infatti mantenerci lontani dalla temperatura, che si aggira attorno ai $1800^\circ C$, in cui si manifestano notevoli cambiamenti del combustibile. Se prima abbiamo considerato la media lungo la coordinata z della temperatura del moderatore, ora, per quanto riguarda il combustibile, dovremo considerare una temperatura mediata due volte: una volta rispetto alla coordinata z ed una volta rispetto alla coordinata r . Per quanto riguarda la media radiale dobbiamo considerare la seguente relazione:

$$\frac{1}{\pi r_{Bar}^2} \int_0^{r_{Bar}} T_{Fuel}(r) 2\pi r dr = T_{Fuel}^0 - \frac{1}{2} \frac{P_{Vol}}{4k_{UO_2}} r_{Bar}^2$$

Si avrà dunque:

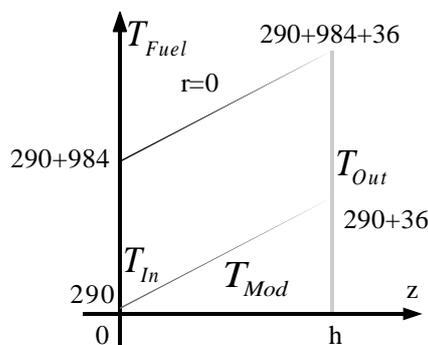
$$\bar{T}_{Fuel}(r) = T_{Mod}(z) + \frac{984^\circ C}{2}$$

Come tutte le altre temperature, anche tale media varia linearmente, facciamo dunque la media lineare e otteniamo:

$$\bar{T} = \bar{T}_{Mod} + \frac{984^\circ C}{2} = 800^\circ C$$

Ora abbiamo due semplici valori che mi permettono di ridurre il reattore ad un punto; da ora in poi considereremo solo le due seguenti temperature:

$$\begin{cases} T_{Fuel} = 800^\circ C \\ T_{Mod} = 308^\circ C \end{cases}$$



Vediamo ora cosa succede quando si ha uno spostamento dall'equilibrio: ovviamente si avrà:

$$\{P_0 = Qc_{Mod} (T_{Out}^0 - T_{In}^0)\} \rightarrow \{P = Qc_{Mod} (T_{Out} - T_{In})\}$$

Siccome variano solo le temperature e non il prodotto Qc_{Mod} , la variazione di potenza può essere espressa nel modo seguente:

$$\Delta P = Qc_{Mod} (\Delta T_{Out} - \Delta T_{In}) \quad (3)$$

e quindi sarà:

$$\begin{cases} T_{In} = T_{In}^0 + \Delta T_{In} \\ T_{Out} = T_{Out}^0 + \Delta T_{Out} \end{cases}$$

Lo scambio termico tra il fuel e il moderatore è espresso da una relazione del tipo:

$$P_0 = K (T_{Fuel}^0 - T_{Mod}^0)$$

All'equilibrio si potrà scrivere:

$$K = \frac{P_0}{T_{Fuel}^0 - T_{Mod}^0}$$

Quando l'equilibrio viene rotto rimane:

$$P = K (T_{Fuel} - T_{Mod})$$

con K che rimane invariato. La variazione di potenza può allora anche essere espressa nel modo seguente:

$$\Delta P = K (\Delta T_{Fuel} - \Delta T_{Mod}) \quad (4)$$

Ovviamente tutte queste relazioni sono basate sull'affermazione (che per ora non abbiamo confermato) relativa al fatto che il reattore segua il carico. Oltre alle relazioni (3) e (4) consideriamo anche la relazione seguente:

$$\Delta T_{Mod} = \frac{\Delta T_{Out} + \Delta T_{In}}{2}$$

Nel caso di equilibrio critico si deve inoltre mantenere valida la seguente relazione:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{Op} + \mathbf{r}(\Delta T_{Fuel}, \Delta T_{Mod}) = 0$$

Modifichiamo quest'ultima relazione ponendo che sia:

$$\mathbf{r}(\Delta T_{Fuel}, \Delta T_{Mod}) = \mathbf{a}_{Fuel} \Delta T_{Fuel} + \mathbf{a}_{Mod} \Delta T_{Mod}$$

Questa relazione vale quando le variazioni di temperatura non sono troppo elevate e quindi vale solo nel caso di correzioni di potenza ma non nel caso dell'accensione o dello spegnimento del reattore; combinando dunque le ultime due relazioni scritte si ottiene:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{Op} + \mathbf{a}_{Fuel} \Delta T_{Fuel} + \mathbf{a}_{Mod} \Delta T_{Mod} = 0$$

essendo \mathbf{a}_{Fuel} e \mathbf{a}_{Mod} i coefficienti di reattività per variazioni di temperatura del combustibile e del moderatore.

Variazioni di carico.

Nella lezione precedente eravamo arrivati alle quattro seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \Delta P = Qc_{Mod}(\Delta T_{Out} - \Delta T_{In}) \\ \Delta P = K(\Delta T_{Fuel} - \Delta T_{Mod}) \\ \Delta T_{Mod} = \frac{\Delta T_{Out} + \Delta T_{In}}{2} \\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_{Op} + \mathbf{a}_{Fuel}\Delta T_{Fuel} + \mathbf{a}_{Mod}\Delta T_{Mod} = 0 \end{cases}$$

Queste quattro reazioni valgono, ovviamente, nel caso in cui il reattore effettivamente segua il carico; le quattro incognite legate a queste quattro equazioni sono le variazioni di temperatura. Dobbiamo ora occuparci dei coefficienti \mathbf{a} che appaiono nell'ultima relazione. Incominciamo con l'osservare che sicuramente si avrà:

$$\mathbf{a}_{Mod} < 0$$

Ricordiamo poi la seguente relazione:

$$p = e^{-\frac{I_{Eff}}{\mathbf{x}\mathbf{s}_p}} \quad (1)$$

dove era:

$$\overline{\mathbf{s}}_p = \frac{N_{Mod}}{N_{Fuel}} \mathbf{s}_s^{Mod}$$

Quando c'è una variazione di temperatura, come conseguenza si avrà una variazione di $\overline{\mathbf{s}}_p$ dovuta alla variazione di densità del moderatore; ci conviene dunque considerare la seguente espressione (in cui \mathbf{r}_{Mod} è la densità):

$$\mathbf{s}_p = \mathbf{s}_p^0 \left(1 - \frac{\Delta \mathbf{r}_{Mod}}{\mathbf{r}_{Mod}} \right)$$

Nelle condizioni di funzionamento, ossia per valori di temperatura e pressione

$$\begin{cases} T = 310^\circ C \\ p = 160 \frac{kg}{cm^2} \end{cases}$$

per una variazione di 1 grado di temperatura dell'acqua si ha una variazione relativa di densità pari a:

$$\frac{\Delta \mathbf{r}_{Mod}}{\mathbf{r}_{Mod}} = 3,6^0 /_{00} \quad (2)$$

Si avrà allora:

$$p = e^{-\frac{I_{Eff}}{\mathbf{x}\mathbf{s}_p} \left(1 + \frac{\Delta \mathbf{r}_{Mod}}{\mathbf{r}_{Mod}} \right)} = (p_0)^{1 + \frac{\Delta \mathbf{r}_{Mod}}{\mathbf{r}_{Mod}}}$$

Avendo ad esempio un valore iniziale di 0,8 si ottiene un valore finale di 0,799355 e quindi una variazione relativa di reattività pari a:

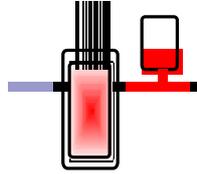
$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\mathbf{r}} = -80 \frac{pcm}{^\circ C}$$

questo significa che ogni grado in più del moderatore fa diminuire la reattività di 80 pcm; possiamo dunque dire che:

$$\mathbf{a}_{Mod} = -80 \frac{pcm}{^\circ C}$$

Il reattore PWR freddo e pulito ha una reattività in eccesso notevole (essendo $k_\infty \approx 1,4$); una reattività troppo alta non è controllabile solo con le barre e quindi si deve utilizzare anche del Boro disciolto in acqua; all'inizio della vita del reattore possono arrivare ad essere presenti anche 2000 p.p.m. di Boro in acqua (l'isotopo del Boro che interessa è il ^{10}B , che rappresenta il 20% del B naturale e che ha una sezione d'urto d'assorbimento di circa 3800 b). Il fatto che il B sia disciolto in acqua e che regoli la reattività del reattore complica ulteriormente l'analisi della situazione. Nei reattori PWR, infatti, come mostrato schematicamente nella prima immagine della pagina seguente, per mantenere costante la pressione, all'uscita del vessel è presente un pressurizzatore che raccoglie dell'acqua; quando tale pressurizzatore interviene portando via l'acqua in eccesso, porta via con l'acqua anche il B. In termini di reattività, ogni p.p.m. di B

aggiunto all'acqua, rappresenta ~10 pcm di reattività negativa inserita. Fatte queste considerazioni appare evidente che si dovranno usare diversi valori di a_{Mod} a seconda che ci sia molto B (come avviene in situazione di BOL ovvero di Beginning Of Life) oppure che di B ce ne sia poco (come avviene a fine vita del reattore). L' a_{Mod} che abbiamo trovato in precedenza vale in quest'ultima situazione; per valutare il medesimo coefficiente in situazione di BOL bisogna considerare altri calcoli.



Come prima cosa osserviamo che la relazione (2) implica una perdita dello 0,36% B in relazione all'aumento di un grado della temperatura; ciò si traduce in una perdita di 7,2 p.p.m. Aumentando dunque di un grado la temperatura dell'acqua borata si assiste ad un aumento di reattività di 72 pcm da cui si ricava:

$$a_{Mod} = (-80 + 72) \frac{pcm}{^{\circ}C} = -8 \frac{pcm}{^{\circ}C}$$

E' importante dosare con attenzione il B nell'acqua per non arrivare nella pericolosissima situazione nella quale il parametro a_{Mod} diventa maggiore di zero; Oltre alla presenza del B disciolto in acqua, bisogna poi considerare che le barre di combustibile fresche spesso vengono avvelenate già in partenza per evitare che, durante incidenti del tipo LOCA (perdita del liquido refrigerante) ci siano sconsiderate iniezioni di reattività.

Passiamo ora ad occuparci del parametro a_{Fuel} e ricordiamo quindi nuovamente la relazione (1) dove era:

$$I_{Eff} \approx a + b \sqrt{\frac{S}{M}}$$

La temperatura del fuel influenza l'integrale efficace e per una variazione di un grado si avrà:

$$\frac{\Delta I}{I} = 0,13\% / ^{\circ}C$$

Nella situazione iniziale si avrà dunque:

$$p_0 = e^{-\frac{I_0}{\lambda_s p}}$$

mentre poi si avrà:

$$p = e^{-\frac{I_0 \left(1 + \frac{\Delta I}{I_0}\right)}{\lambda_s p}} \approx (p_0)^{1 + \frac{\Delta I}{I}}$$

Ponendo anche in questo caso un valore di partenza di 0,8 si ottiene 0,799997679; si avrà dunque:

$$a_{Fuel} \approx -2 \frac{pcm}{^{\circ}C}$$

Ora che abbiamo trovato i due parametri α possiamo riscrivere il sistema presentato all'inizio di questa lezione, esplicitando le quattro incognite; si avrà dunque:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta T_{Fuel} = \frac{\frac{a_{Mod}}{K} \Delta p - r_{Op}}{a_{Mod} + a_{Fuel}} \\ \Delta T_{Mod} = \frac{-r_{Op} - \frac{a_{Fuel}}{K} \Delta p}{a_{Mod} + a_{Fuel}} \\ \Delta T_{Out} = \Delta T_{Mod} + \frac{1}{2Qc_{Mod}} \Delta p \\ \Delta T_{In} = \Delta T_{Mod} - \frac{1}{2Qc_{Mod}} \Delta p \end{array} \right.$$

Osservando le prime due relazioni di questo sistema capiamo per quale motivo \mathbf{a}_{Mod} non deve diventare maggiore di zero: se infatti questo avvenisse, ci sarebbe il rischio che il denominatore della prima espressione (e anche quello della seconda) si avvicinasse a zero e questo significherebbe un aumento enorme delle temperature di fuel e moderatore. Vediamo ora un esempio numerico che si riferisce ad una situazione intermedia (né inizio, né fine vita), caratterizzata dai seguenti valori:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{Fuel} = -2 \frac{pcm}{^{\circ}C} \\ \mathbf{a}_{Mod} = -30 \frac{pcm}{^{\circ}C} \\ K = \frac{P_0}{T_{Fuel}^0 - T_{Mod}^0} = 5,691 \frac{MW}{^{\circ}C} \\ Qc_{Mod} = \frac{P_0}{T_{Out}^0 - T_{In}^0} = 77,7 \frac{MW}{^{\circ}C} \end{array} \right.$$

- Vediamo ora un primo caso (che da ora in avanti indicheremo come caso A) nel quale l'utenza esterna richiede una variazione di potenza di 200 MW mentre l'operatore non inserisce alcun contributo alla reattività; sfruttando i valori numerici assegnati e le relazioni precedentemente trovate si avrà:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta T_{Fuel} = 32,946 \\ \Delta T_{Mod} = -2,196 \\ \Delta T_{Out} = -0,911 \\ \Delta T_{In} = -3,482 \end{array} \right.$$

Il reattore è tornato ad essere critico poiché si ha:

$$\mathbf{r} = -2 \cdot 32,946 + 30 \cdot 2,196 = 0$$

La variazione di potenza si ottiene nel modo seguente:

$$\Delta p = 77,7(-0,911 + 3,482) = 200$$

Osserviamo che il fatto che il moderatore si abbassi di oltre 2 gradi implica che sarà necessario un certo richiamo di acqua dal pressurizzatore, l'ideale sarebbe invece minimizzare il flusso di acqua tra il pressurizzatore e il vessel.

- Un secondo caso che analizziamo (che da ora in avanti verrà indicato come caso B) prevede che l'utenza esterna non richieda nessuna variazione di potenza ma che l'operatore inserisca 100 pcm di reattività. Sfruttando i dati numerici assegnati e le relazioni prima trovate si trova:

$$\Delta T_{Fuel} = \Delta T_{Mod} = \Delta T_{Out} = \Delta T_{In} = 3,125$$

Ovviamente il reattore torna ad essere critico e si può verificare facilmente che non c'è alcuna variazione di potenza.

Variazioni di carico.

Nell'ultima lezione ci siamo occupati di due situazioni particolari, vediamo ora una terza.

- Questa situazione (che da ora in poi verrà indicata come situazione C) prevede che ci sia una richiesta di potenza dall'esterno pari a 200 MW e che l'operatore muova le barre, inserendo reattività positiva, per fare in modo che la temperatura del moderatore non vari. Ricordando le formule viste nella lezione precedente, avremo che l'operatore agisce affinché sia verificata la seguente relazione:

$$\Delta T_{Mod} = \frac{-r_{Op} - \frac{a_{Fuel}}{K} \Delta P}{a_{Mod} + a_{Fuel}} = 0$$

ovvero:

$$r_{Op} = -\frac{a_{Fuel}}{K} \Delta P \quad (1)$$

Ricordiamo ora la relazione seguente:

$$\Delta T_{Fuel} = \frac{\frac{a_{Mod}}{K} \Delta P - r_{Op}}{a_{Mod} + a_{Fuel}}$$

si otterrà, combinando le due ultime relazioni scritte:

$$\Delta T_{Fuel} = \frac{\Delta P}{K}$$

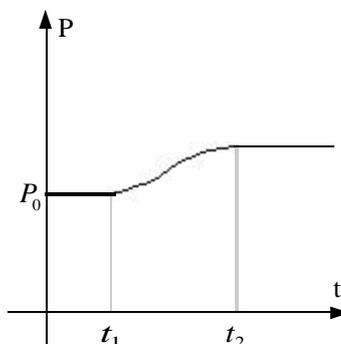
Con ragionamenti identici si arriverà alle seguenti due espressioni:

$$\begin{cases} \Delta T_{Out} = \frac{\Delta P}{Qc_{Mod}} \\ \Delta T_{In} = -\frac{\Delta P}{Qc_{Mod}} \end{cases}$$

Sfruttando i valori numerici assegnati nella scorsa lezione si otterrebbe:

$$\begin{cases} r_{Op} = 70,2856 pcm \\ \Delta T_{Fuel} = 35,1429 \\ \Delta T_{Mod} = 0 \\ \Delta T_{Out} = 1,2857 \\ \Delta T_{In} = -1,2857 \end{cases}$$

Siccome la temperatura del moderatore non varia, non ci saranno flussi di acqua tra il vessel e il pressurizzatore che possono risultare scomodi da gestire. Ovviamente le richieste di potenza non sono istantanee ma hanno un andamento come quello rappresentato di seguito.



E' ovvio che, in una situazione reale, al tempo t_1 non possiamo sapere quale sarà il salto complessivo in potenza perché in quel momento vedo solo che la potenza sta salendo; tra l'altro bisogna notare che l'operatore si accorge che la potenza sale perché vede diminuire la temperatura di ingresso nel reattore. Ricordiamo dunque la seguente relazione:

$$\Delta T_{Mod} = \frac{\Delta T_{Out} + \Delta T_{In}}{2}$$

dalla quale, siccome siamo nella situazione nella quale la temperatura media del moderatore non varia, si ricava:

$$\Delta T_{Out} = -\Delta T_{In}$$

e quindi, ricordando la relazione

$$\Delta P = Qc_{Mod}(\Delta T_{Out} - \Delta T_{In})$$

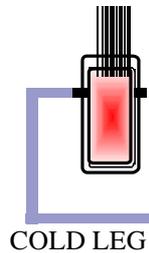
e combinando le ultime due espressioni scritte, si ricava:

$$\Delta P = -2Qc_{Mod}\Delta T_{In}$$

La relazione (1) può dunque essere riscritta nel modo seguente:

$$r_{Op} = \left(\frac{2Qc_{Mod}a_{Fuel}}{K} \right) \Delta T_{In} \approx \left(-54,66 \frac{pcm}{^{\circ}C} \right) \Delta T_{In}$$

La reattività viene dunque controllata facendo riferimento alla temperatura della gamba fredda del primario (rappresentata in figura) e quindi questo tipo di controllo, che ormai viene fatto in automatico sfruttando dei sensori di temperatura posti all'ingresso dell'acqua nel reattore, prende il nome di COLD LEG CONTROL.



Fino ad ora abbiamo sempre creduto al fatto che il reattore PWR segua il carico, è giunto ora il momento di vedere se questo è vero. Vediamo dunque come variano con il tempo le temperature del fuel, del moderatore (media, in ingresso, in uscita) e la potenza. Ovviamente partiremo da dei dati iniziali che subiscono delle perturbazioni; siamo ancora in una situazione di cinetica con controreazione per la quale valgono ancora le due seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \dot{n} = \frac{r-b}{\Lambda} n + I c & (2) \\ \dot{c} = \frac{b}{\Lambda} n - I c & (3) \end{cases}$$

dove sia:

$$r(t) = r_{Op}(t) + a_{Fuel} [T_{Fuel}(t) - T_{Fuel}^0] + a_{Mod} [T_{Mod}(t) - T_{Mod}^0] \quad (4)$$

Supponiamo di conoscere la massa dell'ossido di Uranio (che poniamo circa pari ad 82 t), il suo calore specifico (che si ponga pari a 0,3 KJ/kg), la massa d'acqua che è contenuta nel reattore (circa 11 t) e il suo calore specifico (dato già fornito in precedenza). Consideriamo quindi la relazione

$$P_0 = K(T_{Fuel}^0 - T_{Mod}^0)$$

Quando viene introdotta una perturbazione avrà senso scrivere la seguente relazione:

$$\dot{T}_{Fuel} M_{Fuel} c_{Fuel} = P - K(T_{Fuel} - T_{Mod}) \quad (5)$$

dove al primo membro vediamo l'innalzamento del contenuto entalpico del combustibile per unità di tempo, dovuto allo sbilanciamento tra potenza in esso generata e potenza asportata dall'acqua. Se effettivamente il PWR segue il carico, finito il transitorio la derivata si deve annullare. Ricordiamo dunque la seguente equazione:

$$P = Qc_{Mod}(T_{Out} - T_{In})$$

ed uguagliamola con quella precedente, ottenendo:

$$\dot{T}_{Fuel} M_{Fuel} c_{Fuel} = Qc_{Mod}(T_{Out} - T_{In}) - K(T_{Fuel} - T_{Mod}) \quad (6)$$

Abbiamo così ottenuto un sistema composto dalle equazioni (2), (3), (4), (5), e (6) che sono equazioni differenziali del I ordine ma non sono lineari (questo rende impossibile gestire la situazione con il metodo della matrice esponenziale, si utilizzeranno invece altri metodi numerici come il Runge-Kutta). In un reattore ad acqua si ha, tipicamente, Λ pari a 20 μ s e quindi qualunque metodo numerico venga utilizzato deve basarsi su salti temporali di questo tipo. Poniamo ora che si abbia il seguente dato iniziale:

$$n_0 = 1$$

e ricordiamo che in equilibrio critico si ha:

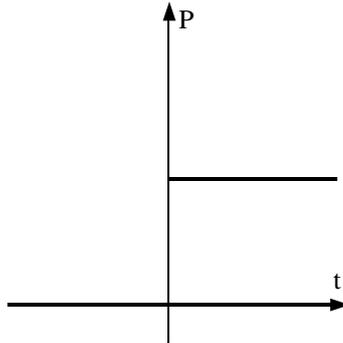
$$c_0 = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{I}\Lambda}$$

e anche:

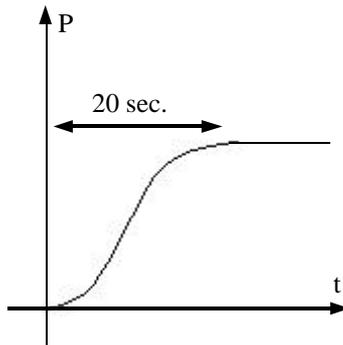
$$P = P_0 n$$

In questo modo abbiamo dunque legato la relazione (2) con la relazione (5).

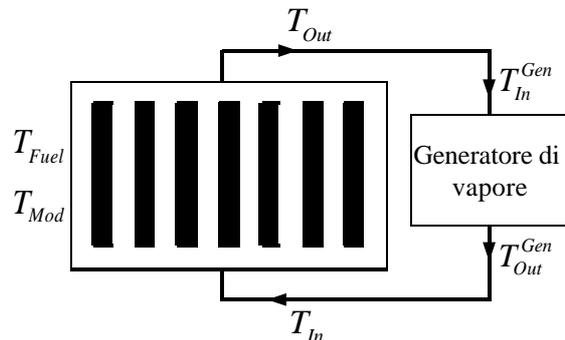
Vediamo ora che tipo di perturbazione possiamo dare a questo sistema dinamico: siccome sono presenti i neutroni ritardati che hanno un ritardo medio attorno ai 12 secondi, risulta poco veritiera una simulazione di perturbazione come la seguente



Sarà invece logico utilizzare perturbazioni con transitori dolci, come il seguente



Soffermiamoci dunque sulle perturbazioni imposte dall'utenza e facciamo riferimento al seguente grafico.



Ovviamente quando si è all'equilibrio si avrà:

$$\begin{cases} T_{Out}^0 = T_{In}^{0Gen} \\ T_{Out}^{0Gen} = T_{In}^0 \end{cases}$$

Quando invece viene introdotta una perturbazione, nasce un problema legato ai ritardi: la prima temperatura che cambia sarà infatti la temperatura di uscita dal generatore di vapore, poi varierà la temperatura di ingresso nel reattore e così via. Dobbiamo trovare un modo per simulare quello che accade realmente. Osserviamo dunque che una variazione di potenza interesserà in primo luogo la seguente relazione:

$$P = Qc_{Mod} (T_{In}^{Gen} - T_{Out}^{Gen})$$

dalla quale si ricava, inserendo la dipendenza temporale:

$$T_{Out}^{Gen}(t) = T_{In}^{Gen}(t) - \frac{P(t)}{Qc_{Mod}}$$

Dobbiamo poi tener conto, come detto, del ritardo con il quale l'informazione relativa alla variazione di temperatura viaggia all'interno del sistema; stimiamo dunque che siano necessari 2 o 3 secondi perché l'acqua percorra il ramo freddo (cold leg) mentre sfruttando i dati numerici visti nelle lezioni precedenti, appare evidente che l'acqua rimarrà all'interno del nocciolo del reattore per un tempo inferiore al secondo (abbiamo infatti 11 t di acqua che si muovono con una portata di 14 t/s). Per tener conto di questi ritardi dovremo dunque utilizzare una relazione del tipo:

$$T_B(t + t) = T_A(t)$$



Il discorso si complica ulteriormente pensando che l'acqua non si muove come un fronte rigido e che quindi è necessario introdurre anche una costante temporale (τ') relativa al mescolamento; la relazione precedente diventa quindi:

$$T_B(t + t') = T_B(t) + \dot{T}_B(t)t' = T_A(t)$$

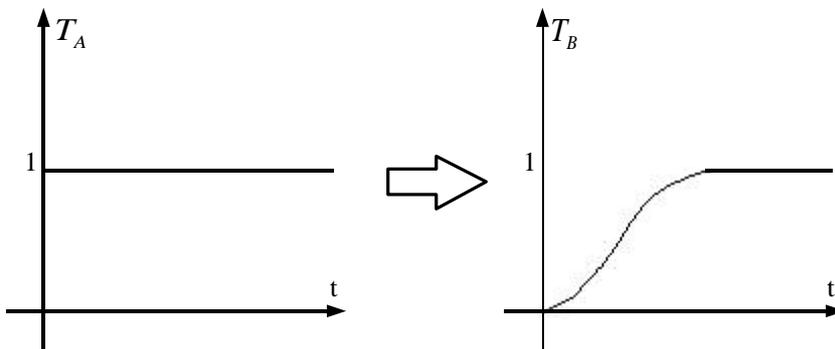
da cui si ricava:

$$\dot{T}_B(t) = \frac{T_A(t) - T_B(t)}{t'}$$

dalla quale si ricava:

$$T_B(t) = 1 - e^{-t/t'}$$

Da un punto di vista grafico possiamo dunque riassumere questo discorso sui ritardi nel modo seguente:



Questo ragionamento va applicato ad ogni tratto che l'acqua attraversa. Se fosse l'operatore ad intervenire, la prima temperatura che ne risentirebbe sarebbe la temperatura del fuel.

Ora rivediamo in maniera più approfondita i tre casi A, B e C che abbiamo esaminato in questa e nella lezione precedente; l'algoritmo che si è utilizzato per i calcoli si basa su sviluppi del tipo:

$$T_X(t + \Delta t) = T_X(t_0) + \dot{T}_X(t)\Delta t + \dots$$

In generale basta continuare lo sviluppo fino alla derivata seconda.

Vediamo dunque il caso A.

Riassumiamo innanzitutto i valori numerici:

Massa combustibile	82 t	Calore specifico acqua	5,8136
Massa acqua	11 t	Calore specifico combustibile	0,3097
Temperatura ingresso in reattore	290°C	Costante temporale combustibile	4,46 s
Temperatura uscita dal reattore	326°C	Costante temporale acqua	11,24 s
Temperatura media iniziale moderatore	308°C	Parametro K	5,69106
Temperatura media iniziale combustibile	800°C	Parametro F	27,33333
Potenza iniziale	2800 MW	Vita media neutronica (Λ)	$5 \cdot 10^{-5}$ s
Portata richiesta	13,3785 t/s	Parametro β	650 pcm

Parametro τ	13,004 s	Controllo automatico	Disinserito
Parametro a_{Fuel}	-2 pcm/°C	Parametro proporzionale	0
Parametro a_{Mod}	-30 pcm/°C	Parametro integrale	0
Ritardo nel Core	1 s	Parametro differenziale	0
Ritardo in gamba calda	2 s	Variazione di potenza	200 MW
Mescolamento in gamba calda	1 s	Variazione di reattività	0
Ritardo nel generatore	3 s	Tempo di perturbazione	20 s
Ritardo in gamba fredda	2 s	Reattività finale per mantenere costante la temperatura del moderatore	70,286 pcm
Mescolamento in gamba fredda	1 s		

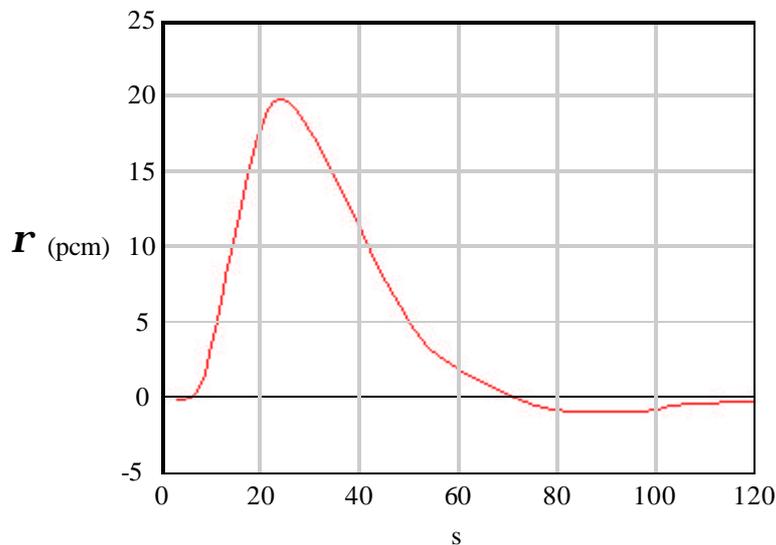
Tra tutti questi dati appare il parametro F, fino ad ora mai visto, che è così definito:

$$F = \frac{2Qc_{Mod}}{K}$$

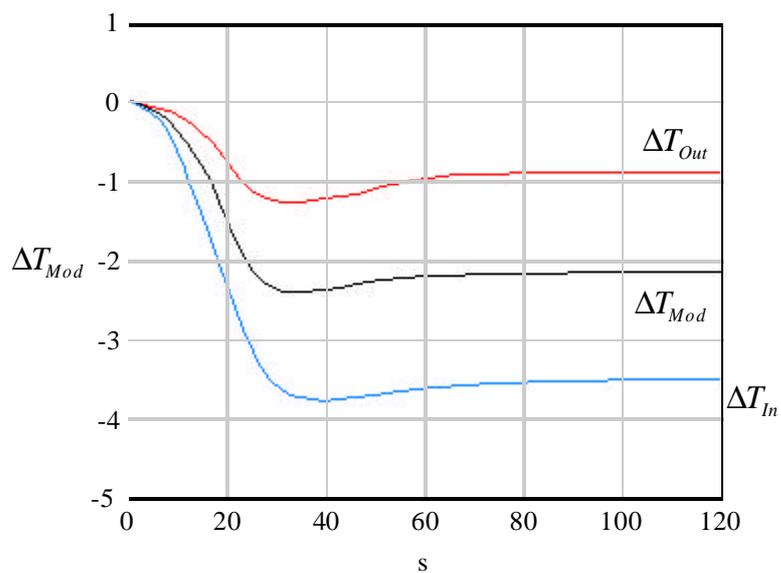
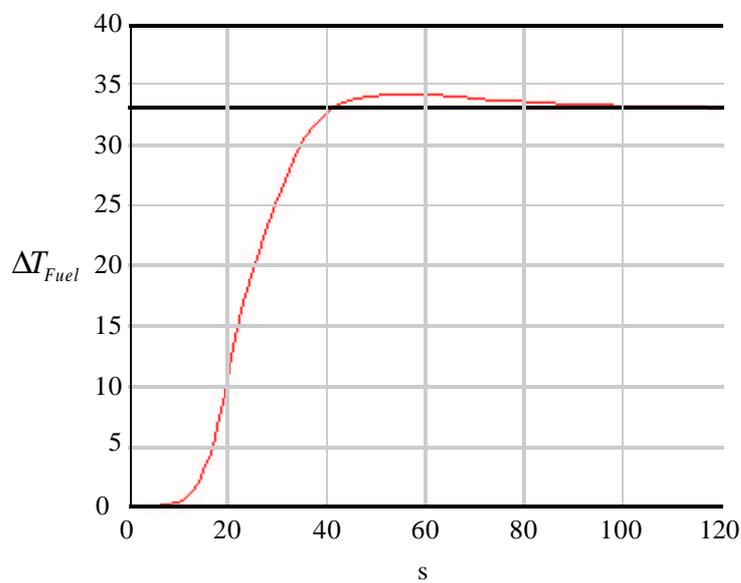
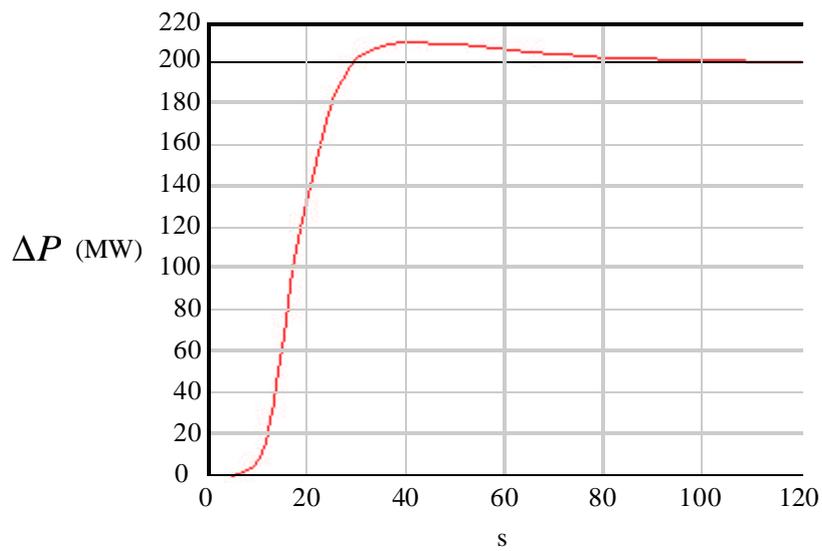
I parametri proporzionale, integrale e differenziale sono quelli relativi al controllo automatico, di cui riparleremo nel seguito. Ricordiamo anche i risultati che avevamo trovato:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{Fin} = 3000MW \\ \Delta T_{Mod} = -2,196^{\circ}C \\ \Delta T_{Fuel} = 32,946^{\circ}C \\ \Delta T_{In} = -3,482^{\circ}C \\ \Delta T_{Out} = -0,911^{\circ}C \end{array} \right.$$

Nel seguito vediamo i grafici relativi agli andamenti delle variabili che ci interessano; il primo grafico riguarda l'andamento della reattività: in rosso vediamo quindi la reattività che il reattore sviluppa in risposta all'aumento di potenza richiesta da parte dell'utente. Da notare il ritardo con il quale la reattività risponde, il fatto che dopo poco più di 20 secondi diventa preminente l'effetto Doppler e, soprattutto, che il reattore torna ad essere in equilibrio dopo circa 120 secondi.

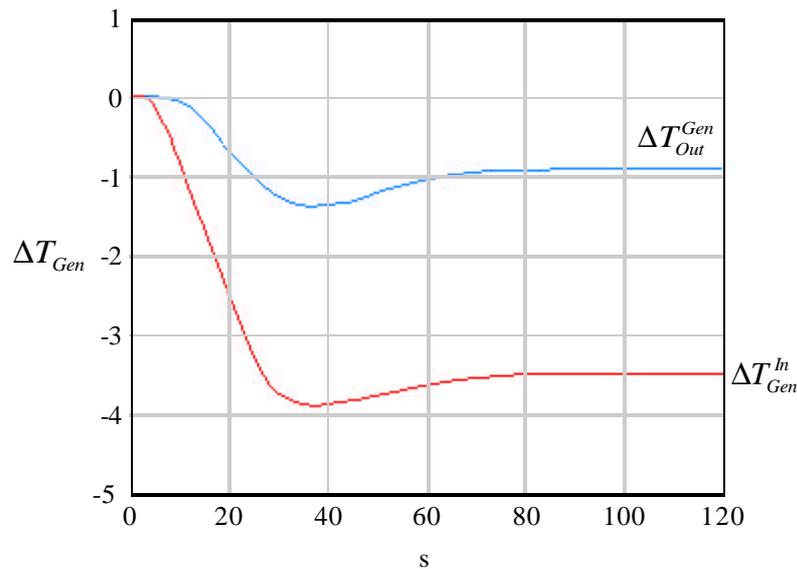


Nel secondo grafico (il primo della pagina successiva) vediamo l'andamento della variazione di potenza vista dall'utente; anche in questo caso bisogna notare il ritardo dovuto alla propagazione della variazione di temperatura nel sistema. Nel terzo grafico (secondo della pagina seguente) vediamo l'andamento della variazione della temperatura del fuel. Nel quarto grafico, il terzo della pagina seguente, troviamo tre curve. In tale grafico, infatti, sono stati raccolti gli andamenti delle variazioni della temperatura media del moderatore, della temperatura del moderatore in ingresso e della temperatura del moderatore in uscita dal reattore.



Nel primo grafico della pagina seguente, infine, appaiono gli andamenti delle variazioni delle temperature di ingresso e di uscita dal generatore di vapore. Si osservi, tramite sovrapposizione con l'ultimo grafico di questa pagina, come le

temperature di ingresso e uscita dal generatore tendano ad equivalere con le temperature di uscita e ingresso dal reattore.



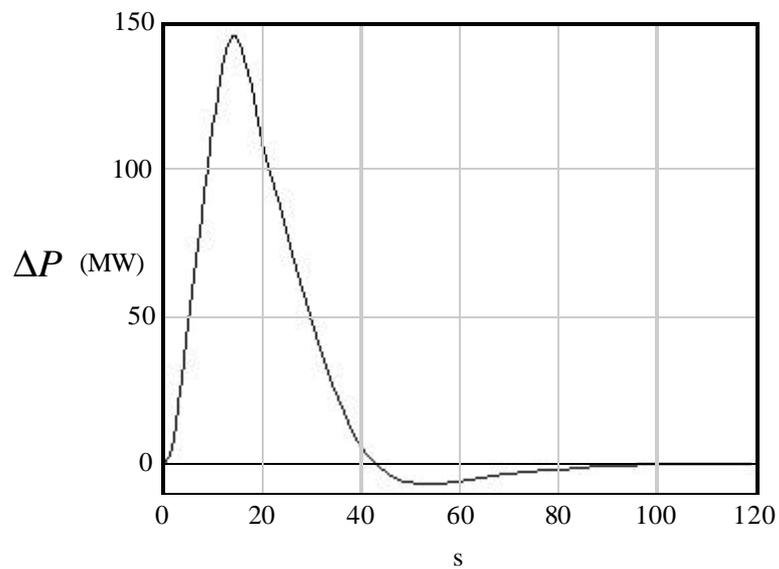
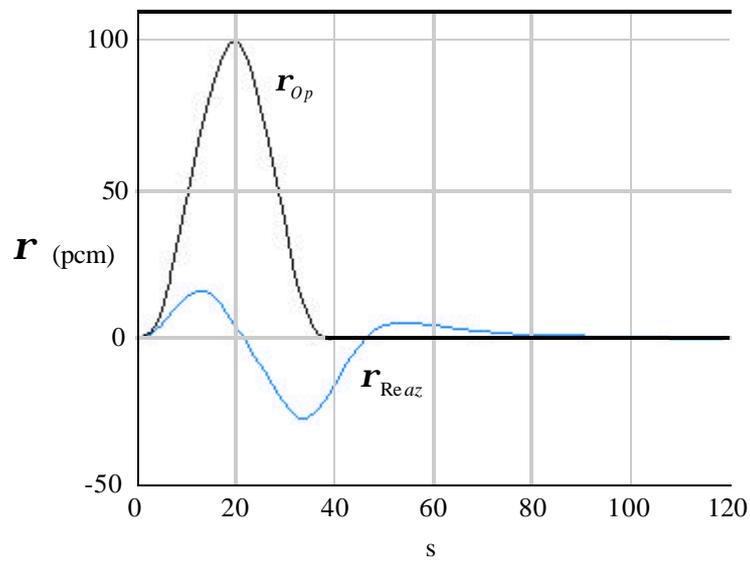
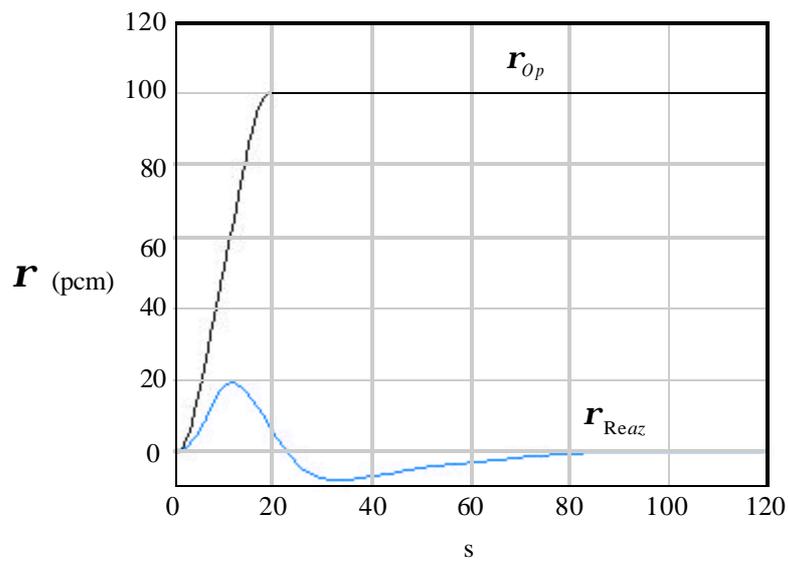
Mettiamoci ora nel secondo caso, che avevamo chiamato caso B, che era caratterizzato dai seguenti valori numerici:

Massa combustibile	82 t	Parametro τ	13,004 s
Massa acqua	11 t	Parametro a_{Fuel}	-2 pcm/°C
Temperatura ingresso in reattore	290°C	Parametro a_{Mod}	-30 pcm/°C
Temperatura uscita dal reattore	326°C	Ritardo nel Core	1 s
Temperatura media iniziale moderatore	308°C	Ritardo in gamba calda	2 s
Temperatura media iniziale combustibile	800°C	Mescolamento in gamba calda	1 s
Potenza iniziale	2800 MW	Ritardo nel generatore	3 s
Portata richiesta	13,3785 t/s	Ritardo in gamba fredda	2 s
Calore specifico acqua	5,8136	Mescolamento in gamba fredda	1 s
Calore specifico combustibile	0,3097	Controllo automatico	Disinserito
Costante temporale combustibile	4,46 s	Parametro proporzionale	0
Costante temporale acqua	11,24 s	Parametro integrale	0
Parametro K	5,69106	Parametro differenziale	0
Parametro F	27,33333	Variazione di potenza	0
Vita media neutronica (Λ)	$5 \cdot 10^{-5} s$	Variazione di reattività	100 pcm
Parametro β	650 pcm	Tempo di perturbazione	20 s

Le condizioni finali che avevamo ricavato erano le seguenti:

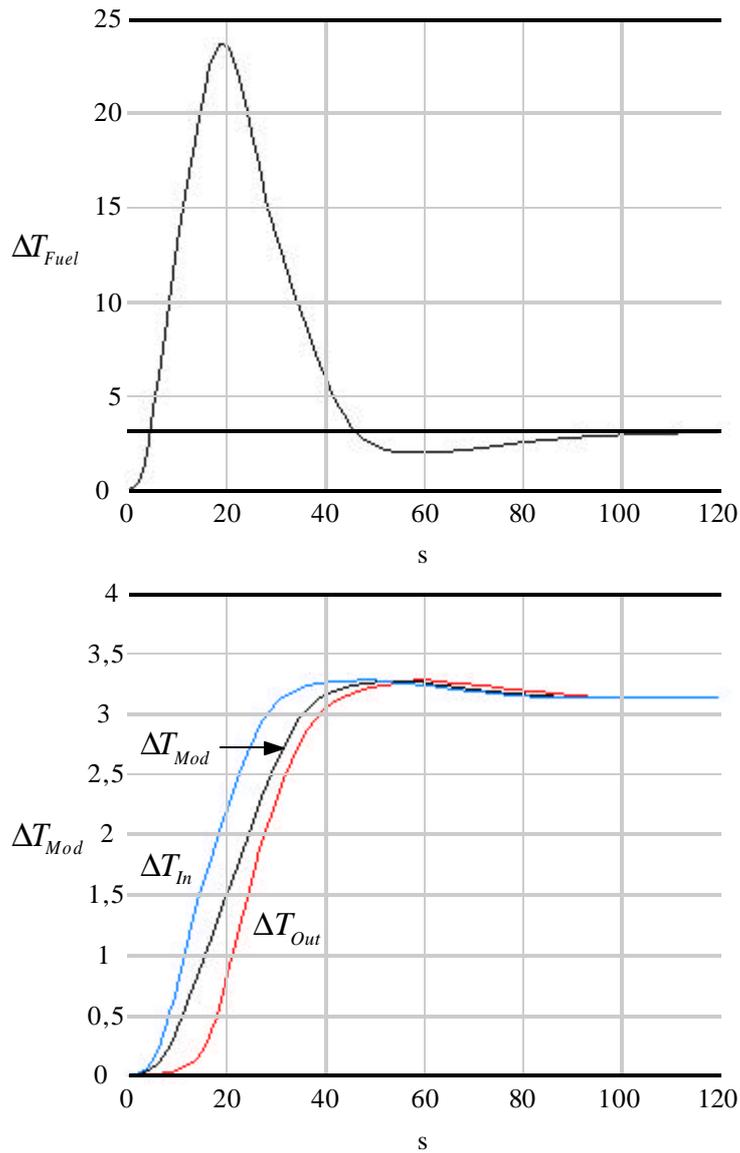
$$\begin{cases} P_{Fin} = 2800 MW \\ \Delta T_{Mod} = \Delta T_{Fuel} = \Delta T_{In} = \Delta T_{Out} = 3,125^\circ C \end{cases}$$

Nei grafici seguenti vediamo l'andamento, anche per questo secondo caso, delle variabili che ci interessano. Nel primo grafico della pagina seguente vediamo l'andamento della reattività: in questo caso dobbiamo considerare due andamenti, quello della reattività imposta dall'operatore e quello della reattività netta agente sul sistema, che ha prima un picco, poi prevale la controreazione e quindi diventa negativa, e infine si assesta sullo zero. Nella seconda immagine della pagina seguente vediamo come si comporta la reattività (sia quella imposta dall'operatore che quella netta) qualora sia data solo un impulso di reattività (della durata di 40 s) e si ritorni poi a zero. Nella terza immagine della pagina seguente vediamo invece l'andamento della variazione di potenza: complessivamente vediamo, come ci aspettavamo, che la potenza è rimasta costante, c'è però un picco che con i precedenti ragionamenti non avevamo individuato.

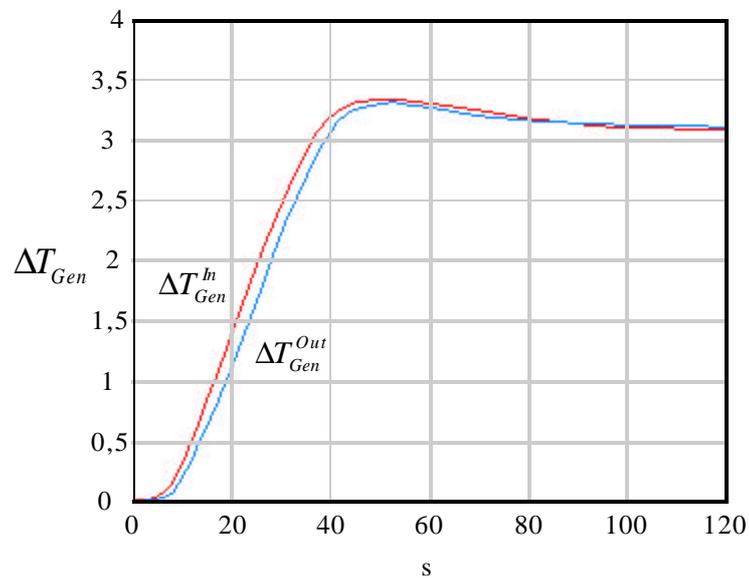


Nel primo grafico della pagina seguente vediamo l'andamento della variazione di temperatura del fuel: osserviamo che il picco di potenza porta anche ad un picco di temperatura nel combustibile. Nel secondo grafico della pagina seguente

ritroviamo le variazioni della temperatura del moderatore (sia la temperatura media che le temperature di ingresso e uscita nel reattore).



Il grafico seguente rappresenta invece l'andamento delle temperature di entrata e di uscita dal generatore di vapore (che all'equilibrio si equipareranno alle temperature del grafico precedente).



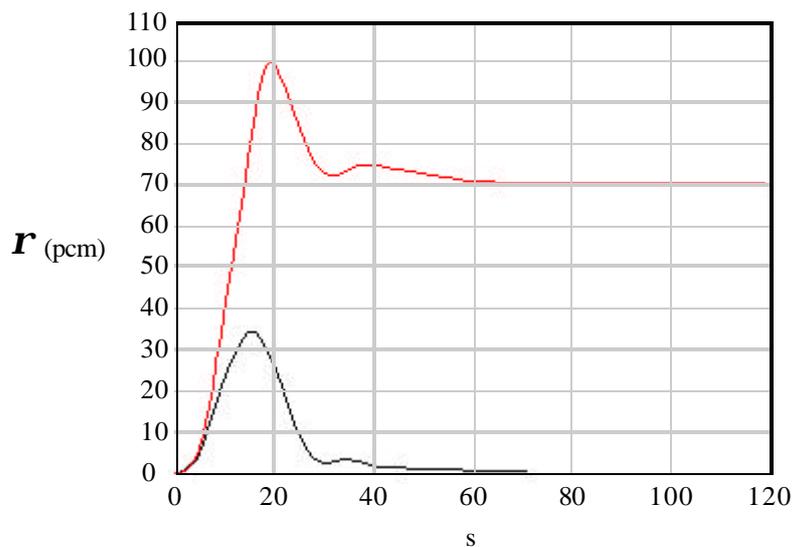
Dobbiamo infine occuparci del terzo caso (il caso C) nel quale si aveva una richiesta di variazione di potenza dall'utenza esterna e si agiva sulla reattività per mantenere minimo il flusso di acqua tra il vessel e il pressurizzatore; i dati numerici relativi a questo caso sono i seguenti:

Massa combustibile	82 t	Parametro τ	13,004 s
Massa acqua	11 t	Parametro a_{Fuel}	-2 pcm/°C
Temperatura ingresso in reattore	290°C	Parametro a_{Mod}	-30 pcm/°C
Temperatura uscita dal reattore	326°C	Ritardo nel Core	1 s
Temperatura media iniziale moderatore	308°C	Ritardo in gamba calda	2 s
Temperatura media iniziale combustibile	800°C	Miscelamento in gamba calda	1 s
Potenza iniziale	2800 MW	Ritardo nel generatore	3 s
Portata richiesta	13,3785 t/s	Ritardo in gamba fredda	2 s
Calore specifico acqua	5,8136	Miscelamento in gamba fredda	1 s
Calore specifico combustibile	0,3097	Controllo automatico	Attivo
Costante temporale combustibile	4,46 s	Parametro proporzionale	-54,67
Costante temporale acqua	11,24 s	Parametro integrale	-100
Parametro K	5,69106	Parametro differenziale	0
Parametro F	27,33333	Variazione di potenza	200 MW
Vita media neutronica (Λ)	$5 \cdot 10^{-5} s$	Variazione di reattività	0
Parametro β	650 pcm	Tempo di perturbazione	20 s

Il fatto che il controllo automatico sia inserito significa che la variazione di reattività imposta dall'operatore è collegata in automatico alla variazione della temperatura del moderatore. Le condizioni finali che avevamo ricavato per questa situazione erano le seguenti:

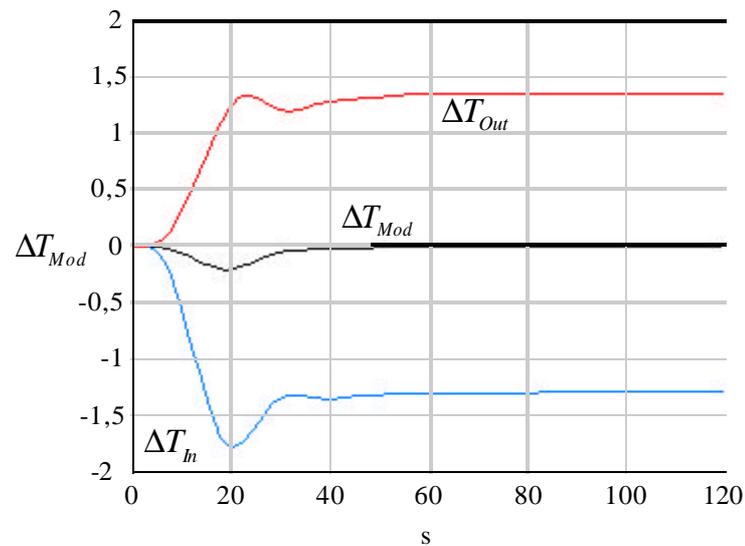
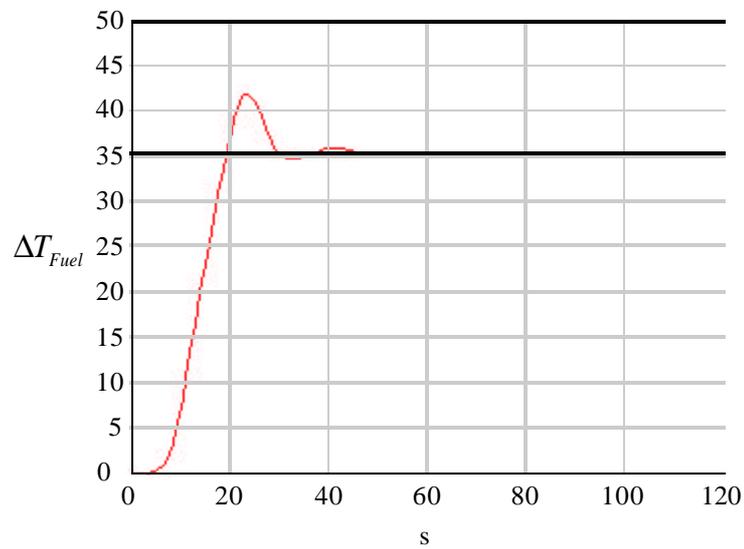
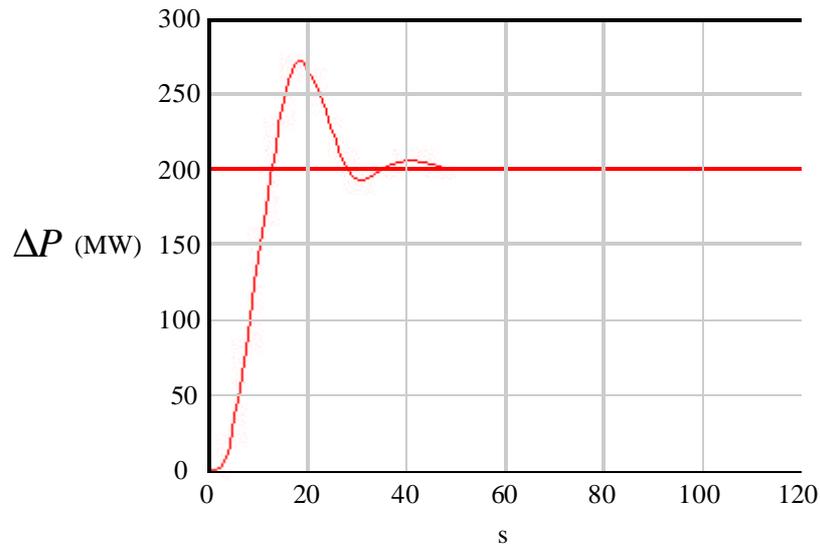
$$\left\{ \begin{array}{l} P_{Fin} = 3000 MW \\ \Delta T_{Mod} = 0^{\circ} C \\ \Delta T_{Fuel} = 35,143^{\circ} C \\ \Delta T_{In} = 1,286^{\circ} C \\ \Delta T_{Out} = -1,286^{\circ} C \\ r_{Indotta} = 70,286 pcm \end{array} \right.$$

Nel grafico seguente vediamo l'andamento della reattività netta agente sul sistema (in nero) e della reattività imposta dal sistema di controllo (in rosso).



Nella prima immagine della pagina seguente vediamo l'andamento della variazione di potenza (anche in questo caso vediamo che prima di stabilizzarsi attorno al valore cercato si presenta un picco). Nella seconda immagine della pagina seguente vediamo l'andamento della variazione di temperatura del fuel che presenta anch'esso un picco (dovuto al picco della potenza). Nella terza immagine della pagina seguente vediamo invece l'andamento della variazione di temperatura del moderatore (media e di ingresso e di uscita nel reattore); osserviamo che la temperatura media cambia

molto poco (una condizione ideale sarebbe quella in cui la temperatura del moderatore non cambiasse per niente) e quindi gli scambi di acqua tra vessel e pressurizzatore sono ridotti al minimo.



Nella prima immagine della pagina seguente, infine, vediamo l'andamento delle variazioni della temperatura del moderatore in entrata ed in uscita da generatore di vapore.

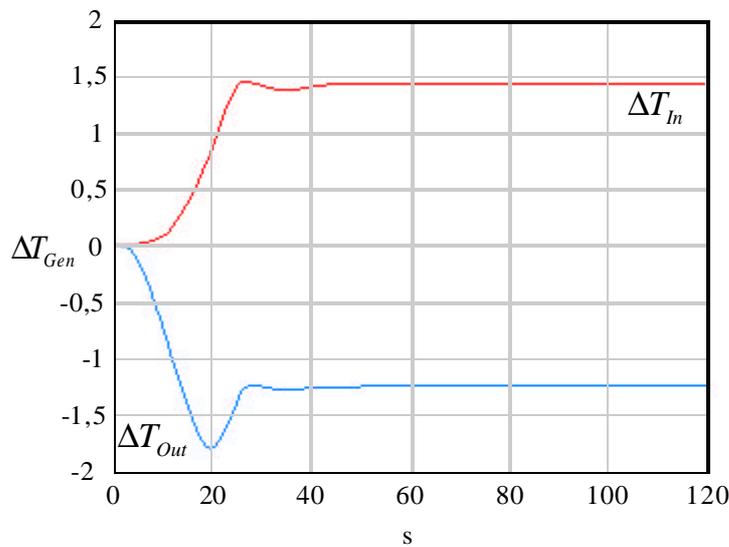
Concludendo dobbiamo soffermarci sul controllo automatico: il controllo automatico che abbiamo descritto in precedenza (che varia la reattività in funzione della variazione della temperatura di ingresso nel reattore) prende il nome di controllo proporzionale (o di tipo P); un controllo di questo tipo si basa sulla seguente relazione:

$$r_{Op} = G\Delta T_{In}(t)$$

dove G è il coefficiente proporzionale del quale si accennava in precedenza. Nel programma con cui si sono effettuate le simulazioni appena viste, in realtà, è stato utilizzato un metodo di controllo un po' più complicato, detto controllo proporzionale- differenziale (PD) che si basa sulla seguente relazione:

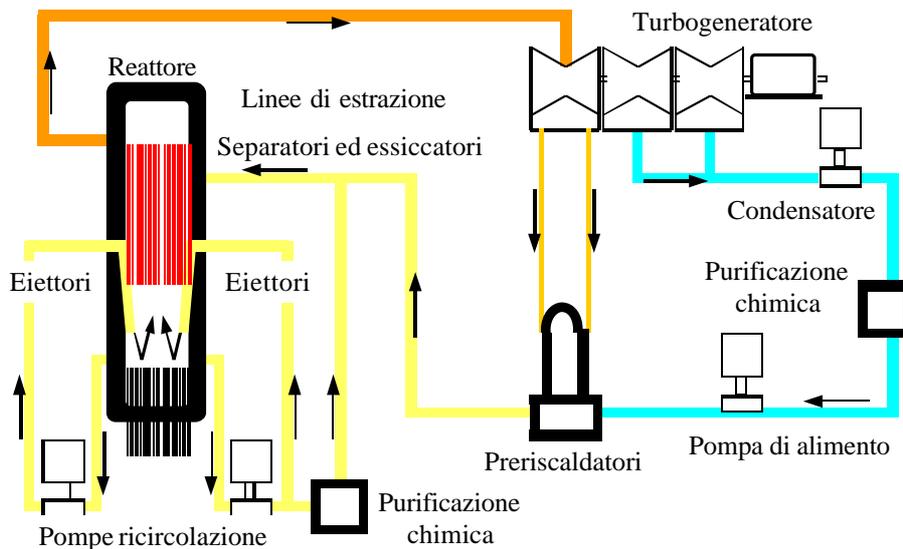
$$r_{Op} = G\Delta T_{In}(t) + G' \dot{\Delta T}_{In}(t)$$

dove G' è il coefficiente derivativo del quale si è accennato. Nella realtà il controllo automatico può essere ancora più complicato perché spesso si tratta di controlli di tipo proporzionale- integrale- differenziale (PID) e quindi sarà necessario introdurre un ulteriore coefficiente G'' che va a moltiplicare l'integrale nel tempo degli scostamenti di temperatura.



Reattori BWR. Barre di controllo.

Dopo aver analizzato i reattori PWR (che attualmente rappresentano circa il 75% del totale) è il momento di vedere l'altra filiera: i reattori BWR (Boiling Water Reactor) (che coprono il 25% della richiesta, pochissimi reattori sono ancora a gas-grafite). Questo tipo di reattori si differenzia dai PWR per l'assenza del generatore di vapore le cui funzioni sono svolte dal reattore stesso: l'acqua entra dunque liquida nel reattore, si scalda lambendo le barre e diventa vapore. Un parametro importante che differenzia i due tipi di reattori è dunque la pressione: nei PWR ci sono pressioni caratteristiche di circa 150 bar mentre nei BWR le pressioni caratteristiche si avvicinano ai 65 bar. Nell'immagine seguente vediamo uno schema semplificato di un reattore BWR



Il più importante fornitore di reattori ad acqua bollente è la società americana General Electric. Altri fornitori sono l'ASEA-ATOM svedese e la KWU tedesca che, seppur licenziataria della General Electric, ha apportato molte modifiche ai progetti di questa società. Nella figura precedente è mostrato il diagramma di flusso di una centrale elettronucleare dotata di BWR. Il generatore nucleare di vapore è composto dal recipiente in pressione, che contiene il reattore vero e proprio, i separatori di vapore e gli eiettori del sistema di ricircolazione. Il fluido termovettore, entrando dalla camera inferiore del recipiente in pressione e attraversando il nocciolo del reattore, raggiunge ben presto la temperatura di saturazione e poi inizia a bollire. Dal nocciolo esce così una miscela acqua vapore, con un titolo di circa il 14%, che viene convogliata, sempre nel recipiente in pressione, attraverso dei separatori. Il vapore separato viene inviato direttamente in turbina, mentre l'acqua viene ricircolata nel nocciolo scendendo attraverso lo spazio anulare compreso tra le pareti del recipiente in pressione e quelle del mantello interno ("down-comer"), dove si miscela con l'acqua di alimento, proveniente dal condensatore, preriscaldata ad un valore opportuno di temperatura. L'acqua viene fatta circolare all'interno del recipiente in pressione attraverso un sistema di ricircolazione esterna, che aziona una serie di pompe a getto. Nei circuiti esterni (in genere 2) circola poco meno della metà della portata che attraversa il nocciolo; l'acqua viene prelevata nella parte inferiore del down-comer. Per gli impianti ASEA-ATOM e KWU le pompe a getto sono state sostituite da pompe assiali vere e proprie, in modo da eliminare completamente i circuiti esterni. Tale soluzione verrà introdotta probabilmente anche nei futuri impianti della General Electric.

I valori numerici che noi considereremo si riferiscono alla centrale nucleare di Caorso.

All'interno del reattore avremo dunque una zona liquida (L) di altezza h , e una zona bifase (B) di altezza $H-h$. I dati necessari per descrivere questo tipo di reattore sono dunque la temperatura dell'acqua di alimento, la temperatura dell'acqua in ingresso (diversa da quella di alimento perché in ingresso c'è anche l'acqua di ricircolo), l'entalpia di ingresso, l'entalpia dell'acqua in uscita dal reattore e che entra nel ricircolo e poi le tre portate: la portata del vapore, la portata di alimento (uguale alla portata del vapore) e la portata del liquido di ricircolo. Siccome la portata complessiva all'interno del reattore deve mantenersi costante (attorno alle 10 t/s, 9830 kg/s per la precisione) si dovrà avere:

$$Q_{Tot} = Q_{vap} + Q_{Liq} \quad (1)$$

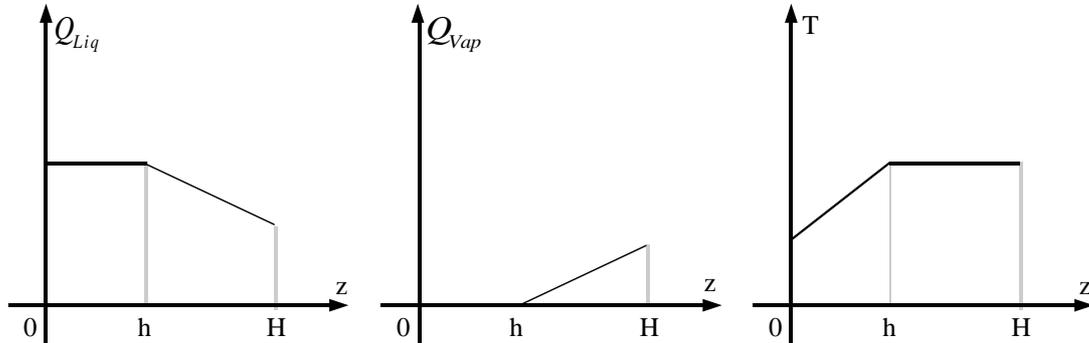
Vediamo ora, dal punto di vista grafico, l'andamento di alcune delle grandezze che ci interessano in funzione dell'altezza delle barre di combustibile (circa 370 cm); nei primi due grafici vediamo l'andamento della portata del liquido e della portata di vapore all'interno del reattore, è ovvio che la somma di tali due grafici deve verificare la relazione precedentemente scritta. Il terzo grafico mostra invece l'andamento della temperatura (sempre in funzione della quota) all'interno del reattore.

L'entalpia sarà necessaria per i bilanci termici, in quanto siamo in presenza sia di liquido che di vapore. Un dato importante è la temperatura di alimento, che tipicamente è:

$$T_{Al} = 217^{\circ}C$$

Conoscendo la pressione e la temperatura di alimento, si ricava l'entalpia di alimento:

$$H_{Al} = 0,94396 \frac{MJ}{kg}$$



Un altro dato molto importante è la potenza complessiva che poniamo:

$$P = 2650 MW$$

Avendo inoltre fissato la pressione, risulta fissata anche la temperatura di saturazione (che è la temperatura raggiunta dall'acqua all'interno del reattore, e dunque anche la temperatura dell'acqua di ricircolo che si miscela a quella di alimentazione):

$$T_{Liq} = 280,79^{\circ}C$$

alla quale compete la seguente entalpia:

$$H_{Liq} = 1,24054 \frac{MJ}{kg}$$

Sarà inoltre necessario conoscere il calore di evaporazione:

$$c_{Evap} = 1,537817 \frac{MJ}{kg}$$

Conoscendo allora l'entalpia del liquido saturo e il calore di evaporazione, si può ricavare l'entalpia relativa al vapore:

$$H_{Vap} = H_{Liq} + c_{Evap} = 2,77797 \frac{MJ}{kg}$$

Per ricavare, a questo punto, la portata del vapore (che è uguale alla portata di alimento), sfruttiamo la seguente relazione:

$$P = Q_{Vap} (H_{Vap} - H_{Al})$$

dalla quale si ricava:

$$Q_{Vap} = \frac{P}{H_{Vap} - H_{Al}} = 1444,92 \frac{kg}{s}$$

Possiamo a questo punto avere una conferma del titolo del vapore che si ottiene in uscita dal reattore, in quanto si avrà:

$$X = \frac{Q_{Vap}}{Q} = 14,699\%$$

Dalla relazione (1), inoltre, si ricava come segue la portata del liquido:

$$Q_{Liq} = Q - Q_{Vap} = 8385,08 \frac{kg}{s}$$

Osserviamo ora che l'acqua in ingresso nel nocciolo è una miscela dell'acqua di alimento e dell'acqua di ricircolo; conoscendo dunque la portata del ricircolo (che abbiamo appena trovato) possiamo sfruttare la seguente equazione di equilibrio:

$$QH_{In} = Q_{Liq}H_{Liq} + Q_{Al}H_{Al}$$

Ricordando poi che la portata di alimento coincide con la portata del vapore, si ottiene l'entalpia di ingresso nel modo seguente:

$$H_{In} = \frac{Q_{Liq} H_{Liq} + Q_{Vap} H_{Al}}{Q} = 1,196616 \frac{MJ}{kg}$$

Conoscendo l'entalpia di ingresso possiamo a questo punto calcolare la temperatura di ingresso nel reattore:

$$T_{In} = 272,3598^{\circ}C$$

Possiamo così calcolare la temperatura media dell'acqua all'interno del reattore nel tratto non bollente:

$$T_{Mod} = \frac{T_{Liq} + T_{In}}{2} = 276,575^{\circ}C$$

Definiamo ora la potenza del tratto non bollente e, tramite differenza con la potenza complessiva, la potenza della zona bifase:

$$\begin{cases} P_{Liq} = Q(H_{Liq} - H_{In}) = 427,98MW \\ P_{Bif} = P - P_{Liq} = 2222,02MW \end{cases}$$

Nell'ipotesi, non strettamente necessaria, che il flusso sia piatto (ovvero che la potenza lineare sia uniforme con la quota), si può scrivere la seguente relazione:

$$\frac{P_{Liq}}{P} = \frac{h}{H}$$

dalla quale si ricava l'altezza del fronte liquido:

$$h = H \frac{P_{Liq}}{P} = 59,8\bar{c}m$$

Supponiamo ora che l'utenza esterna richieda maggiore potenza; per ottenere una potenza maggiore è necessario aprire le valvole per prendere più vapore e questo significa far scendere la pressione. Se la pressione scende l'acqua inizia a bollire prima e quindi l'altezza del fronte liquido si abbassa; la zona liquida, però, è anche la zona dove la moderazione è migliore e quindi, abbassandosi il fronte liquido, diminuisce la zona di moderazione migliore e aumenta la zona di moderazione peggiore; come risultato si avrà un abbassamento della reattività. Riassumendo possiamo dire che il reattore BWR non segue il carico. Siccome il BWR non segue il carico, quando varia la potenza, l'operatore deve intervenire in modo da ritornare in situazione di equilibrio; l'operatore può scegliere due strade per tornare all'equilibrio:

- introdurre direttamente reattività;
- aumentare la portata in modo da riportare l'altezza del fronte non bollente al livello precedente.

Siccome vogliamo tornare all'equilibrio, la reattività totale deve tornare ad essere nulla; per ottenere la relazione che esprime l'annullamento della reattività dobbiamo considerare innanzitutto la seguente relazione:

$$P = Q_{Vap}(H_{Vap} - H_{Al})$$

che possiamo riscrivere nella forma seguente:

$$P = QX(H_{Vap} - H_{Al})$$

Nel bilancio della reattività dobbiamo tener conto della reattività immessa dall'operatore, della variazione di temperatura del fuel e dell'aumento del titolo (che rende meno moderante la zona bifase); la relazione che dobbiamo considerare è allora la seguente:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{Op} + \mathbf{a}_{Fuel} \Delta T_{Fuel} + \mathbf{a}_{Mod} \Delta T_{Mod} + \mathbf{a}_X \Delta X = 0$$

Le variazioni di temperatura nel tratto non bollente ΔT_{Mod} sono assolutamente trascurabili e quindi si può scrivere:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{Op} + \mathbf{a}_{Fuel} \Delta T_{Fuel} + \mathbf{a}_X \Delta X = 0 \quad (2)$$

A questa relazione va poi accoppiata la seguente, che tiene conto del trasporto di calore dal fuel al fluido termovettore:

$$\Delta P = k \Delta T_{Fuel}$$

Sfruttiamo ora una simulazione al calcolatore e, in particolare, soffermiamoci sulla gestione di un reattore BWR caratterizzato dai dati numerici fin qui visti, al quale si richieda un aumento di potenza di 100 MW. Come prima cosa ci occupiamo di un caso 'A' nel quale si voglia riportare il reattore all'equilibrio con la sola variazione di portata. Per poter gestire tale situazione ci conviene considerare la seguente relazione:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{QX}{Q_0 X_0}$$

in caso di variazione di potenza, trascurando infinitesimi di ordine superiore al primo, si ricava:

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{\Delta Q}{Q_0} + \frac{\Delta X}{X_0}$$

ovvero:

$$\frac{\Delta Q}{Q_0} = \frac{\Delta P}{P_0} - \frac{\Delta X}{X_0}$$

In questa situazione, nella quale non si utilizza la reattività imposta dall'operatore, la relazione (2) diventa:

$$\mathbf{a}_{Fuel} \Delta T_{Fuel} + \mathbf{a}_X \Delta X = 0$$

e quindi:

$$\mathbf{a}_{Fuel} \Delta T_{Fuel} = -\mathbf{a}_X \Delta X$$

Siccome anche il coefficiente di reattività del titolo è negativo, il titolo in uscita cala, e quindi si ha:

$$\frac{\Delta Q}{Q} > \frac{\Delta P}{P}$$

Le condizioni iniziali e finali della situazione che verrà simulata sono riportate nella seguente tabella:

Grandezza	Situazione iniziale	Situazione finale	Variazione
P (MW)	2650	2750	100
Q (kg/s)	9830	10676	846
Q_{Vap} (kg/s)	1444,92	1499,44	54,52
X (%)	14,699	14,045	- 0,654
T_{Fuel} (°C)	800	819,59	19,59
T_{Mod} (°C)	276,57	276,76	0,19

Notiamo dunque, come abbiamo anticipato nelle relazioni precedenti che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta P}{P} = 3,77\% \\ \frac{\Delta Q_{Vap}}{Q_{Vap}} = 3,77\% \\ \frac{\Delta Q}{Q} = 8,61\% \end{array} \right.$$

Il titolo X in uscita scende ma la portata di vapore sale per effetto della forte salita della portata totale. Per quanto riguarda il bilancio della reattività, i coefficienti di reattività per variazione di temperatura del fuel, di temperatura del liquido nel tratto non bollente e del titolo in uscita sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{Fuel} = -3 \frac{pcm}{^{\circ}C} \\ \mathbf{a}_{Mod} = -10 \frac{pcm}{^{\circ}C} \\ \mathbf{a}_X = -92,736 \frac{pcm}{\%} \end{array} \right.$$

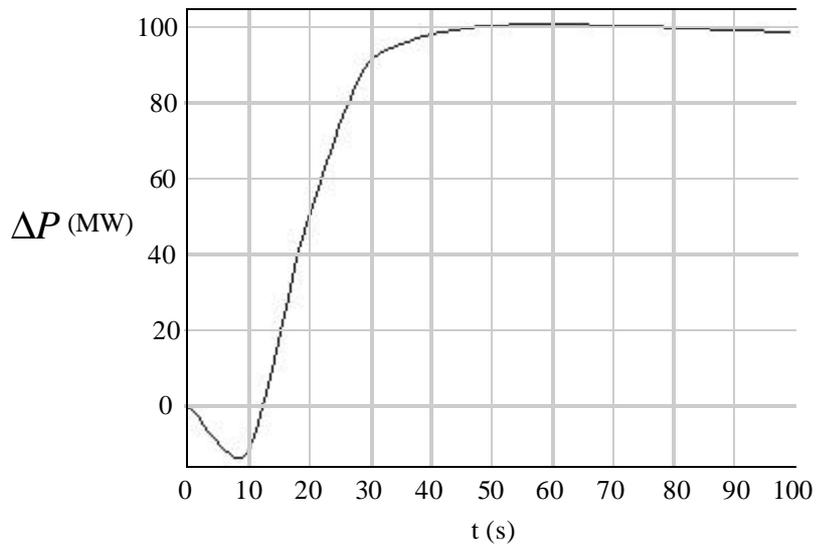
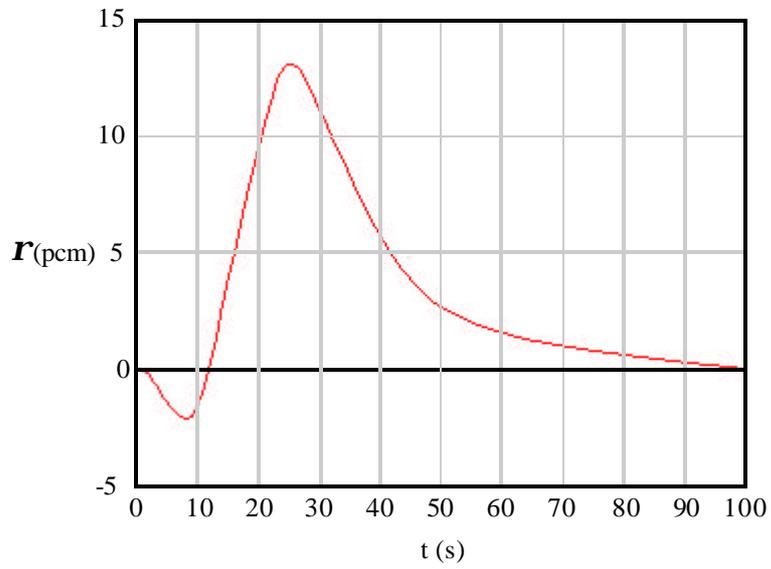
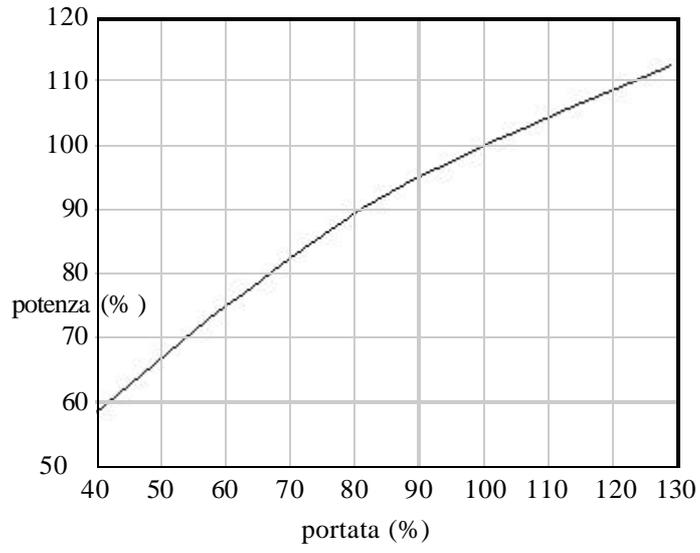
Complessivamente quindi si ha:

$$\mathbf{a}_{Fuel} \Delta T_{Fuel} + \mathbf{a}_{Mod} \Delta T_{Mod} + \mathbf{a}_X \Delta X = 0$$

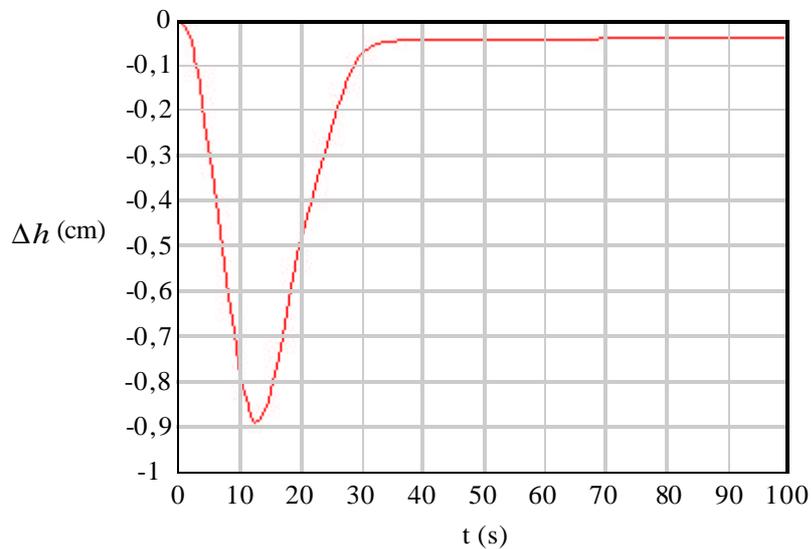
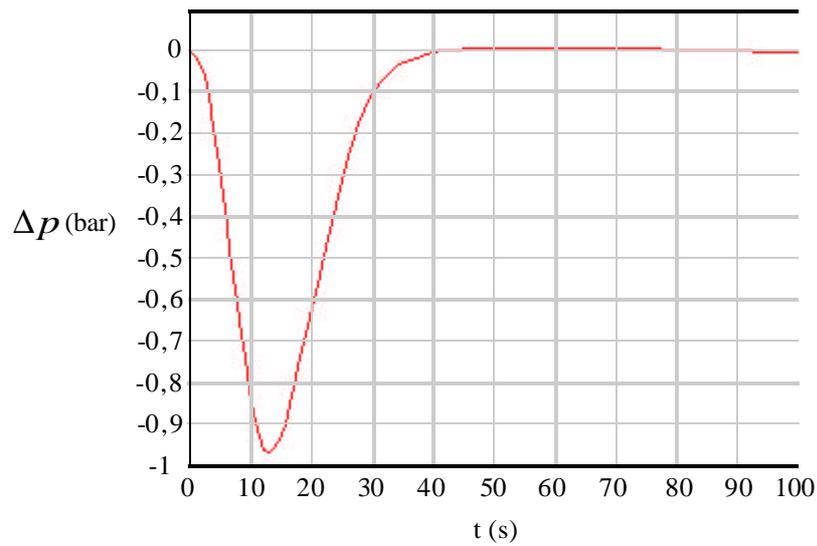
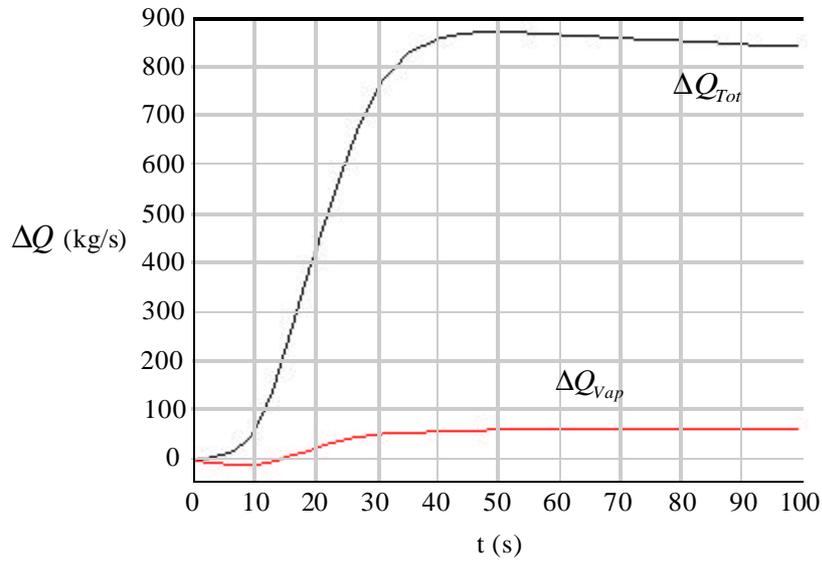
Nei grafici seguenti, derivanti dalla simulazione al calcolatore, vediamo gli andamenti di alcune delle grandezze che interessano: nella prima figura vediamo la curva di carico, ovvero l'andamento della potenza in funzione della portata; da tale grafico si deduce che:

$$\frac{\Delta Q}{Q} \approx 2 \frac{\Delta P}{P}$$

Nella seconda immagine vediamo invece l'andamento in funzione del tempo della reattività: complessivamente la reattività si mantiene nulla in quanto il reattore torna all'equilibrio; durante il transitorio però ci sono oscillazioni che superano anche la decina di pcm. Nella terza immagine vediamo l'andamento della variazione di potenza; entro i primi 20 secondi vediamo un affossamento che si potrebbe evitare con un sistema di controllo più raffinato e non basato esclusivamente sulla portata.



Nel primo grafico seguente vediamo l'andamento temporale della variazione di portata (sia della portata totale che della portata di vapore). Nel secondo grafico vediamo l'andamento della variazione della pressione. Nella terza immagine, infine, vediamo l'andamento della variazione del fronte liquido, ovvero l'andamento della variazione dell'altezza h .



Vediamo ora un caso 'B' nel quale, in risposta alla variazione di potenza richiesta, l'operatore immetta della reattività tramite estrazione di barre di controllo. Invece la portata viene mantenuta costante; ne segue che deve risultare:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta X}{X}$$

ovvero una variazione percentuale nella potenza induce la medesima variazione percentuale nel titolo del vapore; sfruttiamo allora la seguente relazione:

$$r_{Op} + a_{Fuel} \frac{\Delta P}{K} + a_X \Delta X = 0$$

grazie alla quale si ricava:

$$r_{Op} = 112 pcm$$

In realtà una correzione di questo tipo viene fatta in automatico utilizzando dei sensori di pressione che comandano direttamente le barre.

Vediamo infine un caso 'C' nel quale, in risposta alla variazione di potenza richiesta, l'operatore immetta della reattività con la quale intende mantenere costante il titolo; si farà dunque questa volta riferimento alla seguente relazione:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta Q}{Q}$$

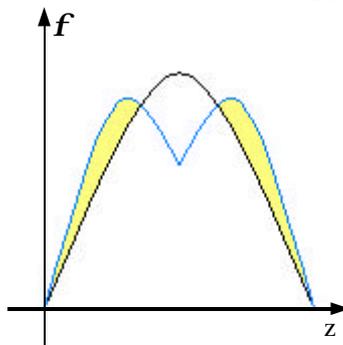
Si avrà dunque:

$$r_{Op} + a_{Fuel} \frac{\Delta P}{K} = 0$$

da cui si ricava:

$$r_{Op} = 60,65 pcm$$

Occupiamoci ora dei sistemi di assorbimento di neutroni che, come abbiamo visto, permettono di controllare la cinetica del reattore. Innanzitutto ricordiamo che, come avevamo visto, in situazione di reattore freddo e pulito, la reattività in eccesso è molto alta (specialmente nel caso dei reattori ad acqua) e quindi bisogna progettare in maniera accurata il sistema assorbente del reattore, per gestire anche questa situazione particolarmente importante. Comprendiamo per esempio facilmente che se un reattore diventa critico con quasi tutte le barre inserite, siamo in una situazione non particolarmente felice perché non rimane molta reattività negativa da inserire per eventuali problemi; se invece il reattore diventa critico solo quando buona parte delle barre è stata estratta, allora le cose vanno meglio perché, in caso di necessità, siamo in presenza di una buona scorta di reattività negativa da utilizzare (la reattività negativa solitamente necessaria per spegnere il reattore si aggira sui 5000 pcm). Per avere un ottimo controllo del reattore, il personale addetto deve conoscere quanta reattività negativa inserisce ogni volta che le barre scendono di un centimetro; siccome poi nei reattori è possibile far scendere gruppi di barre, distinti in barre molto e poco assorbenti ("barre nere" e "barre grigie"), l'ideale sarebbe conoscere la reattività negativa che viene inserita per ogni centimetro di ogni barra, bisognerebbe dunque conoscere una funzione del tipo $\rho(h)$ dove h sia l'altezza delle barre. Tale funzione deve inoltre essere ben bilanciata: è molto utile, infatti, che ci sia un assorbimento maggiore nella zona centrale del reattore rispetto alle estremità superiori ed inferiori del reattore. Nel grafico seguente vediamo l'effetto delle barre sul flusso (il flusso di partenza è disegnato in nero, la sua deformazione dovuta alla barra è rappresentata in blu):



Osserviamo che ci sono due zone (evidenziate in giallo) nelle quali il flusso deformato dalle barre è maggiore del flusso originale; possiamo dunque affermare che l'effetto della barra è duplice: nel caso di figura si ha infatti una depressione del flusso al centro del reattore ed un aumento delle fughe dei neutroni.

Supponendo di avere un flusso del tipo:

$$f \div \sin\left(\frac{p}{H} z\right)$$

l'andamento della reattività in funzione dell'altezza della barra inserita sarà:

$$r(h) = A \int_0^h f^2 dz = A \int_0^h \sin^2\left(\frac{p}{H} z\right) dz = A \left[\frac{1}{2} h - \frac{H}{4p} \sin\left(2p \frac{h}{H}\right) \right]$$

Per ricavare la costante moltiplicativa A osserviamo che si dovrà avere:

$$r(H) = r_0$$

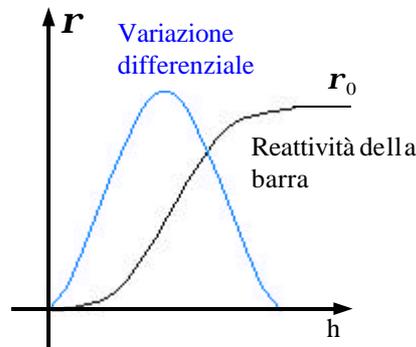
e quindi:

$$A = \frac{2r_0}{H}$$

La funzione complessiva sarà dunque la seguente:

$$r(h) = r_0 \left[\frac{h}{H} - \frac{1}{2p} \sin\left(2p \frac{h}{H}\right) \right]$$

Graficamente si avrà dunque:



Dal grafico si comprende che variazioni unitarie nell'altezza h della barra inserita portano a variazioni differenti nella reattività a seconda della posizione della barra (la variazione differenziale è infatti massima al centro).

Concludiamo con un rapido esempio numerico: nel reattore del CESNEF la reattività di sicurezza era pari al 6,8% mentre la reattività di Cold Clean Rector era del 3%; come conseguenza il reattore diventava critico solo quando le quattro barre erano estratte per metà.

Misura in reattore del flusso neutronico. Il reattore spento. Sorgenti di neutroni.

Nella scorsa lezione abbiamo parlato della calibrazione delle barre di controllo; tale calibrazione si fa ovviamente tramite delle misurazioni all'interno del reattore; vediamo ora come vengono fatte queste misurazioni e, in particolare vediamo come vengono fatte le misurazioni del flusso neutronico (funzione dello spazio e dell'energia). Da un punto di vista tecnico le misurazioni del flusso avvengono per mezzo del metodo dell'attivazione, ovvero sfruttando delle targhette di un certo isotopo (per esempio ^{197}Au) che vengono inserite nel reattore ed irradiate per un periodo di tempo preciso. Questo metodo di misurazione è conveniente per quanto riguarda le piccole dimensioni delle targhette che vengono inserite nel reattore ma è ovviamente sconsigliato perché non permette una valutazione in tempo reale di quello che sta accadendo nel reattore (prima di sapere effettivamente come vanno le cose è necessario irradiare le sonde per un certo periodo, estrarle e fare le misure). L'equazione che viene sfruttata con questo metodo è la seguente:

$$\frac{dN}{dt} = R - \lambda N$$

Ponendo:

$$R = \sigma f N_0$$

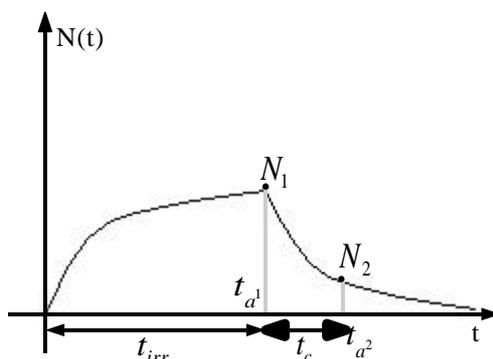
si ottiene:

$$\frac{dN}{dt} = \sigma f N_0 - \lambda N$$

La soluzione di tale equazione è la seguente:

$$N(t) = \frac{\sigma f N_0}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})$$

dove il tempo che appare nell'esponenziale è il tempo di irraggiamento. L'andamento al quale dobbiamo riferirci è rappresentato nell'immagine seguente:



Una volta che l'irraggiamento è finito si avrà dunque, nei due punti indicati sul grafico:

$$\begin{cases} N_1(t) = \frac{\sigma f N_0}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t_{irr}}) e^{-\lambda t_{a1}} \\ N_2(t) = \frac{\sigma f N_0}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t_{irr}}) e^{-\lambda t_{a1}} e^{-\lambda t_c} \end{cases}$$

Il numero di nuclei decaduti sarà allora il seguente:

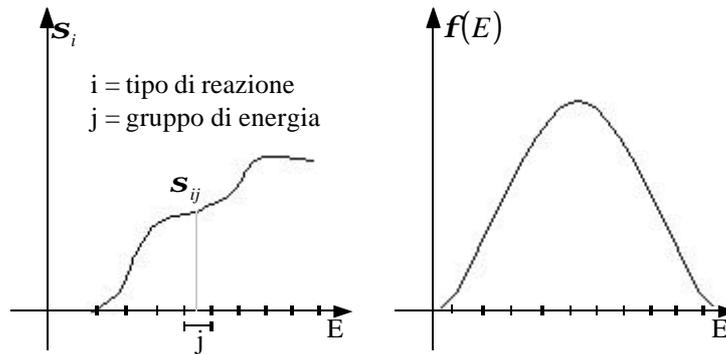
$$N_1(t) - N_2(t) = \frac{\sigma f N_0}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t_{irr}}) e^{-\lambda t_{a1}} (1 - e^{-\lambda t_c}) = \Delta N$$

Il conteggio dei decadimenti γ durante il tempo t_c si ottiene allora utilizzando la probabilità di decadimento γ e la probabilità di misura dei γ nel modo seguente:

$$C_g(t_c) = p_g e^{-\lambda t_c} \Delta N$$

Con questa relazione abbiamo legato il conteggio dei decadimenti γ al flusso che in questo modo viene misurato; ovviamente il tipo di sonde che vengono utilizzate dipende dal range di energia del quale si vuole studiare il flusso. Le reazioni (n, γ) ed (n,f) vengono utilizzate quando ci si occupa della zona termica mentre per misure del flusso epitermico (ovvero della zona di rallentamento) e del flusso veloce, si utilizzano reazioni a soglia come (n, α), (n,p) ed (n,2n). In realtà gli addetti ai calcoli hanno a disposizione delle biblioteche di sezioni d'urto che vengono suddivise in gruppi; si

suddivide poi anche l'intervallo energetico in gruppi (come si può notare anche nelle due immagini seguenti) che possono essere anche diverse centinaia (si arriva fino a 620 gruppi).



Una volta operata tale suddivisione in gruppi si deve fare la seguente trasformazione:

$$\{s\mathbf{f}\} \rightarrow \left\{ \int s(E)\mathbf{f}(E)dE \right\}$$

Usando però le biblioteche di sezioni d'urto si deve fare la seguente ulteriore trasformazione:

$$\left\{ \int s(E)\mathbf{f}(E)dE \right\} \rightarrow \left\{ \sum_j s_{ij}\mathbf{f}_j \right\}$$

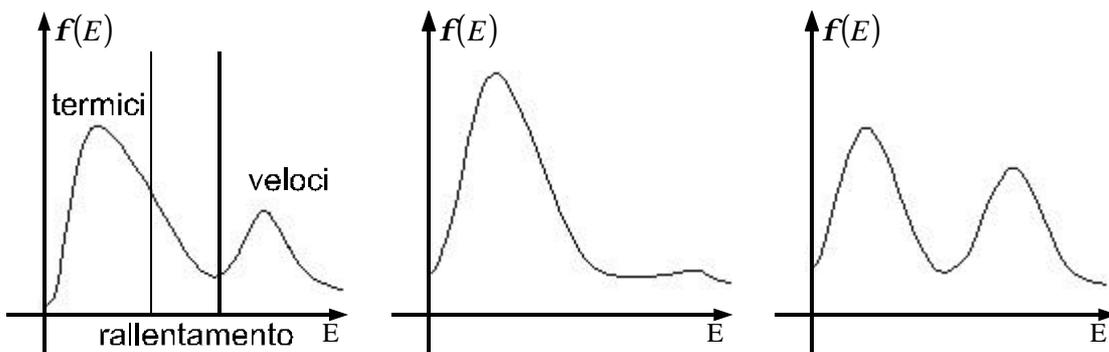
dove sia:

$$\mathbf{f}_j = \int_{E_{j-1}}^{E_{j+1}} \mathbf{f}(E)dE$$

Dal conteggio si otterrà dunque:

$$C_i = \sum_j s_{ij}\mathbf{f}_j$$

Se il numero di gruppi fosse N e si avessero N rivelatori, ognuno sensibile ad un solo gruppo, il problema sarebbe determinato; dato l'alto numero di gruppi questo non è possibile; solitamente si lavora con al massimo 30 rivelatori (che però non rispondono ad un unico gruppo ma presentano risposte diverse con il variare dell'energia) e quindi il problema è sottodimensionato ed occorre avere un'informazione a priori: $\phi(E)$. Nelle immagini seguenti vediamo alcuni grafici approssimati sull'andamento del flusso in funzione dell'energia.



Nel secondo e nel terzo grafico vediamo l'andamento del flusso rispettivamente in vicinanza del riflettore e nella zona centrale di un grosso reattore. In base a quanto detto, le misure che vengono fatte ci permettono di avere una conoscenza solo approssimata del flusso. La misura in effetti servirebbe per decidere se sono necessarie delle correzioni; in effetti possiamo considerare la seguente espressione che si riferisce al flusso vero (che però noi non conosciamo nei dettagli):

$$M_i = \sum_j s_{ij}\mathbf{f}_j$$

mentre le misure che noi facciamo sono riferite solo ad una approssimazione del flusso, in particolare facciamo riferimento ad una approssimazione di livello 0 del flusso:

$$C_i^{(0)} = \sum_j s_{ij}\mathbf{f}_j^{(0)}$$

Ovviamente i valori espressi dalle ultime due relazioni saranno diversi e quindi possiamo definire la seguente relazione:

$$R_i^{(0)} = \frac{C_i^{(0)}}{M_i}$$

dalla quale ricaviamo poi la seguente espressione di quello che può essere considerato una specie di errore quadratico globale:

$$Q^{(0)} = \sum_{i=1}^N (R_i^{(0)} - 1)^2$$

Consideriamone ora la derivata:

$$\frac{dQ}{d\mathbf{f}_j^{(0)}} = 2 \sum_{i=1}^N (R_i - 1) \frac{dR_i}{d\mathbf{f}_i^{(0)}} = 2 \left[\sum_{i=1}^N \frac{R_i \mathbf{s}_{ij}}{M_i} - \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{s}_i}{M_i} \right]$$

Se l'informazione a priori sul flusso fosse stata perfetta tale derivata sarebbe stata nulla; così ovviamente non è. Costruiamo dunque un fattore di modifica del flusso, gruppo per gruppo:

$$F_j = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{R_i}{M_i} \mathbf{s}_{ij}}{\sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{s}_{ij}}{M_i}}$$

Preso dunque il flusso di partenza, si potrà modificare nel modo seguente:

$$\mathbf{f}^{(1)} = \frac{\mathbf{f}_j^{(0)}}{F_j}$$

Reiterando poi il procedimento si può ulteriormente correggere il flusso fino a quando Q non è circa uguale ad N: l'errore quadratico sperimentale; si parla dunque di aggiustamento del flusso.

Passiamo ora a parlare delle sorgenti di neutroni e, per fare questo, dobbiamo concentrarci sul reattore spento. Mettiamoci dunque in condizione di reattore spento pronto a partire, ovvero con k inferiore ad 1 (poniamo che sia circa 0,9), barre tutte inserite e con la massa di caricamento superiore alla massa critica; dobbiamo ora chiederci se in un reattore spento ci siano o meno neutroni perché tutti i discorsi sulla cinetica che abbiamo fatto si basavano sulla concentrazione di neutroni: se non ci sono neutroni il reattore non si accende. In effetti un reattore spento presenta anch'esso al suo interno una certa densità di neutroni: ci sono ad esempio i neutroni dovuti alle radiazioni cosmiche (che però sono molto pochi perché il riflettore e lo schermo limitano le fughe dei neutroni e non fanno entrare quelli da fuori); inoltre all'interno del reattore ci sono gli isotopi ^{235}U e ^{238}U che vanno incontro al decadimento α e quindi potrebbero indurre reazioni del tipo (α, n) , tale reazione è però una reazione a soglia alta e quindi i neutroni originatisi in questo modo sono ancora molto pochi; ci sono infine i neutroni dovuti alle fissioni spontanee, per le quali ^{235}U e ^{238}U hanno tempi di dimezzamento, rispettivamente, di $\sim 10^{17}$ e 10^{15} anni). Sofferamoci solo sulle fissioni spontanee dell' ^{238}U (che è presente in reattore con percentuali tra il 96% e il 97%); per ogni grammo di questo isotopo si avrà il seguente numero di fissioni spontanee al secondo:

$$\frac{N_{fsp}}{gs} = 1,45 \cdot 10^{-2}$$

Nei grossi reattori si può arrivare ad avere anche 80 t di ^{238}U e quindi si avrà il seguente numero di reazioni spontanee al secondo:

$$\frac{N_{fsp}}{s} = 1,1 \cdot 10^6$$

Ricordando ora il valore del termine ν (circa pari a 2,5) possiamo dire che il numero dei neutroni dovuti alla fissione spontanea in ogni secondo è il seguente:

$$\frac{n}{s} \approx 3 \cdot 10^6$$

Pensiamo ora al seguente volume totale per il reattore:

$$V = 25m^3$$

e definiamo nel modo seguente il termine Q:

$$Q = \frac{n}{s} \cdot \frac{1}{V} = 0,12 \frac{\text{neutroni}}{\text{cm}^3 \text{s}}$$

Possiamo ora scrivere in maniera completa l'equazione relativa alla cinetica dei neutroni:

$$\dot{n} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{b}}{\Lambda} n + \mathbf{I}C + Q$$

In effetti non ci eravamo mai occupati di questa forma completa perché, quando il reattore è acceso, si ha:

$$n \gg Q$$

I neutroni dovuti alla fissione spontanea sono però troppo pochi per far partire il reattore; si parla allora di reattore sottocritico in equilibrio (RSCE). Siccome siamo in equilibrio si avrà:

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{b}}{\Lambda} n + \mathbf{I}C + Q = 0$$

Essendo però:

$$\frac{\mathbf{b}}{\Lambda} n = \mathbf{I}C$$

si ricava:

$$\frac{\mathbf{r}}{\Lambda} n + Q = 0$$

Siccome la reattività a reattore spento è negativa si può riscrivere come segue:

$$n_{eq} = \frac{Q\Lambda}{-\mathbf{r}}$$

vediamo dunque che, in assenza del termine Q, il reattore sarebbe pronto a partire ma, effettivamente, non partirebbe. Usando i valori numerici visti in precedenza si avrà:

$$n_{eq} = \frac{(0,12)(50 \cdot 10^{-6})}{0,1} \approx 5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{neutroni}}{\text{cm}^3}$$

da cui si ricava il seguente valore di flusso neutronico:

$$\mathbf{f}_{eq} = n_{eq} v = (5 \cdot 10^{-5})(2,2 \cdot 10^5) = 11 \frac{\text{neutroni}}{\text{cm}^2 \text{s}}$$

Fino a questo punto osserviamo che, in effetti, i neutroni da fissione spontanea sarebbero sufficienti per far partire il reattore (in contraddizione con quanto affermato in precedenza), nel seguito vediamo invece perché questo è praticamente impossibile. L'ordine di grandezza della sensibilità delle camere a fissione (che misurano istantaneamente il flusso) è il seguente:

$$S = 5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{cps}}{\mathbf{f}}$$

Il conteggio iniziale del flusso è il seguente:

$$C_{eq} = 5 \cdot 10^{-3}$$

Bisogna poi ricordare che ogni numero di origine statistica è afflitto da un'incertezza del tipo

$$G \pm \sqrt{G}$$

e quindi che questo vale anche per i conteggi; in particolare, aspettandosi 10 conteggi si ha un errore statistico di circa il 30%.

$$\frac{\sqrt{10}}{10} \approx 30\%$$

Osserviamo quindi che i neutroni da fissione spontanea non sono sufficienti non perché il reattore non si accende, ma perché si accende in modo non controllabile con precisione, e quindi non sicuro; per questo motivo all'interno del reattore sono presenti 6 o 7 sorgenti di neutroni, solitamente di Antimonio- Berillio che sfruttano reazioni (γ, n).

Sorgenti di neutroni.

Per iniziare vediamo un estratto da un articolo sui reattori BWR.

ABSTRACT

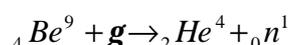
A description of the neutron monitoring system used in General Electric Boiling Water Reactor is presented.

The sensors used for the system are all located within the physical boundaries of the fueled region of the reactor core. Three types of miniature fission chambers are mounted vertically in the space between fuel bundles.

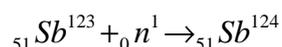
Signal conditioning equipment and trip and alarm function are described. Redundancy is discussed as it is used to assure safe operation in case of failed and/or bypassed components.

NEUTRON SOURCES

Several neutron emitting antimony-beryllium sources are located within the core to provide at least 3 counts per second (CPS) in each source range monitor channel in the cold, xenon free, fully shutdown condition prior to initial power operation. Typical location of these sources is shown in Figure 1. The neutrons are emitted by the photo neutron reaction shown below.



The gammas are provided by radioactive antimony (Sb^{124}). The above requirement will continue to be met during routine reactor operation by reactivation of the radioactive source (Sb^{124}) through capture of reactor neutrons by the following reaction.



Operation of the reactor at full power for approximately 10 days (or the equivalent of 10 full power days) every sixty calendar days will maintain the source above the design level.

For a fixed number of detectors the number of sources required to give 3 counts/second at each SMR channel varies as a function of reactor size. For the present General Electric designs this number varies from 3 to 7 sources. The two antimony rods in each source are 18 inches long and are irradiated such that the Sb^{124} gamma activity (excluding Sb^{122} activity) is not less than 670 curies nor greater than 900 curies after irradiation. This activity is equivalent to 335 to 450 curies per gamma source at the time of reactor startup. The antimony rod is commercial grade, ASTM B737-52, Grade A, encased in a welded stainless steel tube. The welds are radiographically tested and the final seal weld is performed in a helium atmosphere. The finally assembled source is leak tested using a helium mass spectrometer to a maximum allowable leak rate of 10^{-8} STP cc/sec. In a vacuum of 20 microns of mercury.

SRM DETECTORS

The SMR detectors are miniature fission chambers which are operated in the pulse counting mode. Discrimination against gamma pulses is accomplished by pulse height selection. The detector sensitivity is designed to provide monitoring capability from the neutron level found in the cold, clean, fully shutdown core to a level compatible with the Intermediate Range Monitoring System.

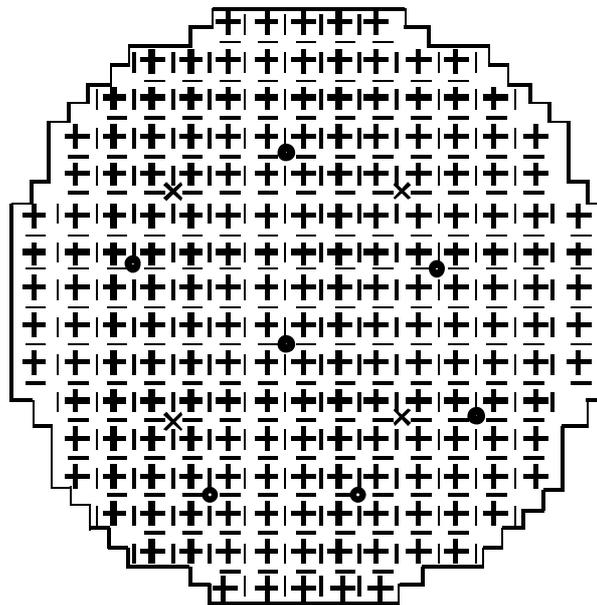
Some important characteristics of the SMR detectors are given in the table below.

SRM Fission Chamber	
Electrode Coating	U_3O_8 with uranium enriched to >90% ^{235}U
Neutron Counting Sensitivity	5×10^{-4} cps/nv minimum to $2,5 \times 10^{-3}$ cps/nv maximum in an equivalent BWR flux at 4 turns os SMR discriminator dial
Neutron Flux, Maximum Storage	1×10^{10} nv
Gamma, Maximum Operating	$2,5 \times 10^7$ R/hr
Operating Voltage Plateau	200 to 700 volts
Temperature, Maximum	540 °C
Fill Gas	Argon
Sensitive Lenght	1.00 in
Case and Collector Material	Titanium
Collector to Emitter Insulator	Alumina
End Seal	Titanium and Fosterite

The fission counter is attached to a low loss quartz fiber insulated transmission cable which is terminated with a connector. The detector cable is connected below the reactor vessel to a triple-shielded cable which carries the electrical output to the monitoring circuitry.

Characteristics of the assembly are listed below:

SRM Detector Assembly (Fission Chamber and Cable)	
Assembly Temperature Maximum	320°C
Neutron Exposure	10 ¹⁹ nvt
Assembly Diameter	0,265 inch maximum (including isolating insulation)
Assembly External Material	AISI 304 stainless steel
Ground Isolating Insulation (Entire Assembly)	Alumina
Cable Insulation	Quartz fiber
Cable Termination	HN (female) connector
Lenght of Assembly	50feet maximum



× SOURCE RANGE MONITOR DETECTORS
● NEUTRON – EMITTING SOURCES

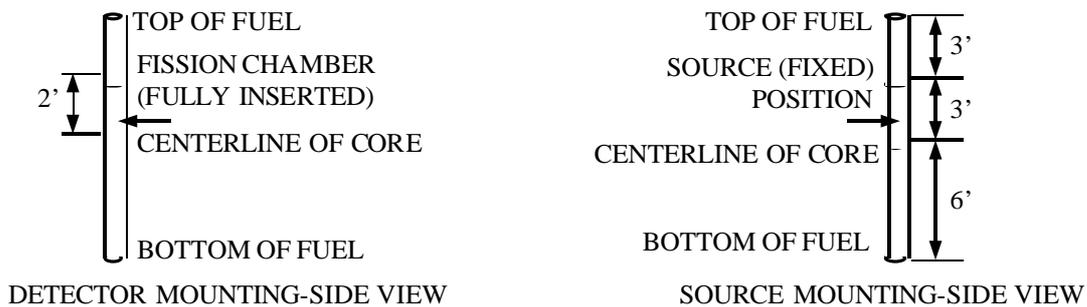


FIGURE 1. TYPICAL SRM-DETECTOR AND SOURCE LOCATIONS– TOP VIEW

Torniamo ora ad occuparci della cinetica del reattore in presenza delle sorgenti di neutroni; il sistema che governa la cinetica diventa il seguente:

$$\begin{cases} \dot{n} = \frac{r - b}{\Lambda} n + l c + Q & (1) \\ \dot{c} = \frac{b}{\Lambda} n - l c & (2) \end{cases}$$

dove Q è la densità di neutroni iniettata dalle sorgenti. Quando siamo in situazione di equilibrio sottocritico, continua a valere la relazione

$$\frac{\mathbf{b}}{\Lambda} n_0 = \mathbf{l} c_0 \quad (3)$$

e anche

$$\dot{n} = 0$$

Combinando dunque queste due relazioni con la prima equazione del sistema si ottiene:

$$\frac{\mathbf{r}}{\Lambda} n_0 + Q = 0$$

dalla quale si ricava:

$$n_{Eq} = -\frac{Q\Lambda}{\mathbf{r}} \quad (4)$$

Un altro modo per arrivare alla medesima conclusione prevede di partire dalla seguente equazione:

$$\dot{n} = (\mathbf{n}\Sigma_f - \Sigma_a)\mathbf{f} + Q$$

che può essere riscritta nel modo seguente:

$$\dot{n} = \frac{(\mathbf{n}\Sigma_f - \Sigma_a)\Sigma_a\mathbf{f}}{\Sigma_a} + Q = \frac{(k-1)n}{l} + Q$$

In caso di equilibrio si ottiene:

$$\frac{(k-1)n}{l} + Q = 0$$

ovvero:

$$n_{Eq} = -\frac{Q\Lambda}{\mathbf{r}}$$

Ricordando poi le due seguenti relazioni di definizione di Λ e ρ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda = \frac{l}{k} \\ \mathbf{r} = \frac{k-1}{k} \end{array} \right.$$

si torna ad ottenere la relazione (4).

Applichiamo ora la trasformata di Laplace alle equazioni del sistema composto dalle relazioni (1) e (2) e otteniamo, riordinando i termini:

$$\left\{ \left(s + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{b}}{\Lambda} \right) \bar{n} - \mathbf{l} \bar{c} = n_0 + \frac{Q}{s} \right. \quad (5)$$

$$\left. \frac{\mathbf{b}}{\Lambda} \bar{n} - (s + \mathbf{l}) \bar{c} = -c_0 \right. \quad (6)$$

L'equazioni di secondo grado in s che se ne ricava è quella che abbiamo già incontrato precedentemente:

$$s^2 + \left(\frac{\mathbf{b} - \mathbf{r}}{\Lambda} + \mathbf{l} \right) s - \frac{\mathbf{r} \mathbf{l}}{\Lambda} = 0$$

I valori approssimati delle radici di questa equazione, qualora ρ sia minore di β , saranno i seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 \cong \frac{\mathbf{l} \mathbf{r}}{\mathbf{b} - \mathbf{r}} \\ s_2 \cong \frac{\mathbf{r} - \mathbf{b}}{\Lambda} \end{array} \right.$$

Ovviamente se ρ è negativo le due radici saranno anch'esse negative mentre se ρ è positivo si avranno due radici di segno opposto. Qualora il reattore fosse critico, l'equazione di secondo grado in s sarebbe la seguente:

$$s^2 + \left(\frac{\mathbf{b} - \mathbf{r}}{\Lambda} + \mathbf{l} \right) s = 0$$

e quindi le due radici sarebbero:

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -\left(\frac{\mathbf{b} - \mathbf{r}}{\Lambda}\right) \end{cases}$$

Una volta trovate le due radici il sistema delle equazioni (5) e (6) fornisce i seguenti risultati:

$$\begin{cases} \bar{n} = \frac{\left(n_0 + \frac{Q}{s}\right)(s+1) + \mathbf{l}c_0}{(s-s_1)(s-s_2)} \\ \bar{c} = \frac{\left(s + \frac{\mathbf{b} - \mathbf{r}}{\Lambda}\right)c_0 + \frac{\mathbf{b}}{\Lambda}\left(n_0 + \frac{Q}{s}\right)}{(s-s_1)(s-s_2)} \end{cases}$$

Se il reattore è in equilibrio vale la solita relazione (3) e quindi il sistema appena scritto diventa:

$$\begin{cases} \bar{n} = \frac{n_0\left(1 + \mathbf{l} + \frac{\mathbf{b}}{\Lambda}\right)}{(s-s_1)(s-s_2)} + \frac{Q(s+1)}{s(s-s_1)(s-s_2)} \\ \bar{c} = \frac{c_0\left(1 + \frac{\mathbf{b} - \mathbf{r}}{\Lambda} + \mathbf{l}\right)}{(s-s_1)(s-s_2)} + \frac{\mathbf{b}}{\Lambda}Q \frac{1}{s(s-s_1)(s-s_2)} \end{cases}$$

Le equazioni di quest'ultimo sistema sono entrambe composte, al secondo membro, da due addendi, il primo dei quali l'abbiamo già incontrato, il secondo è invece nuovo. Antitrasformiamo ottenendo:

$$\begin{cases} n = n_0 \left[\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b} - \mathbf{r}} e^{s_1 t} - \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{b} - \mathbf{r}} e^{s_2 t} \right] + Q \left[\frac{\mathbf{l}}{s_1 s_2} + \frac{s_1 + \mathbf{l}}{s_1 (s_1 - s_2)} e^{s_1 t} - \frac{s_2 + \mathbf{l}}{s_2 (s_1 - s_2)} e^{s_2 t} \right] \\ c = c_0 \left[\left(1 + \frac{\mathbf{l}\Lambda}{\mathbf{b} - \mathbf{r}}\right) e^{s_1 t} - \frac{\mathbf{l}\Lambda}{\mathbf{b} - \mathbf{r}} e^{s_2 t} \right] + \frac{\mathbf{b}}{\Lambda} Q \left[\frac{1}{s_1 s_2} + \frac{e^{s_1 t}}{s_1 (s_1 - s_2)} - \frac{e^{s_2 t}}{s_2 (s_1 - s_2)} \right] \end{cases}$$

Vediamo ora tre casi diversi a seconda del valore del termine ρ .

- Supponiamo inizialmente che ρ sia negativo (come abbiamo visto in precedenza questo implica che le due radici dell'equazione di secondo grado in s siano entrambe negative). Dimentichiamoci del transitorio iniziale e buttiamo via gli esponenziali, dell'ultimo sistema scritto rimarrà:

$$\begin{cases} n \cong Q \frac{\mathbf{l}}{s_1 s_2} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} c \cong \frac{\mathbf{b}}{\Lambda} Q \frac{1}{s_1 s_2} \end{cases} \quad (8)$$

Ricordiamo ora la proprietà delle equazioni di secondo grado del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

secondo la quale si ha:

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Applicando tale proprietà al caso in analisi si ottiene:

$$s_1 s_2 = -\frac{\mathbf{r}\mathbf{l}}{\Lambda}$$

Combinando dunque quest'ultima relazione con le espressioni (7) e (8) si ottiene:

$$\begin{cases} n \cong -\frac{Q\Lambda}{\mathbf{r}} \\ c \cong -\frac{Q\Lambda}{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{l}\Lambda} \end{cases}$$

Si è dunque ristabilito il rapporto di equilibrio:

$$\frac{\mathbf{b}}{\Lambda} n = \mathbf{I} c$$

- Mettiamoci ora nel caso in cui ρ sia nullo. L'equazione di secondo grado in s diventerà, in questo caso:

$$s^2 + \left(\frac{\mathbf{b}}{\Lambda} + \mathbf{I} \right) s = 0$$

le cui radici sono:

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -\left(\frac{\mathbf{b}}{\Lambda} + \mathbf{I} \right) \end{cases}$$

Ricordiamo ora la proprietà secondo la quale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-xt} = 1 - xt$$

avremo, dimenticandoci del transitorio iniziale e quindi buttando via gli esponenziali:

$$\begin{cases} n \cong n_0 + Q \left[\frac{\mathbf{I}}{s_1 s_2} - \frac{\mathbf{I}}{s_1 s_2} (1 + s_1 t) \right] = n_0 + Q \frac{\mathbf{I}}{s_1 s_2} (1 - 1 - s_1 t) = n_0 - Q \frac{\mathbf{I}}{s_2} t = n_0 + Q \frac{\mathbf{I} \Lambda}{\mathbf{b} + \mathbf{I} \Lambda} t \\ c \cong c_0 + \frac{\mathbf{b}}{\Lambda} Q \left[\frac{1}{s_1 s_2} - \frac{1 + s_1 t}{s_1 s_2} \right] = c_0 - \frac{\mathbf{b}}{\Lambda} Q \frac{t}{s_2} = c_0 - Q \frac{\mathbf{b}}{\Lambda} \cdot \frac{t}{\frac{\mathbf{b}}{\Lambda} + \mathbf{I}} = c_0 + Q \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{I} \Lambda} \cdot \frac{\Lambda \mathbf{I}}{\mathbf{b} + \mathbf{I} \Lambda} t \end{cases}$$

Abbiamo dunque trovato due andamenti lineari:

$$\begin{cases} n \div Q \frac{\mathbf{I} \Lambda}{\mathbf{b} + \mathbf{I} \Lambda} t \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} c \div \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{I} \Lambda} \left(Q \frac{\Lambda \mathbf{I}}{\mathbf{b} + \mathbf{I} \Lambda} t \right) \end{cases} \quad (10)$$

- Qualora, infine, il termine ρ fosse positivo e Q debole, si tornerebbe ai comportamenti già noti.

La sorgente di neutroni si fa sentire per flussi dell'ordine di 10^3 , che corrisponde ad una potenza dell'ordine dei Watt; già ad un kW la sorgente può sempre essere considerata trascurabile. Rigorosamente dobbiamo precisare che, a potenza costante, ρ deve essere mantenuto inferiore allo zero per via della sorgente.

Le equazioni che abbiamo trovato sono ancora del tipo che ci portano alla matrice esponenziale; le quantità in incognita sono ancora n e c e la relazione matriciale che si costruisce è la seguente:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{b}}{\Lambda} \right) & \mathbf{I} & 1 \\ \left(\frac{\mathbf{b}}{\Lambda} \right) & -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_0 \\ c_0 \\ Q \end{bmatrix}$$

Il fatto di aver ritrovato la matrice esponenziale ci permette di fare alcune simulazioni al calcolatore; vediamo dunque un primo caso caratterizzato da seguenti valori:

$$\begin{cases} \Lambda = 0,01 \\ \mathbf{r} = -0,1 \\ n_0 = 0 \\ c_0 = 0 \end{cases}$$

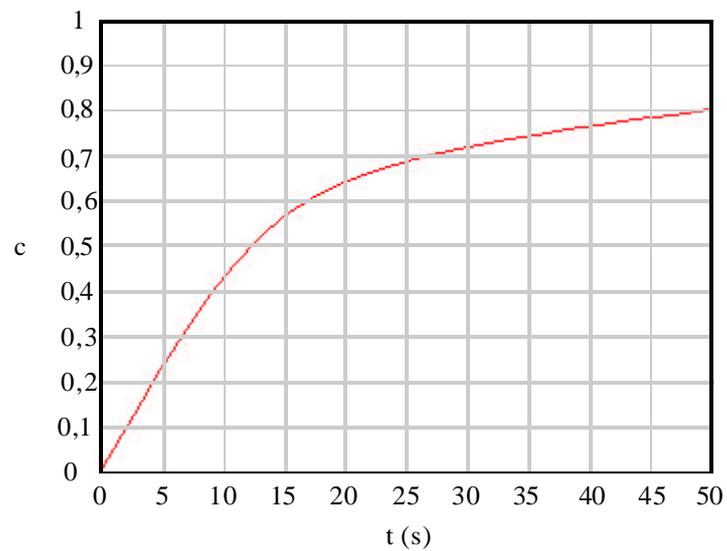
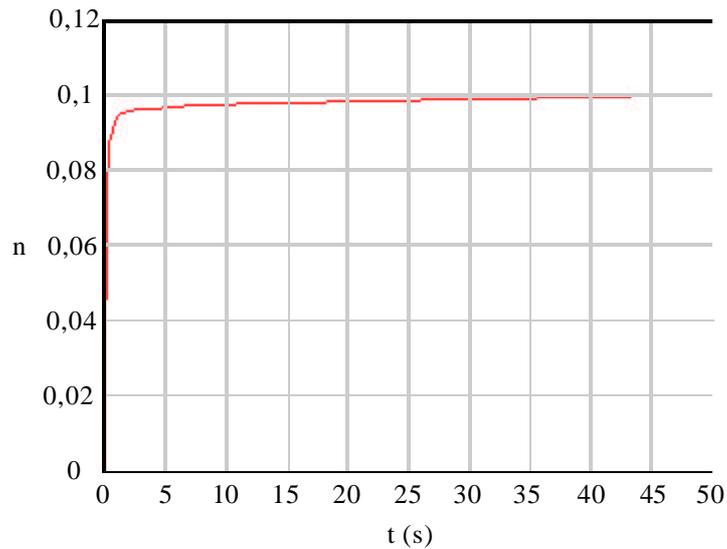
La relazione matriciale sarà dunque la seguente:

$$\begin{bmatrix} -10,65 & 0,08 & 1 \\ 0,65 & -0,08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si otterrà dunque:

$$\begin{cases} n_{\infty} = -\frac{Q\Lambda}{r} = 0,1 \\ c_{\infty} = -\frac{Q\Lambda}{r} \cdot \frac{b}{I\Lambda} = 0,8125 \end{cases}$$

L'andamento della n e della c è riportato nei grafici seguenti.



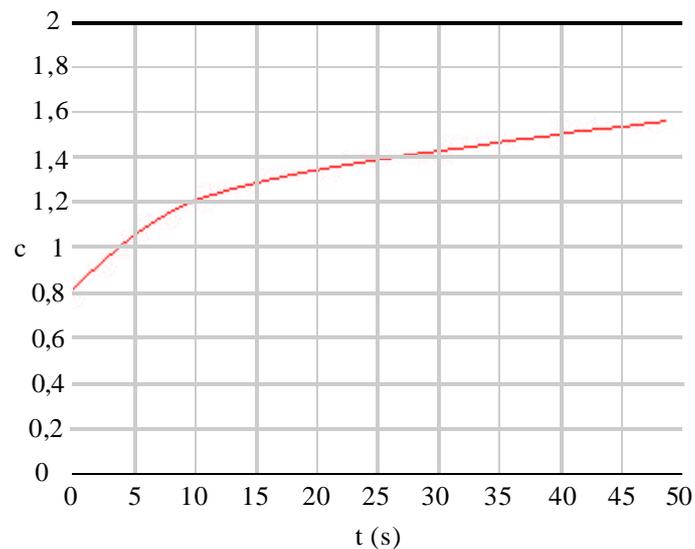
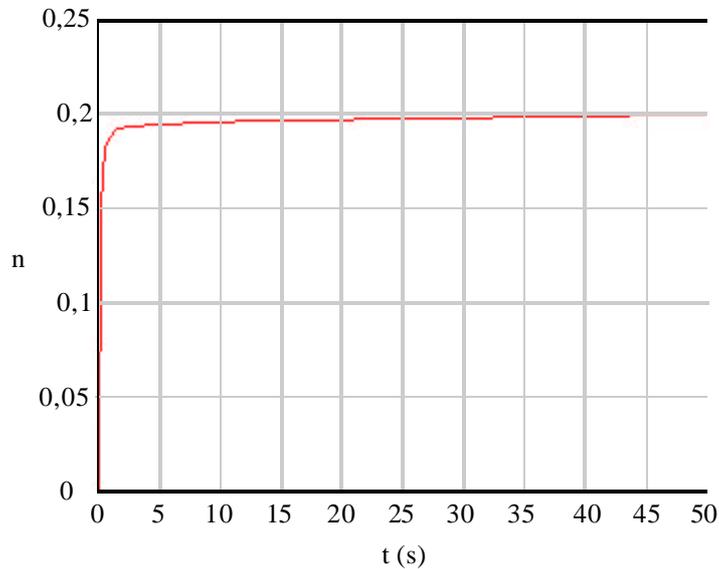
Passiamo ora ad un caso differente nel quale i valori numerici siano:

$$\begin{cases} \Lambda = 0,01 \\ r = -0,05 \\ n_0 = 0,1 \\ c_0 = 0,8125 \end{cases}$$

La relazione matriciale sarà dunque la seguente:

$$\begin{bmatrix} -5,65 & 0,08 & 1 \\ 0,65 & -0,08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,8125 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nella seconda situazione (nella quale c'è sostanzialmente un fattore 2 rispetto al caso precedente) si otterrà il seguente andamento della n e della c:



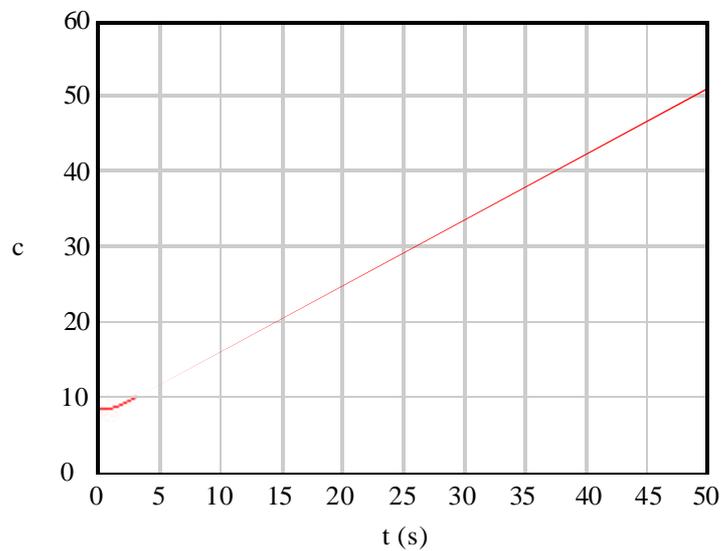
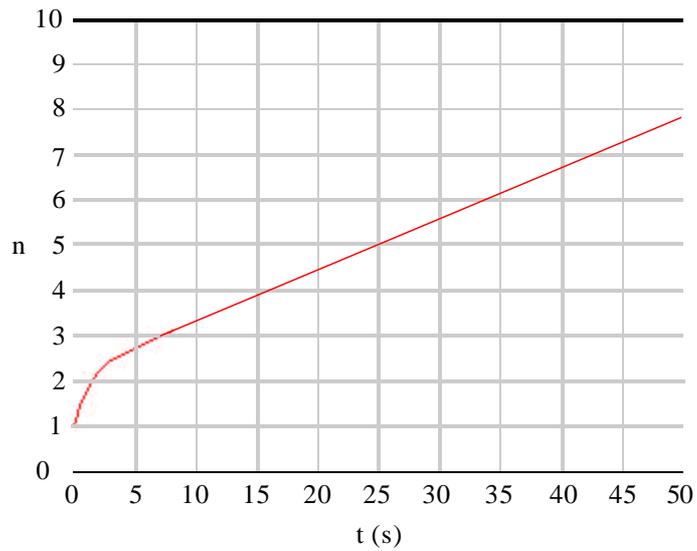
Passiamo ora alla situazione di reattore critico, nel quale i valori numerici siano:

$$\begin{cases} \Lambda = 0,01 \\ \mathbf{r} = 0 \\ n_0 = 1 \\ c_0 = 8,125 \end{cases}$$

In questo terzo caso (relativo al reattore critico) la matrice esponenziale utilizzata è la seguente:

$$\begin{bmatrix} -0,65 & 0,08 & 1 \\ 0,65 & -0,08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'andamento grafico della n e della c sarà quello rappresentato nelle immagini seguenti.



Il calcolatore utilizza 10 derivate e passi temporali di 0,005 secondi; nella seguente tabella sono riportati alcuni risultati:

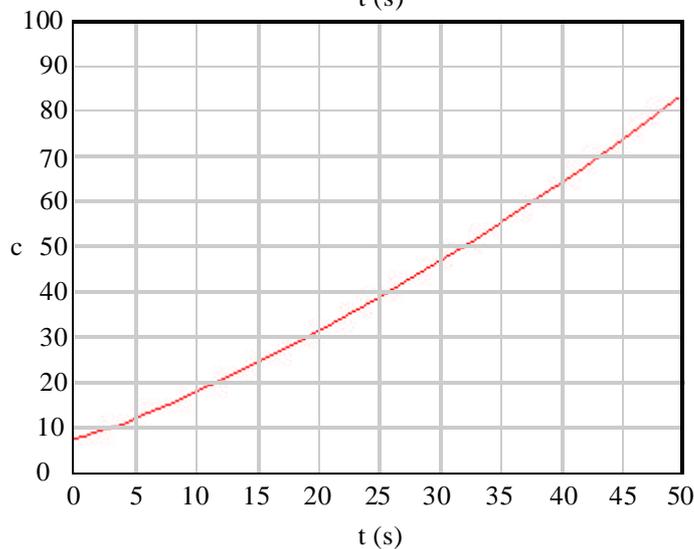
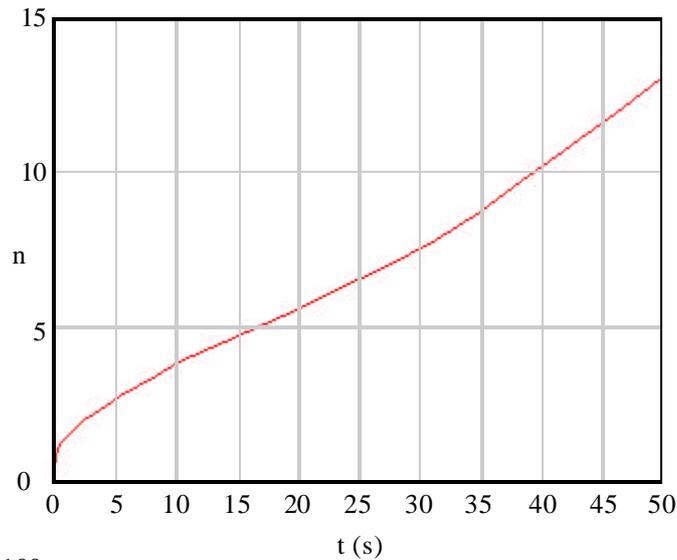
Tempo [s]	n	c	Q
0	1	8,125	1
2	2,155651	8,969349	1
4	2,592312	10,53269	1
6	2,861998	12,263	1
8	3,092905	14,03209	1
10	3,314807	15,81019	1
12	3,534618	17,59038	1
14	3,753943	19,37106	1
16	3,973155	21,15184	1
18	4,192341	22,93266	1
20	4,411521	24,71348	1
22	4,6307	26,4943	1
24	4,849878	28,27512	1
26	5,069056	30,05594	1
28	5,288234	31,83677	1
30	5,507412	33,61759	1
32	5,726590	35,39841	1
34	5,945768	37,17923	1
36	6,164947	38,96005	1
38	6,384125	40,74088	1
40	6,603303	42,5217	1

Negli ultimi due grafici visti si è potuto notare che gli andamenti della n e della c erano pressoché lineari; vogliamo dunque valutare la pendenza delle rette. Sia facendo riferimento alle espressioni analitiche delle pendenze (le relazioni (9) e (10)), sia utilizzando i valori numerici riportati nella tabella appena vista si ottiene:

$$\begin{cases} n \div 0,10959t \\ c \div 0,8904t \end{cases}$$

Ci mettiamo ora nella situazione di reattore sovracritico con presenza di sorgenti. Riportiamo di seguito i valori numerici utilizzati ed i corrispondenti andamenti della n e della c .

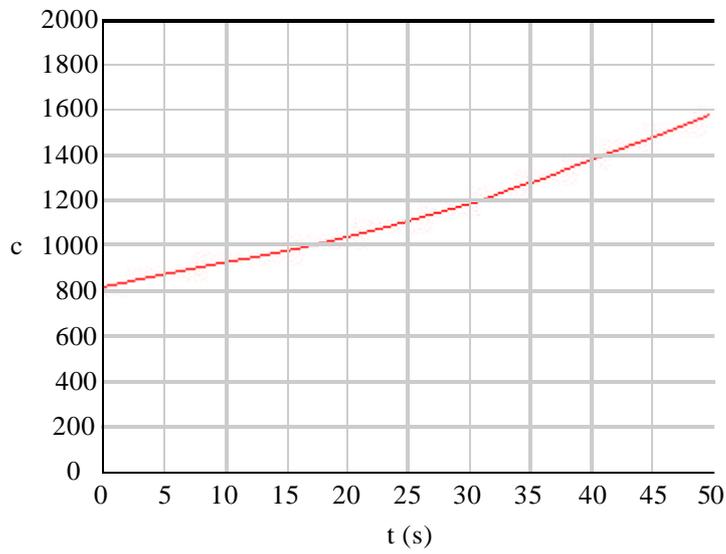
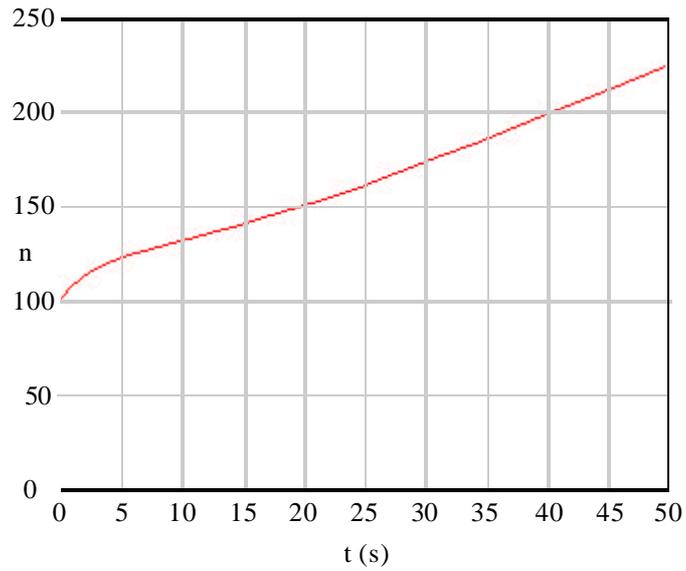
$$\begin{cases} \Lambda = 0,01 \\ \mathbf{r} = 10^{-3} \\ n_0 = 1 \\ c_0 = 8,125 \end{cases}$$



Un altro caso potrebbe essere quello caratterizzato dai seguenti valori numerici:

$$\begin{cases} \Lambda = 0,01 \\ \mathbf{r} = 10^{-3} \\ n_0 = 100 \\ c_0 = 812,5 \\ Q = 1 \end{cases}$$

I corrispondenti andamenti della n e della c sono mostrati nelle immagini seguenti.



Consideriamo infine la situazione caratterizzata dai seguenti valori numerici, ed il corrispondente andamento della n.

$$\begin{cases} \Lambda = 0,01 \\ \mathbf{r} = 10^{-3} \\ n_0 = 100 \\ c_0 = 812,5 \\ Q = 0 \end{cases}$$

