

Il complesso SPS del CERN

Il New 50 MeV Injector Linac

Con le conoscenze fin qui acquisite è ora possibile analizzare in maniera abbastanza esauriente il comportamento di macchine di una certa complessità, quali ad esempio il complesso SPS (Super Proton Synchrotron) del CERN, del quale è possibile vedere parte di una schematizzazione in figura 1.

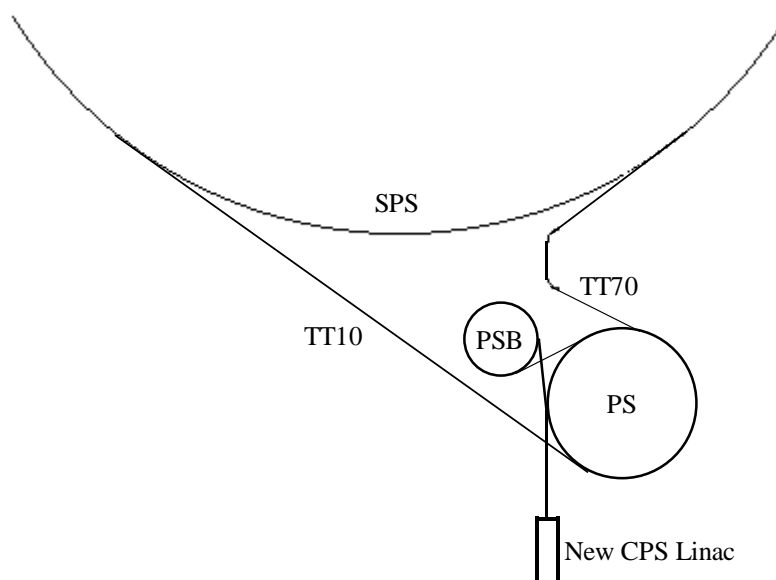


Figura 1

Sfruttando le tavole di acceleratore fornite in appendice è dunque possibile iniziare ad occuparsi degli anelli di questa lunga catena a partire, ovviamente, dal New CPS Linac, ovvero dal New 50 MeV Injector Linac (si veda l'[appendice 5](#)). Si tratta, dunque, di un Alvarez Linac realizzato alimentando, con un unico generatore (un Cockroft-Walton da 750 keV, valore tipico per questo tipo di macchina), tre cilindri (Tanks) ognuno dei quali inizia e finisce con un mezzo drift tube (da qui la notazione secondo la quale i drift tubes totali sono $125 + 6(\frac{1}{2})$) per permettere un perfetto accoppiamento tra i vari Tank. Una generica sequenza di drift tubes è quella mostrata in figura 2, nella quale sono evidenziate le grandezze riportate nella tavola.

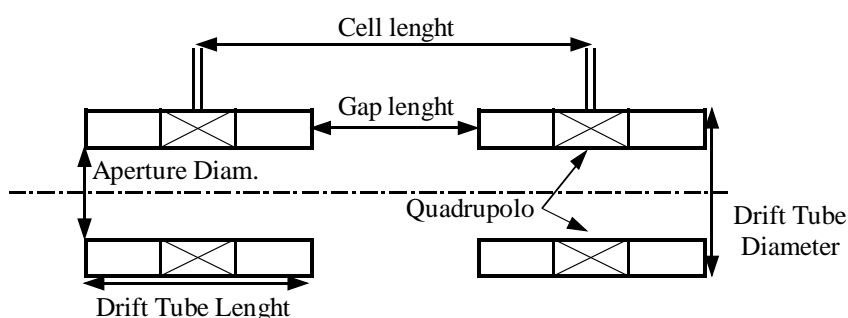


Figura 2

L'accoppiamento tra la sorgente (che produce un fascio continuo) e l'acceleratore (che funziona in regime pulsato) è un punto ovviamente critico della macchina; esistono due filosofie utilizzate, spesso contemporaneamente. È infatti possibile utilizzare delle macchine, dette chopper (che altro non sono che sistemi deflettori a radiofrequenza) che si limitano a tagliare il fascio buttando via quello che non può essere utilizzato all'interno dell'acceleratore; l'alternativa al chopper è il buncher, che prende un fascio lungo e tenta di comprimerlo in modo da ottenere il fascio pulsato richiesto dall'acceleratore. La compressione del fascio avviene con una cavità strutturata in modo da creare un campo che, in funzione del tempo, sia un dente di sega, come quello mostrato in figura 3; in questo modo le prime particelle del fascio vengono rallentate, quelle centrali non vengono toccate mentre le ultime vengono accelerate: complessivamente si ottiene un fascio più ristretto. Dal punto di vista dello spazio delle fasi, un buncher ideale (ovvero uno che riuscisse

effettivamente a creare un campo come quello mostrato in nero in figura 3) passerebbe dalla situazione iniziale mostrata in figura 4 a quella finale mostrata in figura 5 (nella quale, ovviamente, il guadagno in dimensione implica una perdita nello spread energetico); in realtà, un buncher efficiente ha una resa del 50% (il campo effettivamente creato sarà circa uguale a quello in rosso in figura 3) e porta alla situazione finale mostrata in figura 6.

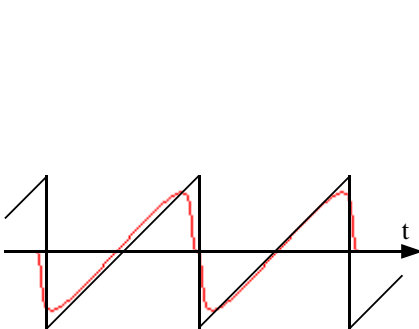


Figura 3

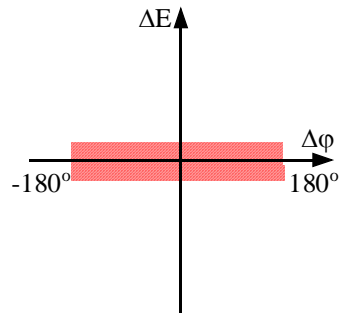


Figura 4

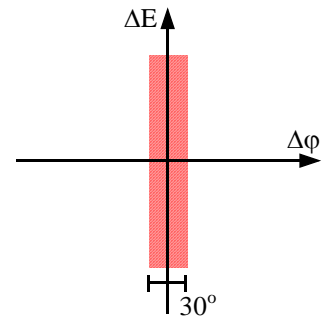


Figura 5

Come si capisce dalla tavola relativa al New Linac, questa operazione viene eseguita nella macchina in questione da tre bunchers.

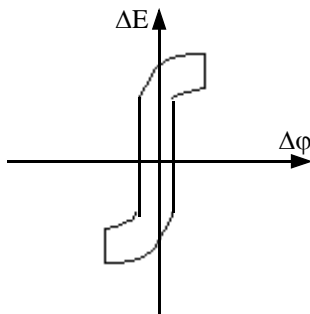


Figura 6

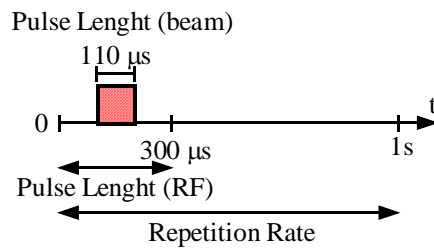


Figura 7

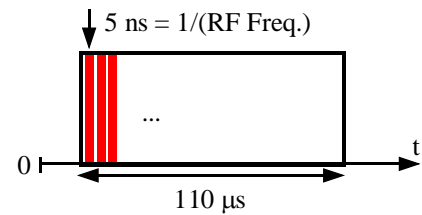


Figura 8

Dai dati relativi al sistema di accelerazione si riesce a ricostruire il macropulse (mostrato in figura 7) e il micropulse (mostrato, invece, in figura 8). Si noti, infine, che l'emittanza viene quasi raddoppiata nel passaggio attraverso il Linac (passando da 3 a 5) a cause di fenomeni non lineari.

Proton Synchrotron Booster (PSB)

Il fascio in uscita dal New 50 MeV Linac entra, come mostrato nello schema d'impianto mostrato in figura 1, nel Proton Synchrotron Booster (PSB) che permette di passare dai 50 agli 800 MeV. Il PSB è una macchina composta da 4 anelli sovrapposti, tutti contenuti all'interno di un unico magnete. Facendo riferimento ai dati contenuti nella tavola di acceleratore relativa al PSB (si veda l'appendice 6) si può subito notare, nella sezione relativa all'iniezione, una incongruenza con i dati forniti a proposito del Linac: l'emittanza non è più infatti 5, come affermato nell'appendice 5, ma 7; nella medesima sezione è indicata la modalità di inserzione del fascio all'interno dei vari anelli, per ognuno dei quali sono necessari 15 giri. Dalla sezione relativa al sistema magnetico si può infine dedurre la configurazione della struttura focalizzante, mostrata in figura 9.

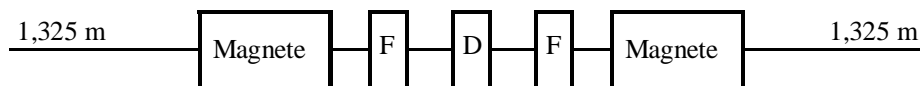


Figura 9

Il complesso SPS del CERN

Proton Synchrotron Booster (PSB)

Continuando nell'analisi del Proton Synchrotron Booster in base alla tavola di acceleratore fornita in [appendice 6](#) è ora possibile passare ad analizzare il sistema accelerante: la prima cosa che si può notare è l'armonica utilizzata, 5, che significa che la frequenza dell'RF è 5 volte la frequenza orbitale della macchina; questo significa, quindi, che all'interno di ogni anello circolano 5 bunches, per un totale, ricordando che il PSB è composto da 4 anelli sovrapposti, di 20 bunches.

In figura 1 è mostrato un dettaglio della vita del fascio, nel quale si vede come il linac riempia in successione i quattro anelli del PSB e come poi questo riconvogli i 20 bunches in un'unica linea (seguendo l'ordine di estrazione 3, 4, 2 e 1) tramite un kicker, ovvero un deflettore magnetico.

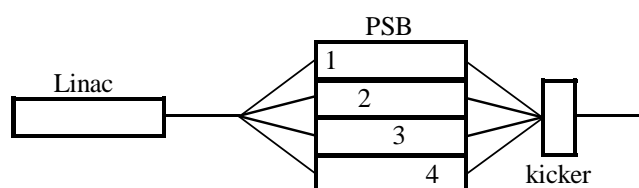


Figura 1

Nella sezione relativa alle performance dell'acceleratore è possibile osservare come l'emittanza sia schizzata fino a un valore dell'ordine di 30 e 50; questo è dovuto alla mancanza di coordinazione tra il Linac (che lavora a 200 MHz) e il PSB, che accoglie il fascio a 2,997 MHz. Questo impone una manipolazione del fascio (con eventuale affiancamento di bunches differenti) che fanno crescere l'emittanza.

Proton Synchrotron (PS)

Dallo schema del complesso SPS, riportato in figura 3 come appariva nel 1985, si nota come il passo successivo sia rappresentato dal Proton Synchrotron (PS), i cui dati sono riportati nella tavola di acceleratore di [appendice 7](#).

Facendo un rapido confronto delle date di realizzazione delle varie macchine ci si accorge che la configurazione originale prevedeva che il linac alimentasse direttamente il PS, mentre il passo intermedio del PSB è stato aggiunto nel seguito; per questo motivo i dati in appendice 7 riportano le due possibilità di funzionamento. Per quanto riguarda la sezione relativa all'inserzione, dunque, si può osservare come fosse possibile accogliere direttamente il fascio in uscita dal Linac (con una emittanza pari ad 8 che quindi è ancora in contrasto con quanto affermato nei dati dell'appendice 5) tramite una inserzione lunga 20 μ s che avviene in 3 giri; in alternativa si potevano accogliere i 20 bunches in uscita dal PSB in 2,5 μ s (ovvero in un giro).

Dalla sezione relativa al sistema magnetico si osserva come venga utilizzata una cella FOFDOD come quella mostrata in figura 2, nella quale i due quadrupoli vengono avvolti in un unico avvolgimento per avere una maggior garanzia sull'uniformità del controllo.

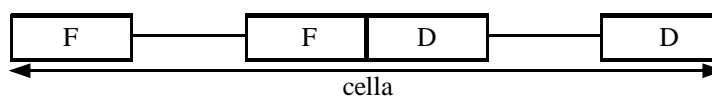


Figura 2

Si noti, inoltre, il fattore 100 del quale deve aumentare il campo di bending tra il valore di iniezione e quello massimo). Dalla sezione relativa al sistema di accelerazione si osserva come le 11 cavità acceleratrici funzionino sulla ventesima armonica, per permettere alla macchina di contenere tutti e 20 i bunches in uscita dal PSB.

Nella sezione relativa all'estrazione si può notare come esistessero tre tipi di estrazione: l'estrazione veloce (solitamente utilizzata quando il fascio viene caricato nell'SPS oppure quando è necessario spegnere in emergenza la macchina) caratterizzata da tempi che vanno dai 0,1 μ s (quando si estrae solo uno dei 20 bunches) ai 2,1 (quando si estraggono tutti e 20); l'estrazione lenta, solitamente utilizzata quando il fascio veniva mandato alle aree sperimentali l'estrazione di tipo radial shaving, basata sul meccanismo che il fascio viene decurtato di una parte molto piccola che serve per le zone di test o per alimentare postazioni che non richiedono alte intensità (si fa letteralmente la barba al fascio portandone via una piccola parte).

La tavola di acceleratore relativa al PS possiede le sezioni relative ai fasci secondari e alle aree di ricerca a dimostrazione del fatto che, pur non essendo oramai più, nel 1980, la macchina di punta, ospitava comunque ancora degli esperimenti.

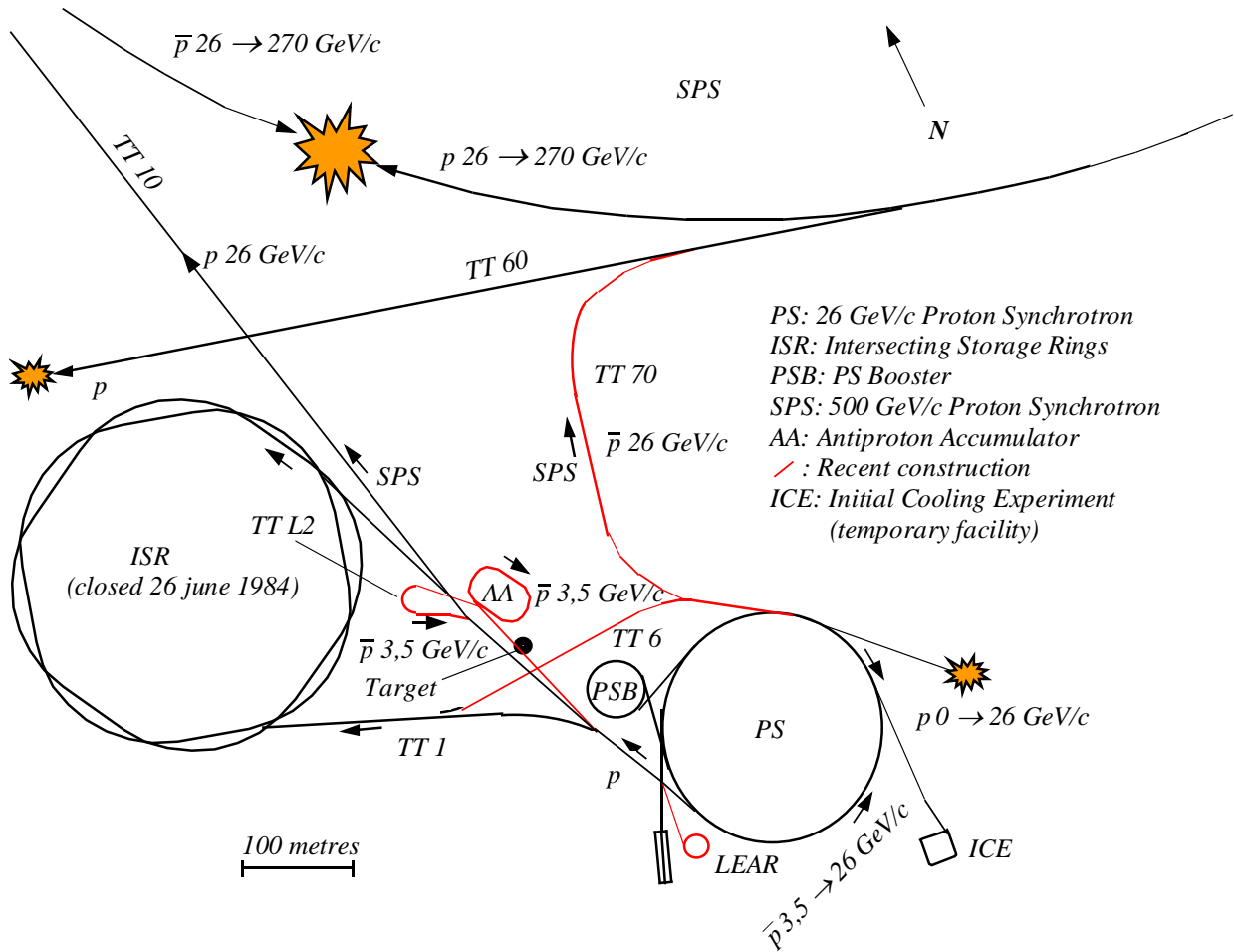


Figura 3

Super Proton Synchrotron (SPS)

Dal PS, attraverso la linea TT10, i protoni da 26 GeV venivano spediti all'interno dell'SPS, all'epoca la macchina di punta del CERN, capace di accelerarli fino a 400 GeV per poi farli impattare contro gli antiprotoni che arrivavano anch'essi dal PS tramite la linea TT70. Diverse altre macchine, come AA e LEAR erano utilizzate per la produzione, il rallentamento e lo stoccaggio degli antiprotoni, in modo da ottenerne quantità significative prime dell'utilizzo. I dati relativi all'SPS si possono ricavare a partire dalla tavola di acceleratore proposta in [appendice 8](#).

Il complesso SPS del CERN

Il complesso del Tevatron al Fermilab

Un complesso che può essere paragonato all'SPS del CERN è, per complessità e dimensioni, il complesso del Tevatron al Fermilab; in questo caso la sequenza degli acceleratori è quella mostrata in figura 1.

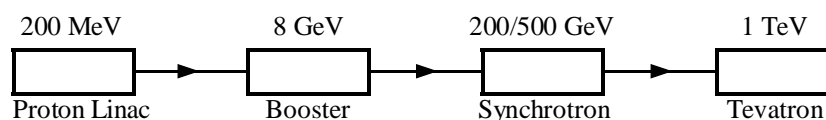


Figura 1

Come si può notare (trascorrendo il Tevatron) al Fermilab l'energia che l'SPS ottiene con quattro macchine (Linac, PSB, PS ed SPS) viene invece ottenuta solamente con tre macchine (Linac, Booster e Sincrotrone). Un grande vantaggio realizzativo che gioca a favore del complesso del Fermilab è che questo è stato realizzato da zero, senza sfruttare macchine pre-esistenti come invece è successo al CERN: questo ha reso possibile una maggior sincronia tra le macchine (i dati degli acceleratori del Fermilab sono disponibili nelle tavole di reattore presentate nelle [appendici 9, 10, 11 e 12](#)) osservando per esempio la sezione relativa al sistema di accelerazione del Linac si osserva un repetition rate pari a 15, in perfetto accordo con il repetition rate del Booster da 8 GeV; l'accoppiamento tra il Linac e il primo acceleratore circolare è comunque sempre problematico perché si passa da 200 MHz a circa 30 MHz. Sempre a partire dai dati forniti a proposito del Linac, si osserva come si parli di una fase di equilibrio (il cui valore è -32°): tale grandezza è dovuto al fatto che, per avere stabilità longitudinale, è necessario che all'interno delle cavità RF non si guadagni la massima energia disponibile; battezzando dunque ϕ la fase di equilibrio, è necessario che l'energia massima guadagnata sia $E_{\text{Max}}\cos\phi$. Si noti, infine, come i dati relativi al Tevatron (che è una macchina superconduttiva) fossero, nel 1980, molto scarsi a causa del fatto che la struttura era ancora in piena fase realizzativa.

Il lattice dell'SPS

Dopo aver visto alcuni valori delle macchine che costituiscono il complesso dell'SPS e dopo aver avuto occasione di confrontarli con i rispettivi dati del complesso del Tevatron (che in alcuni casi ha ispirato la realizzazione dell'SPS), è possibile comprendere in maniera significativa l'articolo relativo al lattice dell'SPS presentato in [appendice 13](#).

Per una comprensione ancora maggiore dell'articolo è utile sapere che quello che nel testo viene chiamato Q è il tuning, fino ad ora espresso come ν , mentre α_p corrisponde alla funzione di dispersione η .

Per quanto riguarda la sezione relativa alle inserzioni, il beam dump è il sistema di estrazione veloce del fascio per le situazioni di emergenza; facendo invece riferimento alla figura 5 è utile notare come, nello schema riassuntivo posto sotto il grafico, la zona centrale dell'inserzione sia rappresentata da quattro sezioni i cui numeri 2/4, 0/0, 0/0, 4/2 rappresentano i magneti di ogni tipo (B1 e B2) inseriti nella singola cella.

Il complesso SPS del CERN

Il lattice dell'SPS

Continuando nell'analisi del lattice dell'SPS proposto nell'articolo di [appendice 13](#), il paragrafo relativo alla scelta del punto di lavoro può essere compresa facendo riferimento alla teoria delle risonanze. Negli acceleratori, infatti, esistono delle frequenze di risonanza alle quali delle eccitazioni anche piccole sul fascio verrebbero moltiplicate al punto da diventare distruttive; tali frequenze dipendono dalle caratteristiche costruttive e si dividono in singole ($\nu_y = k$, $k \pm 1/2$, $k \pm 1/3$, $k \pm 1/4$) e accoppiate, che possono essere di somma ($\nu_x + \nu_z = i$) oppure di differenza ($\nu_x - \nu_z = 0$); tali frequenze sono ovviamente proibite. L'SPS ha superperiodicità 6 e quindi bisogna evitare un tuning che sia un multiplo di 6. Una volta che sia dunque stato scelto un valore tra 26 e 27, risulta più conveniente piazzarsi vicino alla metà dell'intero piuttosto che verso l'intero, in quanto l'estrazione viene fatta in risonanza con il terzo di intero (x,66) e quindi è più logico stare vicino alla metà, nonostante ciò, non è 27,6 la scelta migliore, in quanto è una risonanza del quinto ordine che, alla lunga, può diventare distruttiva, si sceglie allora 27,4.

Siccome, nell'articolo presentato in appendice 13, si fa riferimento alle "aperture requirements", può essere significativo soffermarsi ulteriormente su tale problema, soprattutto concentrandosi sulle misure che vengono fatte per ottenere i parametri che poi vengono utilizzati per definire le aperture medesime. È dunque utile sapere che sono presenti 108 beam-position monitor radiali e 108 beam-position monitor verticali che sono piazzati vicino ai quadrupoli che focalizzano nella relativa direzione. Attraverso un sistema di controllo computerizzato, la informazioni vengono raccolte ed utilizzate per rappresentare sugli schermi della sala controllo l'orbita chiusa del singolo giro. Un esempio di quanto appare sul display è mostrato in figura 1.

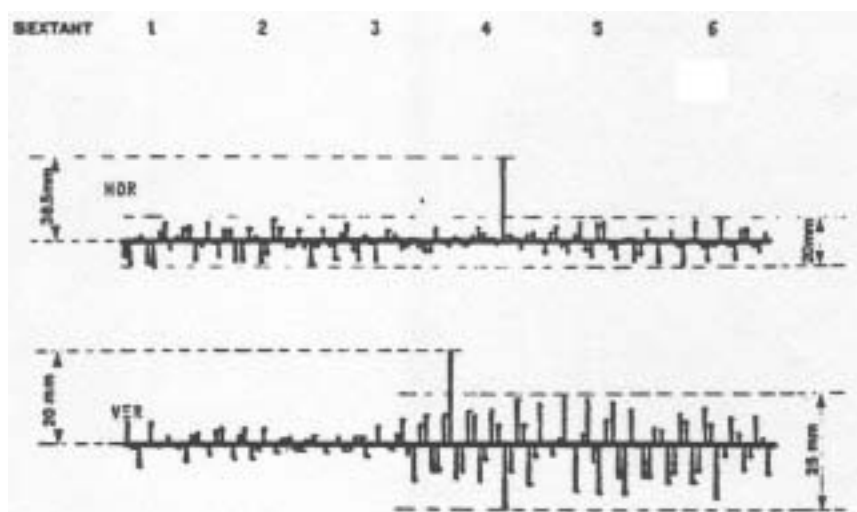


Figura 1

Senza alcuna correzione l'ampiezza picco-picco dell'orbita chiusa è riassunta nella tabella 1.

	<i>Orizzontale</i>	<i>Verticale</i>
10 GeV (iniezione)	20 mm	25 mm
200 GeV	15 mm	16 mm
400 GeV	12 mm	16 mm

Tabella 1

L'apertura della camera a vuoto, per avere un parametro di riferimento, è pari a 125 mm in orizzontale e a 50 mm in verticale. Il sistema computerizzato di controllo è anche in grado di correggere automaticamente l'orbita chiusa all'inserzione usando un metodo sequenziale (beam-bump method) che permette di ridurre l'ampiezza picco-picco a 5 mm orizzontali e 3 mm verticali. La tecniche più moderne prevedono di dare un kick al fascio con un solo magnete e di vedere come risponde ogni beam-position monitor; ripetendo la procedura per ogni magnete è possibile ricostruire, per ogni beam-position monitor, la funzione di uscita relativa ad ogni magnete. In questo modo è possibile agire sul fascio tramite magneti accuratamente selezionati in modo da avere l'uscita migliore.

Ricostruzione dell'SPS con l'approccio FODO

Sfruttando in maniera appropriata i dati forniti a proposito dell'SPS è possibile valutare la correttezza della teoria relativa alla cella FODO. Si supponga dunque di considerare l'avanzamento di fase μ pari a 90° , che, combinato con il fatto che ci sono 108 periodi, permette di ottenere:

$$\nu = \frac{N\mu}{2\pi} = 27$$

In realtà è stato specificato che il tuning è pari a 27,6 il che implicherebbe un avanzamento di fase pari a 92° ; siccome però l'avanzamento di fase è una grandezza che può variare (tant'è che nel 1980, ovvero 3 anni dopo l'articolo dell'[appendice 13](#) che è del 1977, si ritrova un valore di tuning pari a 26,6, che implica una ulteriore variazione dell'avanzamento di fase) si può utilizzare, in prima approssimazione un μ pari a $\pi/2$.

Conoscendo, inoltre, la lunghezza della cella ($L_{\text{cella}}=64\text{m}$) si può risalire al valore del parametro L della cella FODO che sarà esattamente la metà ($L=32\text{m}$); è dunque possibile valutare la focale delle lenti sottili che modellizzano i quadrupoli tramite la relazione:

$$f = \frac{L}{\sqrt{2}} = 22,63\text{m}$$

I valori estremi della funzione β si ricavano ora dunque dalle due seguenti espressioni:

$$\begin{cases} \beta_{\max} = L(2 + \sqrt{2}) = 109,25 \\ \beta_{\min} = L(2 - \sqrt{2}) = 18,75\text{m} \end{cases}$$

Tali valori sono in ottimo accordo con quelli che si possono estrapolare dalla figura numero 2 dell'appendice 13. Sfruttando la smooth approximation si otterrebbe:

$$\bar{\beta} = \frac{R}{\nu} = 40,7\text{m}$$

che risulterebbe dunque sbagliato del 50% ma renderebbe comunque l'idea dell'ordine di grandezza.

Per quanto riguarda il gradiente G dei quadrupoli, si ricorda la relazione secondo la quale:

$$\frac{1}{f} = \frac{GL}{B\rho}$$

Conoscendo dalla tavola di reattore di appendice 8 il numero di magneti, le loro dimensioni e le dimensioni complessive della macchina è possibile risalire al raggio di curvatura del singolo magnete:

$$\rho_{\text{mag}} = 740\text{m}$$

e quindi, conoscendo dalla medesima tavola il valore di B all'interno dei magneti, si ha tutto ciò che serve per calcolare:

$$G = \frac{B\rho}{fL_q} = 19,3\text{T/m}$$

dove L_q è la lunghezza del singolo quadrupolo. Anche questo valore è in perfetto accordo con quello fornito dalla tavola (20 T/m).

La smooth approximation permette anche di valutare la dispersione:

$$\bar{\eta} = \frac{R}{\nu^2} = 1,5$$

Ovviamente, l'approccio relativo alla cella FODO può essere utilizzato solo nel caso in cui i magneti possono essere trascurati, per accertarsi del fatto che questo sia possibile si può paragonare la focale del quadrupolo (22,63 m) con la focale del magnete, ricavabile dalla relazione:

$$f_m = \frac{\rho_m}{\alpha} = \frac{740}{2\pi/744} = 87\text{km}$$

anche tenendo conto che in ogni cella sono presenti 8 magneti, la differenza tra 10 km e 22 m è talmente elevata che trascurare i magneti diventa assolutamente accettabile.

Cromaticità naturale

Nell'articolo dell'[appendice 13](#) si fa riferimento ad un fenomeno chiamato cromaticità, che si riferisce alla variazione del tuning dovuta, naturalmente, allo spread di momento. Per ricavare la relazione che lega tali due grandezze si fa riferimento alle seguenti due espressioni:

$$\begin{cases} \nu = \frac{N\mu}{2\pi} \\ \sin \frac{\mu}{2} = \frac{L}{2f} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Gl}{B\rho} L \end{cases}$$

Differenziando la prima di tali due espressioni si ricava:

$$d\nu = \frac{N}{2\pi} d\mu$$

Differenziando, invece, la seconda, si ricava, con opportuni passaggi:

$$d\mu = -2 \frac{\sin \frac{\mu}{2}}{\cos \frac{\mu}{2}} \delta$$

dove si definisce δ come lo spread di momento. Combinando allora le due ultime relazioni scritte si ricava:

$$d\nu = -\nu \frac{\operatorname{tg} \frac{\mu}{2}}{\frac{\mu}{2}} \delta$$

ovvero, per un avanzamento di fase molto vicino ai 90° :

$$d\nu = -\nu \delta$$

Dai dati della tavola di reattore dell'SPS si vede come δ sia dell'ordine di 10^{-3} e quindi, approssimando il valore di ν a 25, si ricava:

$$d\nu \cong \mp 0,025$$

la cromaticità, particolarmente dannosa quando provoca un allargamento del tuning tale da far attraversare più volte una risonanza del quinto ordine (che alla lunga diventa distruttiva) viene corretta con l'utilizzo dei sestupoli.

Trasformazione dell'SPS in un collider

Dopo il 1980, l'SPS è stato modificato per poter diventare un collider; questo ha comportato un deciso incremento del tempo che il fascio passava all'interno dell'anello con un conseguente maggior carico per tutte le strutture, al punto che inizialmente la massima energia raggiungibile dall'SPS come ring collider era 270 GeV (contro i 450 raggiunti come semplice acceleratore). Il punto più cruciale nella trasformazione della macchina in un collider è stato la manipolazione della funzione β . In un acceleratore, infatti, le funzioni β verticale od orizzontale alternano tra di loro il massimo ed il minimo (quando una massima l'altra è minima e viceversa, come appare per esempio evidente nella figura 2 dell'[appendice 13](#)), quando le due funzioni hanno lo stesso valore, questo si aggira attorno ai 50 (sempre facendo riferimento alla figura 2 dell'articolo sul lattice dell'SPS). In un collider si devono avere, contemporaneamente, un basso valore di β_H ed un basso valore di β_V (in origine, per una energia massima di 270 GeV, si doveva avere $\beta_H = 5\text{m}$ e $\beta_V = 1\text{m}$). Per ottenere ciò è stato necessario agire su una delle sezioni libere, aggiungendo dei quadrupoli. La spiegazione di come questo sia stato fatto è contenuta nel seguente estratto:

The design of the low beta section, which consists essentially of two doublet lenses to focus the beam down in both planes, has to respect two main constraints. First of all, it is necessary to avoid moving the existing quadrupoles from their present positions otherwise too much time would be lost in changing from normal fixed target operation to $p\bar{p}$ and vice versa. Secondly, as much as possible of the space between the two quadrupoles on either side of the intersection point should be left free for the experiment.

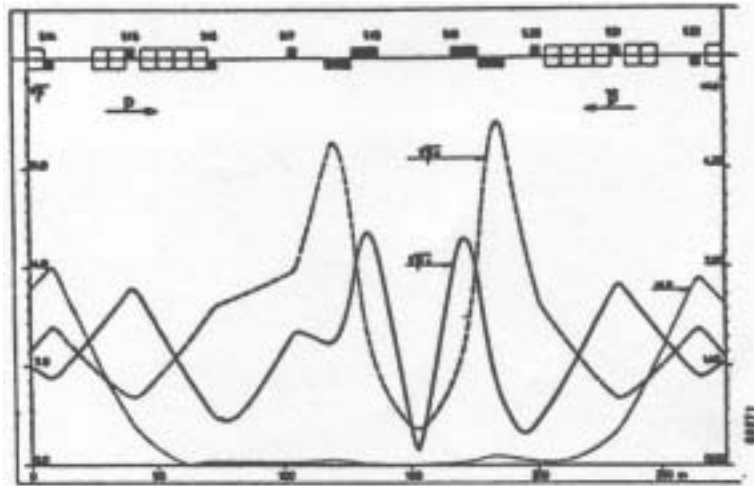


Figure 2 low beta section

A design which fits in with these requirements is shown in Figure 2. Ten quadrupoles have to be added to the straight section, each element of the doublet requiring three quadrupoles of an existing design. The existing machine quadrupoles form part of these, two of them having the current reversed from the normal direction. Ten other machine quadrupoles have to have their currents modified to match the low beta section into the rest of the SPS, and this can be done by fitting separate power supplies to these elements. It will be seen that the beta values of 5 m in the horizontal plane and 1 m in the vertical plane can be achieved, giving a gain in luminosity of about 20 compared with the normal lattice, in which the beta midway between quadrupoles is 48 m.

Con il passare degli anni i valori di β_H e β_V sono progressivamente scesi fino a toccare, nel 1985, quota 1 e 0,5 metri, rispettivamente, con una energia di 315 GeV. Passando, infine, dal regime continuo al regime pulsato (facendo dunque salire l'energia per poco tempo per non "surriscaldare" i sistemi) si è arrivati a sfruttare a appieno i 450 GeV che poteva fornire la macchina, con valori di β_H e β_V ricavabile dalla tabella di dati relativa ai collider fornita in [appendice 14](#).

Il complesso SPS del CERN.

Il LEP

L'SPS è rimasta la macchina di punta del CERN fino alla realizzazione del LEP, il cui schema è riportato in figura 1.

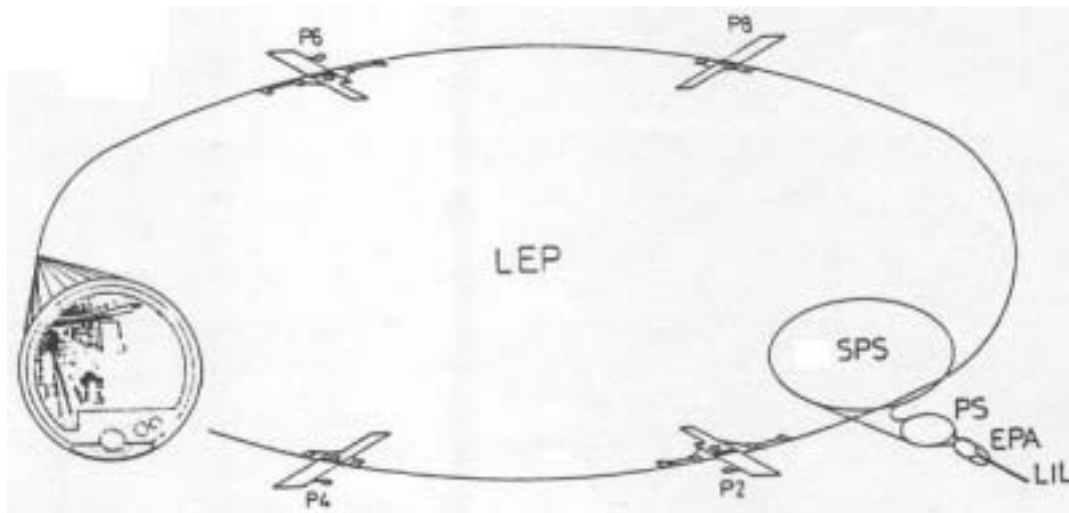


Figura 1

La catena di iniezione del LEP, si veda la figura 2, era ovviamente differente da quella dell'SPS, con la quale, comunque, veniva condiviso il PS e l'SPS stesso; si iniziava dunque con un Linac da 200 MeV che accelerava un fascio di elettroni contro un target di materiale pesante, dal quale si ricavano i positroni.

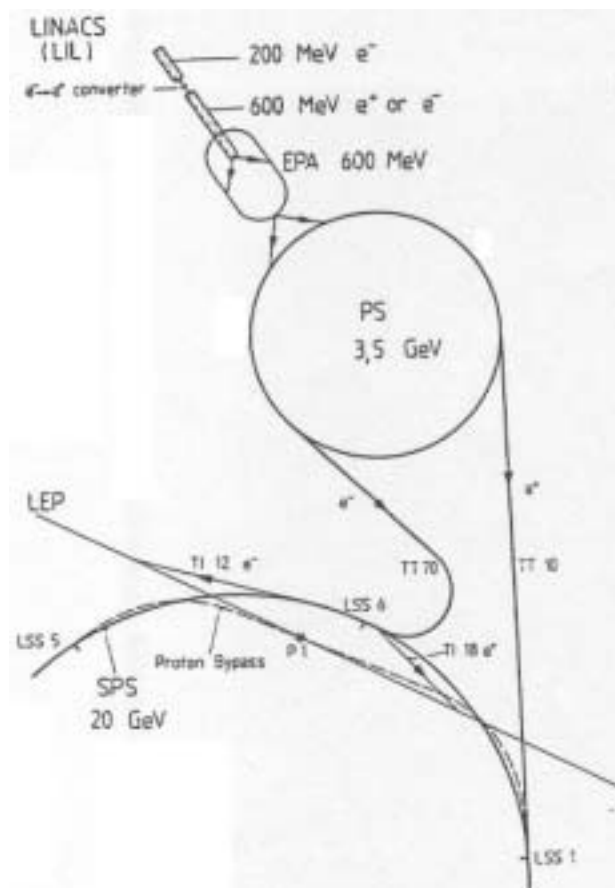


Figura 2

Elettroni e positroni venivano poi accelerati da un ulteriore Linac, da 600 MeV, che alimentava un anello di accumulazione chiamato EPA (Electron Positron Accumulator). Da qui, e^+ ed e^- venivano mandati al PS, che li accelerava fino a 3,5 GeV per poi spedirli nell'SPS, nel quale la loro energia veniva portata a 20 GeV. Solo a questo punto avveniva l'ingresso nel LEP.

La costruzione del LEP è iniziata nel 1985 e la macchina ha attraversato due fasi della sua storia: LEP I ha funzionato dal 1989 al 1999 ed era caratterizzato da cavità normal-conduttive, LEP II ha lavorato fino allo smantellamento previsto per la realizzazione di LHC (2000) e ha sfruttato cavità superconduttive (in realtà la sostituzione delle cavità è avvenuta in maniera graduale, sfruttando gli shut down annuali della macchina).

In tabella 1 sono raccolti alcuni parametri generali della macchina.

Machine circumference	26658,879 m	
Average radius	4,243 km	
Maximum radius	4,263 km	
Minimum radius	4,204 km	
Dipole bending radius	3,0992 km	
Number of intersections	8	
Number of bunches per beam	4	
RF frequency	351,209 MHz	
Revolution frequency	11,245 kHz	
Harmonic number	31320	
Injection energy	20 – 22 GeV	
	LEP I	LEP II
Lattice type	60°/cell	90°/cell
Horizontal tune	56...60	89...91
Vertical tune	64...68	93...95
Momentum compaction factor	$3,9 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$

Tabella 1

Si noti la libertà lasciata, a livello di progetto (i dati risalgono al 1982) per il tuning orizzontale e verticale, in modo da non rischiare di incontrare problemi con la scelta del punto di lavoro. Tenendo come riferimento il lattice dell'SPS, analizzato in maggior dettaglio, è possibile osservare anche la tabella 2, contenente alcuni dati caratteristici del lattice del LEP.

Period length	79,00 m			
Dipole magnetic length per period	70,06 m			
Quadrupole magnetic length per period	$2 \times 1,60$ m			
Sextupole magnetic length per period	1,10 m			
Bending angle per period	22,6122 mrad			
Bending radius	3099,2095 m			
Average period radius	3493,6846 m			
Horizontal aperture	± 59 mm			
Vertical aperture	± 33 mm			
	LEP I		LEP II	
Hor. phase advance	60°		90°	
Vert. phase advance	60°		90°	
	QF	QD	QF	QD
Parameters in strength	-0,01604 m^{-2}	0,01604 m^{-2}	-0,02269 m^{-2}	0,02268 m^{-2}
$\beta_{x \max}$	135,0 m	46,3 m	132,3 m	23,6 m
$\beta_{y \max}$	46,3 m	135,0 m	23,6 m	132,3 m
D_x	2,22 m	1,355 m	1,202 m	0,587 m

Tabella 2

Si osservi la notazione, tipica del CERN, che esprime con il simbolo D ciò che si è qui espresso come η . Nelle figure 3 e 4 sono mostrati gli andamenti delle funzioni del lattice nelle inserzioni nelle quali doveva avvenire l'urto tra i fasci nel caso, rispettivamente, di LEP I e LEP II.

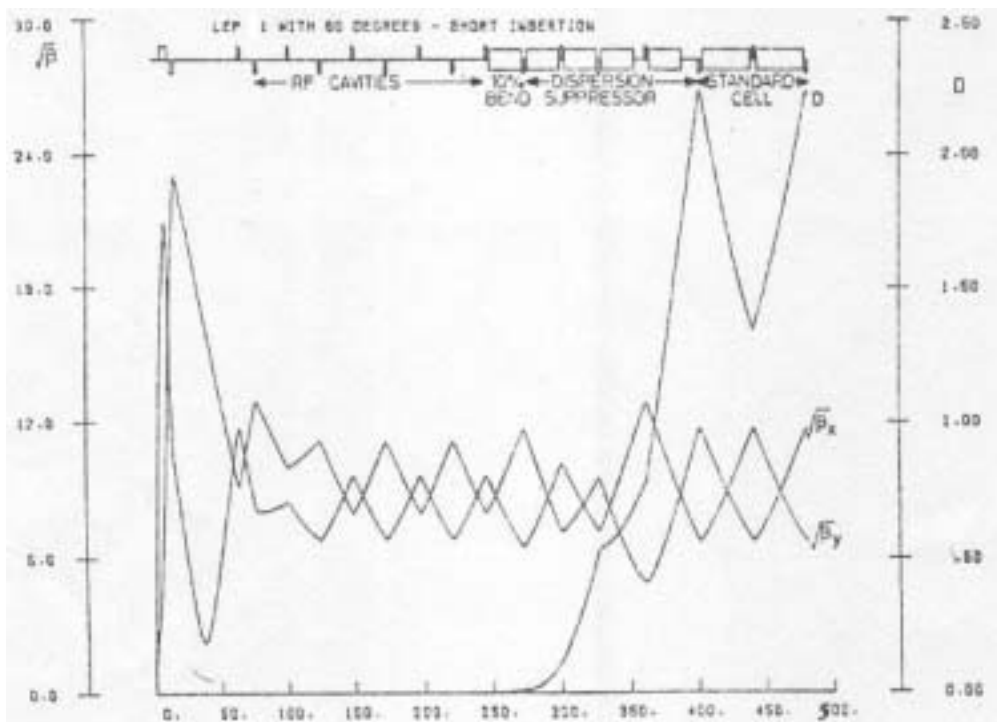


Figura 3

Ulteriori parametri relativi al LEP si possono trovare nella tabella fornita in [appendice 15](#), nella quale è interessante notare la configurazione dei bunches, raggruppati in quattro treni tra 1 o 2 bunch per treno; questa configurazione è stata studiata per la prima volta al CESR di Cornell, che attualmente è il più vecchio sincrotrone funzionante, che viene spesso utilizzato come banco di prova per innovazioni relative alle macchine (il contributo alla ricerca di questa macchina è infatti oramai scarso).

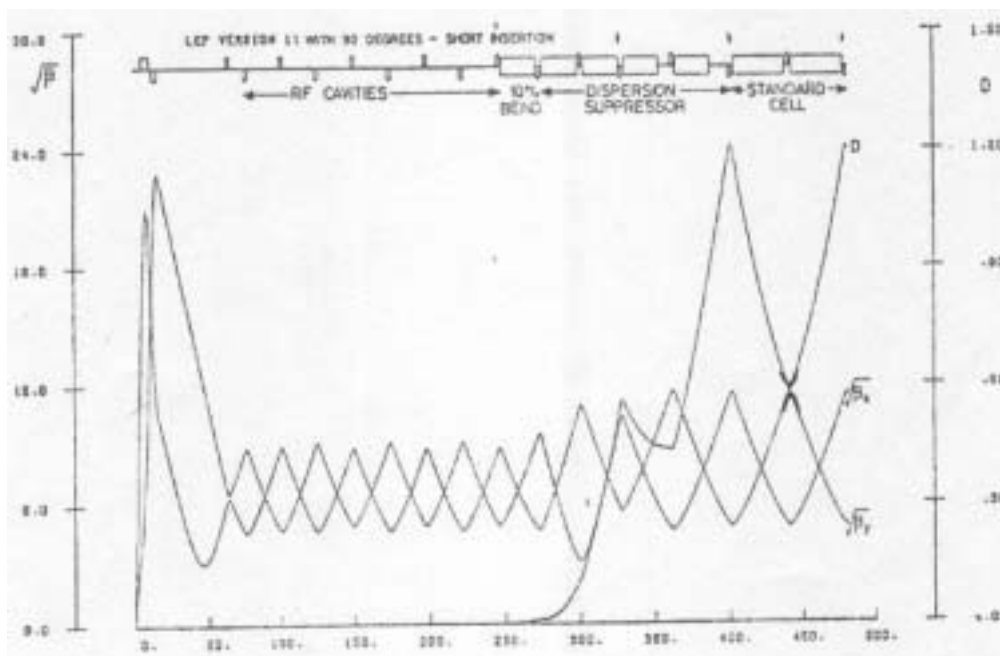


Figura 4

Il WNR Proton Storage Ring

Sempre avendo in mente il lattice dell'SPS si può ora fare un ulteriore confronto (dopo quello fatto con il lattice del LEP) con il lattice di una macchina molto più piccola, il Proton Storage Ring di Los Alamos. Questa macchina è un vero e proprio storage ring che manipola il fascio che arriva dal LAMPF e lo convoglia in una neutron spallation source. Le caratteristiche di questa macchina si possono ricavare dall'articolo proposto in [appendice 16](#) (datato 1977); per avere una visione più completa della macchina è anche opportuno fare riferimento ai dati del LAMPF, ricavabili dalla tavola di acceleratore di [appendice 17](#).

Osservando dunque le tabelle 1 e 2 dell'appendice 16 si osserva come il punto di lavoro scelto sia pari a 2.5 (corrispondente ad una scelta di μ di 101,25) che è una risonanza; questa apparente contraddizione si comprende osservando che il punto di lavoro indicato è nominale; a questi valori vanno infatti tolti gli shift dovuti alla aromaticità e agli effetti dovuti alla carica spaziale, ottenendo così un punto di lavoro che non si trova su una risonanza.

Osservando la frequenza dell'RF e confrontando questo dato con la frequenza RF del LAMPF in appendice 17 si osserva come il WRF sia matchato con il LAMPF sulla sua terza armonica (in quanto $603.75 = 3 \cdot 201.25$). I dati del LAMPF indicano due frequenze relative all'RF, ovviamente quella base è quella più piccola e quindi il micropulse che esce dal LAMPF sarà spaziato di 5 ns.

Facendo invece riferimento alla figura 2 dell'appendice 16 appare evidente come gli andamenti delle funzioni β non siano ortogonali in quanto il magnete di bending, impossibile da trascurare a causa della dimensioni della macchina e dell'angolo sotteso da ogni magnete, focalizza anch'esso.

È opportuno accennare al fatto che i fast kicker che appaiono nel design di questa macchina si rivelarono molto più complicati da realizzare rispetto a quanto atteso e quindi la macchina fu realizzata in maniera leggermente diversa da come qui spiegato.

Risonanze: teoria e classificazione.

Le equazioni del moto nei due spazi delle fasi trasversi sono state derivate supponendo un campo magnetico ideale (del quale si considerava un'espansione al primo ordine) e la linearità che si poteva ricavare dal disaccoppiamento dei sottospazi. Considerando, però, le imperfezioni del campo e gli ordini superiori del suo sviluppo in serie (con la possibilità di accoppiamenti) il moto diventa instabile per dei valori specifici delle frequenze di focalizzazione ν_x e ν_z . Questo fenomeno prende il nome di risonanze e può essere compreso facendo riferimento a due oscillatori armonici accoppiati e con un termine forzante.

Risonanze da imperfezione

Esistono due tipi principali di risonanze: le risonanze da imperfezione (dovute, appunto, alle imperfezioni del campo) e le risonanze intrinseche (dovute agli ordini superiori dello sviluppo ed al loro accoppiamento). Utilizzando gli oscillatori armonici e sfruttando la smooth approximation è possibile vedere due semplici esempi.

La risonanza da imperfezione ($\nu=k$) può essere dunque compresa facendo al moto radiale in un campo

$$B_z = -B(\vartheta) = -[B_z + \delta B_z] = -[B + b_k \cos(k\vartheta)]$$

Si ricordi che il campo deve essere negativo. Il termine b_k rappresenta la k-esima armonica dell'imperfezione δB_z del campo. L'equazione del moto sarà dunque:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2(1-n)x = \frac{\partial F_x}{m} = \frac{qv_g \delta B_z}{m}$$

Cambiando la variabile indipendente da t a θ si ottiene:

$$\frac{d^2 x}{d\vartheta^2} + \nu^2 x = -\frac{qv}{m\omega^2} b_k \cos(k\vartheta)$$

Ricordando poi le due semplici relazioni secondo le quali:

$$\begin{cases} \nu = \omega R \\ \omega = \frac{qB}{m} \end{cases}$$

si ottiene:

$$\frac{d^2 x}{d\vartheta^2} + \nu^2 x = -R \frac{b_k}{B} \cos(k\vartheta)$$

La soluzione particolare che si può ricavare da questa equazione, ovvero l'orbita di equilibrio, sarà data da:

$$x_{EO} = -R \frac{b_k}{B} \cdot \frac{1}{\nu^2 - k^2} \cos(k\vartheta)$$

È dunque necessario un rapporto b_k/B dell'ordine di 10^{-3} per mantenere la distorsione dell'orbita di equilibrio entro limiti accettabili. Questa espressione mette dunque subito in evidenza il problema che si può venire a creare quando $\nu \rightarrow k$ in quanto non c'è più un'orbita di equilibrio e il moto è instabile. Per comprendere effettivamente come vadano le cose si fa riferimento ad un'altra soluzione particolare:

$$x(\vartheta) = -R \frac{b_k}{B} [\cos(k\vartheta) - \cos(\nu\vartheta)] \frac{1}{\nu^2 - k^2}$$

che può essere riscritta nella forma:

$$x(\vartheta) = -R \frac{b_k}{B} 2 \left[\sin\left(\frac{\nu+k}{2}\right) \vartheta \sin\left(\frac{\nu-k}{2}\right) \vartheta \right] \frac{1}{\nu^2 - k^2}$$

Quando, dunque, $\nu \rightarrow k$ si ha:

$$x(\vartheta) = -R \frac{b_k}{B} \cdot \frac{1}{2\nu} \vartheta \sin(\nu \vartheta)$$

Da questa relazione appare evidente come l'instabilità sia solo una questione di tempo, in quanto è presente un termine θ , detto termine secolare, che cresce linearmente. Come conseguenza di ciò i valori interi di ν vengono considerati proibiti.

Quanto appena visto si può comprendere con un rapidissimo esempio nel quale si considera un ciclotrone classico nel quale le due D del magnete presentino campi magnetici leggermente differenti, come mostrato in figura 5. Una particella che viaggia nel ciclotrone passando da una D all'altra vede dunque un campo come quello graficato in figura 6, che si può considerare come la sovrapposizione di due campi (come specificato in figura 7), dei quali uno sia costante e l'altro sia composto da un'onda quadra.

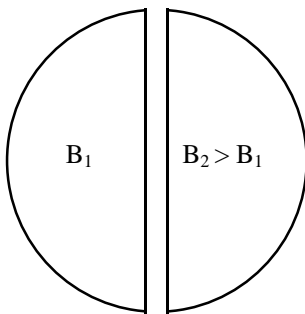


Figura 5

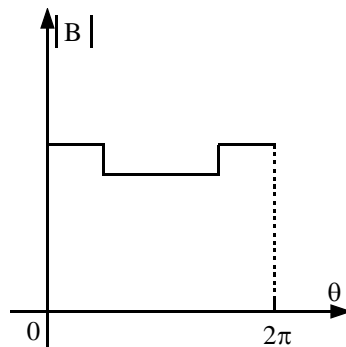


Figura 6

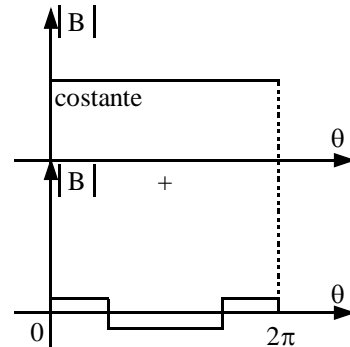


Figura 7

L'onda quadra ha dunque una frequenza che si accorda perfettamente con il moto della particella. Quando, dunque, una particella viaggia nella D con campo maggiore, il suo raggio di curvatura sarà minore mentre sarà più grande quando viaggia nella D con campo magnetico minore. Complessivamente la traiettoria di una particella all'interno di questa macchina sarà quella mostrata in figura 8, nella quale si vede come non ci sia una effettiva traiettoria di equilibrio e la particella viene espulsa dalla macchina (in effetti la risonanza con ν_r unitario viene utilizzata nei ciclotroni classici per facilitare l'estrazione).

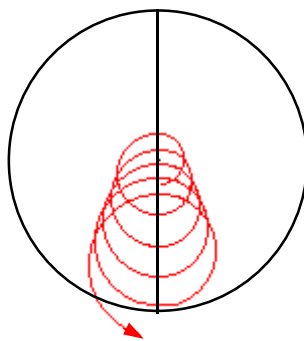


Figura 8

Ovviamente quanto detto per il moto radiale può essere ripetuto per il moto verticale, nel qual caso si dovrà introdurre un'imperfezione nel campo del tipo:

$$\delta B_r = b_k^r \cos(k\vartheta)$$

che comporterà una forzante del tipo:

$$\delta F_z = -qv_g \delta B_r$$

e ancora $\nu_z = k$ sarà una risonanza.

Risonanze: teoria e classificazione.

Risonanze intrinseche

Oltre alle risonanze da imperfezione è necessario occuparsi delle risonanze intrinseche, ovvero di quelle risonanze che appaiono strutturalmente nell'hamiltoniano; tra queste, una risonanza di particolare interesse è quella di Walkinshaw

$$\nu_x = 2\nu_z$$

Facendo dunque riferimento ad un sistema con campo assialmente simmetrico, l'equazione del moto verticale, includendo i termini di ordine superiore, sarà del seguente tipo:

$$\frac{d^2 z}{d\vartheta^2} + \nu_z^2 z = \varepsilon x z$$

dove ε sia un coefficiente piccolo.

Utilizzando dunque la tecnica perturbativa per risolvere l'equazione si sostituisce al secondo membro una soluzione lineare espressa come:

$$\varepsilon x z = \varepsilon \cos(\nu_x \vartheta) \cos(\nu_z \vartheta) = \frac{\varepsilon}{2} [\cos(\nu_x + \nu_z) \vartheta + \cos(\nu_x - \nu_z) \vartheta]$$

Alla risonanza, ovvero quando:

$$\nu_x - \nu_z = \nu_z$$

si avrà:

$$\frac{d^2 z}{d\vartheta^2} + \nu_z^2 z = \varepsilon' [\cos(3\nu_z \vartheta) + \cos(\nu_z \vartheta)]$$

che non è dunque altro che l'equazione di un oscillatore armonico con un termine forzante (e la cui soluzione, dunque, esplose). Giunti a questo punto non si è trovata una soluzione ma si è stabilito che potrebbe esserci un problema.

Sarebbe ora possibile dimostrare che esiste un invariante per il moto accoppiato, espresso nel modo seguente:

$$\frac{\nu_x}{R^2} \left[x^2 + \frac{1}{4} z^2 \right] = \text{costante}$$

dove x e z siano ampiezze istantanee di oscillazione. Da questo, ponendo:

$$x(\vartheta) = 0$$

si ricava:

$$\frac{1}{4} z_{\max}^2 = \text{costante}$$

Ponendo invece:

$$z(\vartheta) = 0$$

si ricava:

$$x_{\max}^2 = \text{costante}$$

Se ne ricava dunque che:

$$z_{\max} = 2x_{\max}$$

e quindi, in ogni caso, il moto, che sembra instabile, è in realtà limitato (è come se i due moti lungo x e lungo z si scambiassero energia).

Un analogo meccanico della risonanza di Walkinshaw è il pendolo a molla mostrato in figura 1.

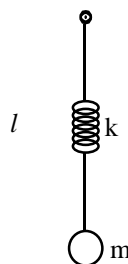


Figura 1

La condizione di risonanza sarà:

$$\omega_v = 2\omega_h$$

e quindi:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Se dunque il pendolo sta oscillando in direzione orizzontale, dopo un certo periodo si metterà ad oscillare verticalmente per poi tornare ad oscillare orizzontalmente e così via.

Trattazione generale delle risonanze

Si consideri l'hamiltoniano di un doppio oscillatore armonico con un termine di accoppiamento:

$$H = H_0 + H_1$$

dove H_0 sia l'hamiltoniano dell'oscillatore disaccoppiato:

$$H_0 = \frac{1}{2} [p_x^2 + v_x^2 x^2 + p_y^2 + v_y^2 y^2]$$

mentre H_1 sia il termine di accoppiamento:

$$H_1 = a_p x^l y^m \cos(p\vartheta)$$

con l ed m interi positivi. Per semplificare la notazione si suppone che $x(\theta)$ e $p_x(\theta)$ siano dimensionali, ovvero che sia:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x(\vartheta)}{R} \\ \frac{dx(\vartheta)}{Rd\vartheta} = \frac{p_x}{p} \end{array} \right.$$

Il termine di accoppiamento è composto da termini che tengono conto delle imperfezioni del campo (ovvero il coseno di $p\theta$ con l ed m nulli), dei termini di ordine superiore (ovvero x^l oppure y^m con l oppure m e p non nulli) e dei termini di accoppiamento ($x^l y^m$ con p non nullo).

La condizione generale relativa alla risonanza sarà dunque:

$$lv_x \pm mv_y = p$$

con l , m e p interi. Si nota dunque come ci siano due tipi di risonanze:

- Le risonanze somma:

$$lv_x + mv_y = p$$

con p positivo o negativo (si torna poi a dei valori positivi tramite sviluppi di Fourier). In questo caso l'invariante è:

$$lv_y y^2 - mv_x x^2 = 2IJ_0 = \text{costante}$$

Le ampiezze istantanee x ed y possono dunque crescere indefinitamente (in questo semplice modello) e quindi queste risonanze sono estremamente pericolose e non possono essere attraversate.

- Le risonanze differenza:

$$lv_x - mv_y = p$$

con p positivo. In questo caso l'invariante è:

$$lv_y y^2 + mv_x x^2 = 2IJ_0 = \text{costante}$$

In questo caso le ampiezze istantanee sono sempre limitate (in quanto la somma dell'energia relativa ai due moti è comunque una costante) e quindi tali risonanze sono meno pericolose e possono essere attraversate.

L'ordine q della risonanza è definito come:

$$q = l + m$$

Quando q è pari a 0, 1 o 2 si parla di risonanza lineare, quando è maggiore di 3 si parla di risonanza non lineare. Per macchine non eccessivamente grosse le risonanze oltre il quinto ordine non sono problematiche, mentre per macchine grosse (si ricordi quanto visto a proposito del Fermilab) anche le risonanze di ordine superiore devono essere tenute presenti.

In figura 2 è mostrato un tipico reticolo nel quale si deve scegliere il punto di lavoro; come si nota, la presenza delle risonanze impone che il punto di lavoro sia scelto lungo la diagonale principale in zone piuttosto ristrette, soprattutto tenendo conto degli shift dovuti alla aromaticità, agli effetti di carica spaziale e, nei beam collider, alle interazioni beam-beam e beam-walk (nella figura i termini che qui sono stati chiamati l ed m sono indicati con a e b). In figura 3 è invece possibile vedere una parte del reticolo relativo alla scelta del punto di lavoro relativo al caso particolare dell'SPS del CERN di cui si è parlato in precedenza.

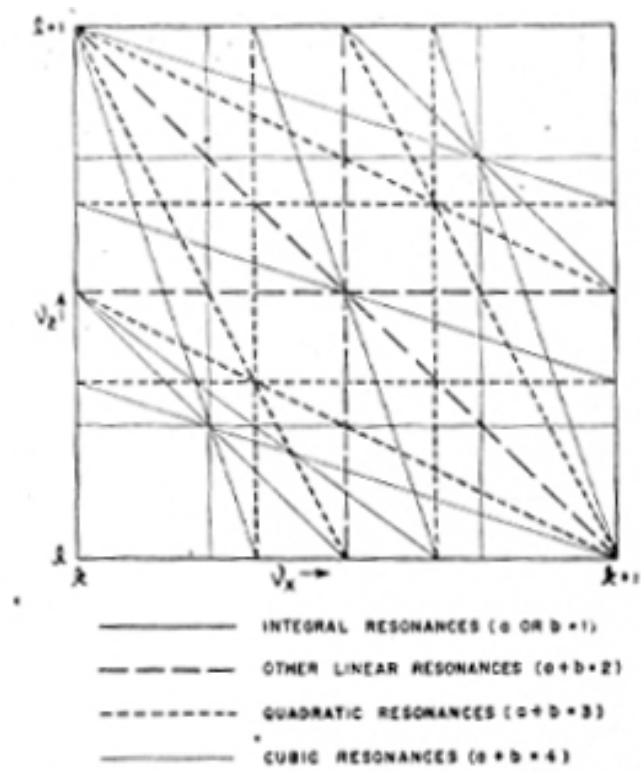


Figura 2

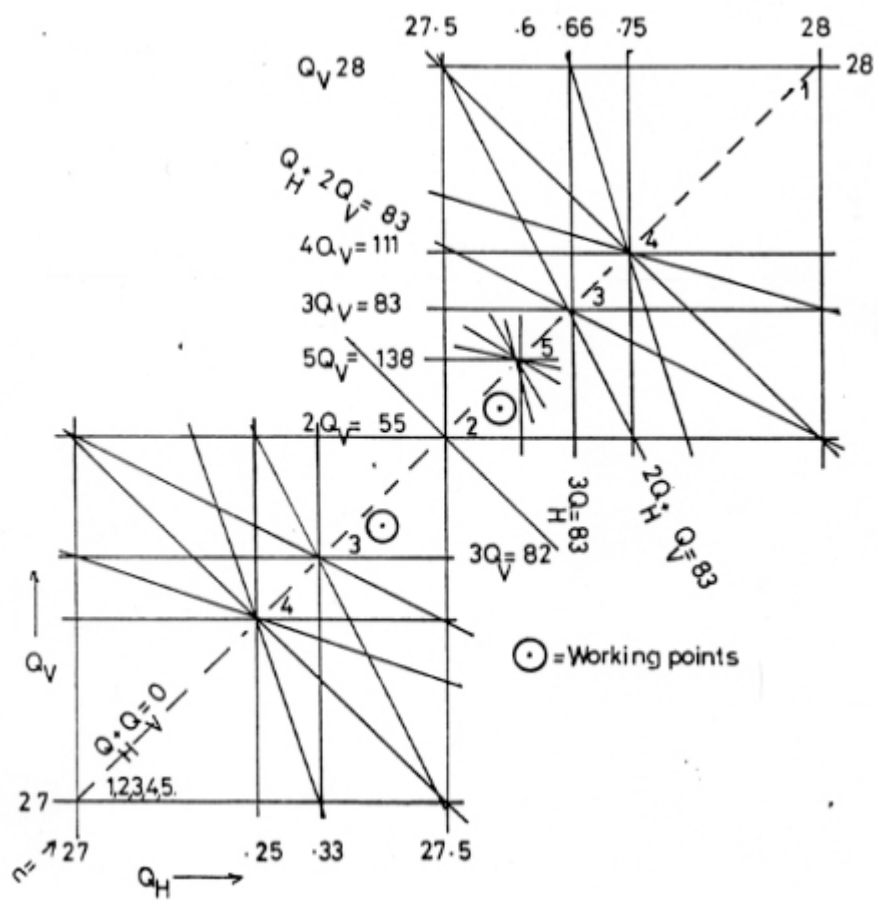


Figura 3

Risonanze trasverse

Le risonanze trasverse vengono gestite tramite la trasformazione di Floquet. Una trattazione di questo argomento si può trovare su "An Introduction to the Physics of High-Energy Accelerators" di Donald A. Edwards e M.J. Syphers. John Wiley & Sons, 1993, New York alle pagine 110-115 Nel seguito vengono sottolineati solamente gli aspetti principali. Si consideri dunque la soluzione dell'equazione del moto:

$$x(s) = A\sqrt{\beta(s)}\cos[\varphi(s) + \delta]$$

Se si definisce una fase ridotta

$$\phi = \frac{\varphi}{\nu}$$

tale ϕ sarà una variabile che cresce di 2π per ogni giro. Anche se ϕ non è in effetti un vero angolo polare misurato dal centro del cerchio, si comporta come se lo fosse. Se ora si definisce una nuova variabile dipendente ξ espressa come:

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\beta}}$$

si avrà:

$$\xi(\phi) = A\cos(\nu\phi + \delta)$$

e l'oscillazione di betatrone libera si riduce ad un semplice moto armonico, con ν oscillazioni per ogni avanzamento di ϕ pari a 2π . L'equazione del moto per ξ sarà allora, semplicemente:

$$\frac{d^2\xi}{d\phi^2} + \nu^2\xi = 0$$

La sostituzione delle coordinate x ed s con ξ e ϕ è chiamata trasformazione di Floquet, i cui benefici diventando evidenti reinserendo il termine perturbante, per il quale si otterrà dunque:

$$\frac{d^2\xi}{d\phi^2} + \nu^2\xi = -\nu^2\beta^{3/2}\frac{\Delta B(\xi, \phi)}{B\rho}$$

dove ΔB rappresenta tutte le irregolarità del campo di cui non si tiene conto nella realizzazione dell'orbita di riferimento. Utilizzando dunque le coordinate ξ e ϕ diventa disponibile tutta la serie di metodi matematici dedicati allo studio degli oscillatori armonici.

Il passo successivo è ovviamente quello di esprimere in modo corretto il termine ΔB ; per una serie di motivi appare utile utilizzare una espansione in multiplo del tipo:

$$\Delta B = B_0(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots)$$

dove i vari b_n rappresentano i coefficienti di multiplo; dunque b_0 è l'errore di dipolo, b_1 l'errore di quadrupolo, b_2 fa riferimento al termine di sestuplo e così via. Combinando dunque le ultime due relazioni scritte si ricava:

$$\frac{d^2\xi}{d\phi^2} + \nu^2\xi = -\frac{\nu^2 B_0}{B\rho} \left[\left(\beta^{3/2} b_0 \right) + \left(\beta^{4/2} b_1 \right) \xi + \left(\beta^{5/2} b_2 \right) \xi^2 + \dots \right]$$

A questo punto la risoluzione prosegue esprimendo il prodotto delle ampiezze e dei coefficienti di multiplo tramite delle serie di Furie.

Complessivamente, facendo anche riferimento all'altra dimensione, si arriva alla relazione:

$$M\nu_x + N\nu_y = P$$

Lattice con un elemento non lineare

A livello analitico, gli elementi non lineari non possono che essere affrontati uno per volta, si fa dunque riferimento al seguente estratto di un articolo di Peggs & Talman.

When the equation of betatron motion

$$y'' + k(s)y = 0$$

is appropriately generalized, it becomes nonlinear and, as a result, much harder to solve. Some, but not all, of the difficulties can be illustrated by analyzing a system with one thin non linear element in an otherwise linear lattice. This example, which can be solved exactly for modest amplitudes, is addressed next.

It is known that any conservative dynamical system with two degrees of freedom can, using Poincaré surface-of-section (che altro non sono che le rappresentazioni sullo spazio delle fasi fino ad ora viste), be reduced to a transfer map such as

$$X_2 = MX_1$$

as regards small deviation from a repetitive motion, and to generalized non-linear transfer map for larger amplitudes. Problems falling into this category include the three body problem of astronomy, satellite orbits and oscillations, and magnetically trapped particles. Hénon has plausibly distilled all such maps down to a unique simplest nontrivial form, and studied that map both theoretically and numerically. It had previously been studied, but this work was not particularly influential in accelerator physics, perhaps because it was too specialized. Here, following an independent development, we specialize appropriately to obtain equations of Hénon's form so that we can use his results directly.

An observer stationed at a fixed point in an accelerator observing one-dimensional (say horizontal) motion can plot the phase space x_t, x'_t for successive turns t , to make a Poincaré plot. The symbol t has been chosen because the turn number is a kind of quantized time, with the time unit being the revolution period in an accelerator. It will, however, always be an integer. Suppose that there is a non-linear element situated at the observation point administering a deflection $\Delta x'$ that acts half before and half after that point. Propagation around the rest of the ring is described by:

$$\begin{bmatrix} x \\ x' - \frac{\Delta x'}{2} \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} C_0 + \alpha S_0 & \beta S_0 \\ -\gamma S_0 & C_0 - \alpha S_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x' + \frac{\Delta x'}{2} \end{bmatrix}_t \quad (1)$$

which gives the state vector on the $(t+1)$ st passage, and where we have abbreviated

$$\begin{cases} C_0 = \cos \mu_0 \\ S_0 = \sin \mu_0 \\ C = \cos \mu \end{cases}$$

In what follows C_0 will emerge as a more convenient variable than μ_0 . the subscript 0 has been added to μ so that it will be notationally possible to distinguish between μ_0 , the unperturbed value, and μ , which includes any frequency shift for which the perturbation is responsible.

Equation (1) is a nonlinear transfer map or, in other words, two coupled first-order difference equations in the two variables x_t and x'_t . An equivalent second-order difference equation in the one unknown x_t can be obtained. To eliminate x'_t write the equation analogous to equation (1) but expressing the time-reversed propagation from t to $t-1$. Adding this to equation (1) yields

$$x_{t+1} - 2C_0 x_t + x_{t-1} = \beta S_0 \Delta x'_t$$

Further algebraic manipulation yields the formula

$$x'_t = \frac{x_{t+1} - x_{t-1} - 2\alpha S_0 x_t}{2\beta S_0}$$

by which the slope can be found once the position is known.

We now write an explicit formula for $\Delta x'_t$:

$$\Delta x'_t = b'_2 x_t^2 + b'_3 x_t^3$$

where the first term yields the Hénon map. One further term is retained to illustrate a respect in which the Hénon map is not typical of all linearities. In order to obtain precisely the Hénon map one takes

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \\ b'_2 = 1 \\ b'_3 = 0 \end{cases}$$

Much of this specialization results merely from choosing units such that $b'_2 \beta^2 = 1$. One is left with a two dimensional quadratic map depending on one parameter, μ_0 , which in our context is called 2π times the tune. Typical results from Hénon are shown in Figure 4. These are Poincaré maps for particular tune values. Three qualitatively different types of motion are observed, corresponding to regions of parameter space that can be labelled I, II and III, nearly (but not completely) in order of ascending amplitude. The qualitative features are that for all time the points either

I. lie on regular closed smooth curves;

II. lie on islands, jumping from island on successive turns; or

III. follow chaotic trajectories, jumping around erratically and sometimes diverging eventually to infinity.

The way the regions change as the tune Q_0 is varied is shown in figure 5. Regions of type I are indicated by shaded, type II by black, and type III by blank regions. In this plot it is w , the distance from the origin along the axis of symmetry of the map, that is used to characterize the particle amplitude; it is plotted as

the vertical coordinate. Acceptable accelerator operation would be anticipated in region I, and possibly in region II.

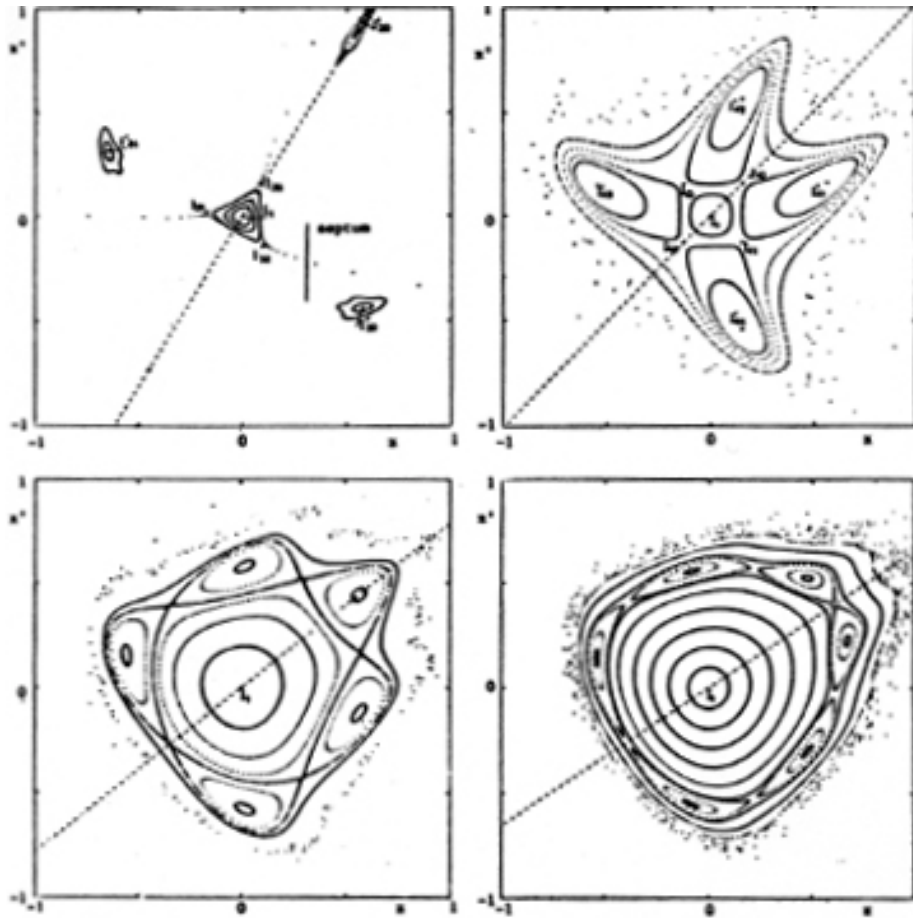


Figure 4 Numerical results from Hénon from iterative his map. (a) $Q_0=0.324$, close to $1/3$. About ten chaotic large amplitude points have been removed from this plot to avoid confusion in the discussion of resonant extraction. (b) $Q_0=0.2516$, close to $1/4$. (c) $Q_0=0.211$, close to $1/5$. (d) $Q_0=0.185$, close to $1/6$.

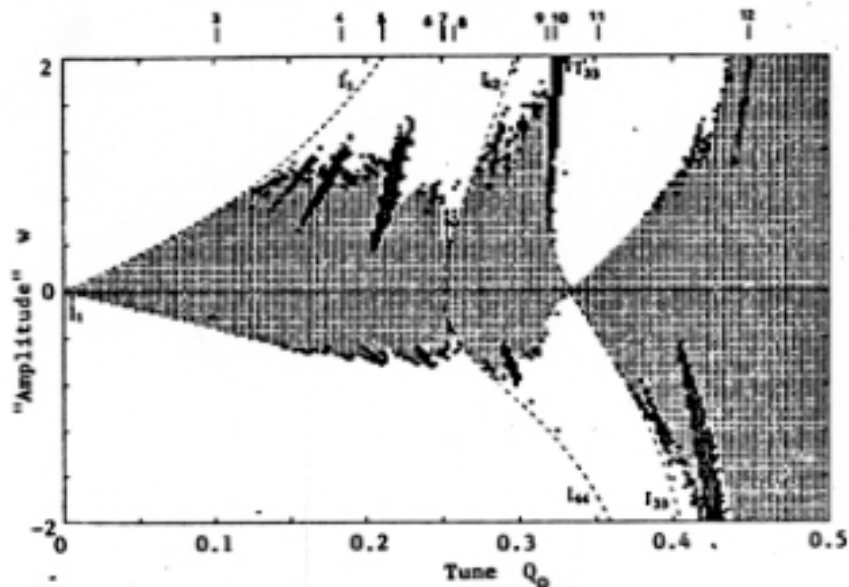


Figure 5 Synopsis of Hénon's numerical maps, showing the dependence on tune of region I (shaded), region II (black), and region III (blank).

Focalizzazione longitudinale: stabilità di fase per macchine circolari, adiabatic damping.

Stabilità longitudinale

In molti acceleratori il guadagno energetico è un processo discreto ottenuto tramite l'attraversamento, da parte di un fascio bunched, di cavità a radiofrequenza nelle quali il campo è una funzione del tempo del tipo:

$$E(z, t) = E_z(z) \sin(\omega_{RF} t)$$

Siccome, dunque, le particelle che fanno parte della prima parte del bunch e quelle che invece appartengono alla coda, attraversano la cavità in tempi differenti, esse guadagneranno un'energia differente rispetto alla particella di riferimento che si trova nel centro del bunch medesimo. Tenendo allora conto del fatto che un singolo bunch attraversa circa 100 drift tube in un linac, passa per qualche migliaio di volte nella medesima cavità accelerante in un ciclotrone, compie centinaia di migliaia di giri in un sincrotrone e addirittura qualche milione (se non miliardo) di rivoluzioni in uno storage ring, risulta ovvio domandarsi se lo spread energetico provocato dal passaggio attraverso ogni cavità accelerante non possa essere causa di instabilità del fascio.

Per questioni sia storiche che strutturali, l'analisi della stabilità longitudinale del fascio sarà differente per ogni tipo di macchina, in base alle loro caratteristiche peculiari:

- ciclotroni e sincrociclotroni presentano infatti un campo magnetico B fisso e si basano sull'espansione dell'orbita;
- i sincrotroni sono caratterizzati da un'orbita fissa e da un campo magnetico B variabile;
- nei linac per protoni, che utilizzano dei drift tubes, le particelle sono caratterizzate da una velocità relativamente bassa rispetto a quella della luce (e quindi $\beta \ll 1$);
- negli electron linac, nei quali i drift tubes sono sostituiti da un campo elettrico continuo che sfrutta onde viaggianti, gli elettroni sono ultrarelativistici (e quindi β è praticamente unitario).

La stabilità di fase è sostanzialmente governata dalla seguente relazione:

$$\frac{\Delta \tau}{\tau} = \frac{\Delta L}{L} - \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{\Delta p}{p}$$

dove τ è il periodo dei successivi attraversamenti della particella di riferimento. Sono dunque possibili tre casi:

- si può avere:

$$\frac{\Delta \tau}{\tau} = 0$$

come nel caso del ciclotrone isocrono;

- può essere:

$$\frac{\Delta \tau}{\tau} < 0$$

con τ ω_{RF} costanti, caso tipico dei linac;

- oppure si può avere:

$$\frac{\Delta \tau}{\tau} > 0$$

con τ variabile, situazione classicamente riferibile ai sincrotroni.

Prima di analizzare in maniera un po' più dettagliata il problema della stabilità longitudinale è importante fare alcune considerazioni generali.

Come prima cosa è importante chiarire che in alcuni acceleratori, come i ciclotroni sincroni, la stabilità di fase non esiste, nonostante questo l'acceleratore funziona perfettamente; per altri acceleratori, come gli electron linac, la stabilità di fase non viene utilizzata fino a quando la velocità v delle particelle non è praticamente identica alla velocità della luce, a questo punto c diventa anche la velocità di fase dell'onda viaggianti. Altri acceleratori ancora, come i sincrociclotroni, i sincrotroni e i proton linac, si ha una possibile scelta tra due alternative:

1. avere la stabilità di fase e ridurre la massima energia guadagnabile,
2. oppure non avere la stabilità di fase (ovvero avere una leggera instabilità) ma non sacrificare l'energia.

Nel caso dei proton linac bisogna poi tenere conto del fatto che esiste un forte accoppiamento longitudinale-trasversale in quanto la focalizzazione in direzione longitudinale porta ad un effetto defocalizzante in direzione trasversa. Conseguentemente la dinamica del fascio è abbastanza complessa e specializzata. Nel caso dei sincrotroni l'accoppiamento tra le due direzioni può, in prima approssimazione, essere trascurato, in quanto esiste una marcata differenza nella scala, essendo:

$$\begin{cases} v_s \ll 1 \\ v_s \ll v_x \\ v_s \ll v_y \end{cases}$$

Quando dunque si considera il moto trasverso è possibile considerare costante il moto lungo la direzione longitudinale; considerando, invece, il moto longitudinale è possibile ignorare le oscillazioni lungo la direzione trasversale in quanto queste sono talmente veloci che la loro media è trascurabile. Nei sincrotroni la risonanza è formalmente indicata dalla relazione:

$$lv_x + mv_y + nv_s = p$$

dove il termine nv_s è molto minore di 1 per $|n| < 5$ e quindi è assolutamente trascurabile. Differente è la situazione degli storage ring nei quali bisogna tener conto anche di termini di ordine superiore (negli storage ring le cavità RF vengono mantenute accese anche se il fascio non viene ulteriormente accelerato in modo da mantenerlo bunchato). Le risonanze che tengono conto anche del termine v_s sono dette risonanze di sincrobetatrone.

Fattore di transito

Nei ciclotroni e nei drift tubes dei linac il campo è confinato in piccole regioni chiamate gap; nelle figure 1 e 2 sono mostrati i gap in sezioni per tali due situazioni con l'andamento del campo.

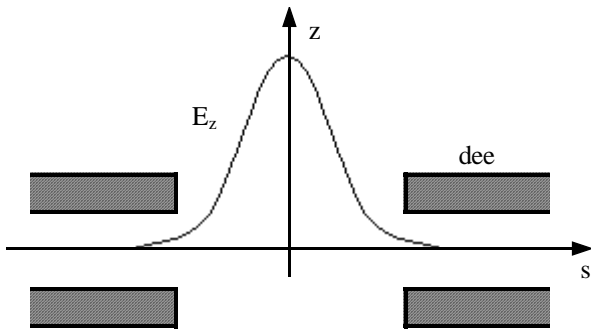


Figura 1

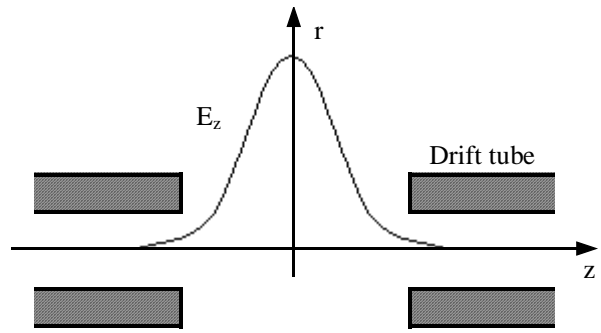


Figura 2

Il voltaggio totale del gap (che è anche il massimo guadagno possibile) può essere definito nel modo seguente:

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} E_z(z) dz$$

Il guadagno di energia relativo al drift tube (guadagno effettivo) è allora:

$$\Delta E = q \int_{-\infty}^{\infty} E_z(z) dz$$

essendo:

$$\begin{cases} E(z, t) = E_z(z) e^{i\omega t} \\ dz = v dt \end{cases}$$

Molto spesso si considera la distribuzione a campana che caratterizza la funzione $E_z(z)$ come una gaussiana, il che permette di fare delle approssimazioni. Il guadagno energetico di una particella può dunque essere espresso in una delle due forme seguenti. Per sincrotroni ed electron linac si avrà:

$$\Delta E = qVT \sin \varphi \quad (1)$$

mentre per ciclotroni e proton linac si avrà:

$$\Delta E = qVT \cos \varphi \quad (2)$$

dove V è, appunto, il massimo voltaggio del gap, T prende il nome di fattore di transito (sempre inferiore all'unità) e φ è la fase del fascio al centro del gap. Nei sincrotroni il picco di energia si avrà per φ pari a $\pi/2$ (motivo per il quale si utilizza il seno) mentre nei proton linac il picco sarà in corrispondenza di φ nullo (motivo per il quale risulta più comodo utilizzare il coseno).

A volte, nei ciclotroni, si introduce il guadagno di voltaggio al picco, definito come:

$$\hat{V} = VT$$

Le relazioni (1) e (2) possono essere interpretate come il massimo guadagno di energia in funzione del voltaggio massimo V , della velocità della particella (T varrà 1 quando la velocità della particella tende all'infinito) e del tempo caratteristico dell'RF e dell'attraversamento del gap (il termine di fase).

Ciclotrone isocrono

Nel caso del ciclotrone isocrono, come si è accennato in precedenza, non esiste la stabilità nello spazio delle fasi longitudinale essendo:

$$\begin{cases} \omega_{rev} = \omega_0 \\ \omega_{RF} = h\omega_0 \end{cases}$$

con ω_0 costante. Dunque, essendo, per i ciclotroni:

$$\Delta T = q\hat{V} \cos \varphi$$

si avrà, dati N giri:

$$E_f = Nq\hat{V} \cos \varphi_i + E_i$$

e anche:

$$\delta E_f = -Nq\hat{V} \sin \varphi_i \delta \varphi + \delta E_i$$

Al primo ordine non c'è dunque nessuna variazione di energia; un'espansione al secondo ordine per il coseno di φ porta allora a:

$$\Delta E_f = -\frac{1}{2} Nq\hat{V} (\Delta \varphi)^2 + \Delta E_i$$

Lo spread di energia finale è dunque legato solamente all'ampiezza di fase del bunch, essendo:

$$\frac{\Delta E_f}{E_f} \cong -\frac{1}{2} (\Delta \phi)^2$$

Come si può notare dalla rappresentazione grafica di figura 3, il comportamento è completamente non lineare (con effetti del secondo ordine).

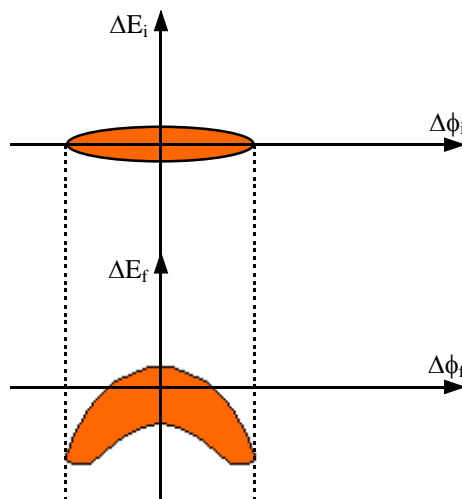


Figura 3

Nella tabella 1 sono raccolti alcuni dati relativi allo spread energetico in funzione di diversi valori di lunghezza del bunch.

$\Delta\phi$	$\Delta E/E$
0°	-
$\pm 1^\circ$	$\pm 1.5 \cdot 10^{-4}$
$\pm 5^\circ$	$\pm 3.8 \cdot 10^{-3}$
$\pm 10^\circ$	$\pm 1.5 \cdot 10^{-2}$

Tabella 1

Proton Linac

Nel tank di un Alvarez Linac l'accelerazione ha luogo solamente nel gap e quindi il problema può essere studiato solo numericamente, sfruttando un'integrazione esatta del moto delle particelle all'interno del gap e il moto di drift all'interno del drift tube. Per ottenere un'equazione analitica continua differenziale esistono due tecniche equivalenti:

- usare una qualche forma di smooth approximation;
- decomporre l'onda stazionaria in componenti viaggianti in avanti e all'indietro e considerare solamente i termini dominanti per l'accelerazione.

La smooth approximation si basa sul fatto che, con riferimento a quanto mostrato in figura 4, il potenziale V lungo il gap è variabile e cresce con la lunghezza del drift tube, così che il campo elettrico ottenuto mediando il potenziale lungo tutta la lunghezza del drift tube sia praticamente costante.

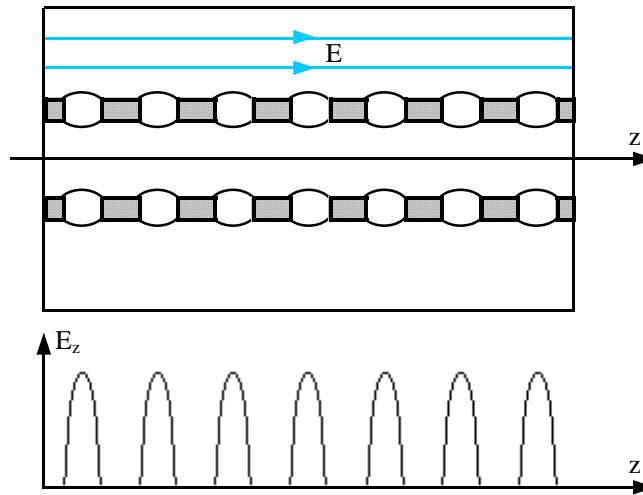


Figura 4

Il campo elettrico così definito è chiamato, una volta moltiplicato per il fattore di transito T che è quasi costante per ogni gap, campo accelerante:

$$E_{acc} = E_0 T = \frac{V_{drift}}{L_{drift}} T = \frac{V_{\tan k}}{L_{\tan k}} T$$

Sfruttando dunque la smooth approximation, nel caso di un proton linac si ha, detta φ la fase (che è una variabile continua) la seguente espressione del guadagno energetico:

$$\frac{dE}{ds} = q(E_0 T) \cos \varphi$$

Per quanto riguarda la particella sincrona (ovvero la particella di riferimento) si avrà allora:

$$\begin{cases} \frac{dE_s}{ds} = q(E_0 T) \cos \varphi_s \\ \frac{d\varphi_s}{ds} = 0 \end{cases}$$

dalla seconda delle quali si ricava, ovviamente, che φ_s è costante. L'equazione del primo ordine per una particella generica, essendo:

$$\begin{cases} \Delta E = E - E_s \\ \Delta \varphi = \varphi - \varphi_s \end{cases}$$

saranno:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} (\Delta E) = q(E_0 T) (\cos \varphi_s - \cos \varphi) \\ \frac{d}{ds} (\Delta \varphi) = \frac{\omega}{c} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta_s} \right) \end{cases}$$

L'ultima relazione si comprende osservando come sia:

$$\varphi - \varphi_s = \omega_{RF}(t - t_s) = \omega_{RF} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_s} \right) s$$

Linearizzando al primo ordine (il che impone che φ sia molto minore di 1), si ricava:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}(\Delta E) = -q(E_0 T) \sin \varphi_s \Delta \varphi \\ \frac{d}{ds}(\Delta \varphi) = -\frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{\beta_s^3 \gamma_s^3} \cdot \frac{\Delta E}{m_0 c^2} \end{cases}$$

Considerando costante il termine $\beta\gamma$ (e quindi facendo riferimento alle piccole oscillazioni) si può sfruttare la relazione:

$$\frac{d^2 \Delta \varphi}{ds^2} + k_s^2 \Delta \varphi = 0$$

dove sia:

$$k_s^2 = -\frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{\beta_s^3 \gamma_s^3} \cdot \frac{q(E_0 T) \sin \varphi_s}{m_0 c^2}$$

Per avere stabilità dovrà quindi essere:

$$\sin \varphi_s < 0$$

mentre l'accelerazione impone che sia:

$$\cos \varphi_s > 0$$

complessivamente, allora, si dovrà avere:

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi_s < 0$$

Solitamente si sceglie un valore di φ_s dell'ordine dei 30° (come si può anche notare facendo riferimento alle tavole di reattore relative ai linac per protoni del CERN e del Fermilab nelle appendici 5 e 9). Non poter utilizzare una fase nulla significa dover rinunciare a sfruttare il massimo guadagno energetico. La soluzione per quanto riguarda la fase sarà allora:

$$\Delta \phi = \Delta \phi_{\max} \cos(k_s s + \delta)$$

mentre per l'energia si avrà:

$$\Delta E = -\frac{q(E_0 T) \sin \varphi_s}{k_s} \Delta \phi_{\max} \sin(k_s s + \delta)$$

Per quanto riguarda allora le autoellissi si può arrivare alle seguenti espressioni (battezzando ε_z l'emittanza longitudinale):

$$\begin{cases} \Delta \phi_{\max} = \sqrt{\varepsilon_z} \sqrt[4]{\frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{\beta_s^3 \gamma_s^3} \cdot \frac{1}{m_0 c^2} \cdot \frac{1}{q E_0 T \sin \varphi_s}} \\ \Delta E_{\max} = \sqrt{\varepsilon_z} \sqrt[4]{\frac{c}{\omega} \beta_s^3 \gamma_s^3 m_0 c^2 q E_0 T \sin \varphi_s} \end{cases}$$

Da queste due relazioni appare evidente il problema legato alla semplificazione fatta in precedenza in quanto le uniche cose che possono variare sono β e γ che sono però state in precedenza poste costanti.

Per quanto riguarda l'adiabatic damping si può dimostrare come si ottengano le due seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \frac{\Delta E_f}{\Delta E_i} = \left[\frac{(\beta\gamma)_f}{(\beta\gamma)_i} \right]^{3/4} \\ \frac{\Delta \phi_f}{\Delta \phi_i} = \left[\frac{(\beta\gamma)_i}{(\beta\gamma)_f} \right]^{3/4} \end{cases}$$

L'adiabatic damping può essere dimostrato valido tramite una simulazione numerica basata sulla situazione mostrata in figura 5. La simulazione viene portata avanti sfruttandole seguenti quattro relazioni

$$\begin{cases} \Delta\phi_{n+1} = \Delta\phi_n + (\omega_{RF})_{n+1} \Delta\tau_n \\ \Delta E_{n+1} = \Delta E_n + qV_n (\sin\phi_{n+1} - \sin\phi_s) \\ V_{n+1} = E_{acc} L_n \\ L_n = v_n \tau_s \end{cases}$$

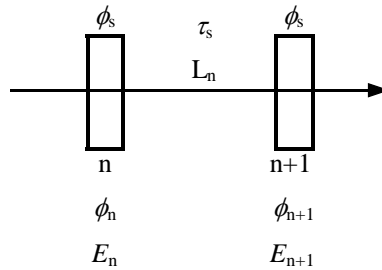


Figura 5

Nel caso di un proton linac ω_{RF} è costante. Utilizzando i dati relativi al proton linac del Fermilab (che si possono ricavare dall'[appendice 9](#)) si osserva un comportamento (si veda la figura 6) che effettivamente ricalca quanto visto per l'adiabatic damping.

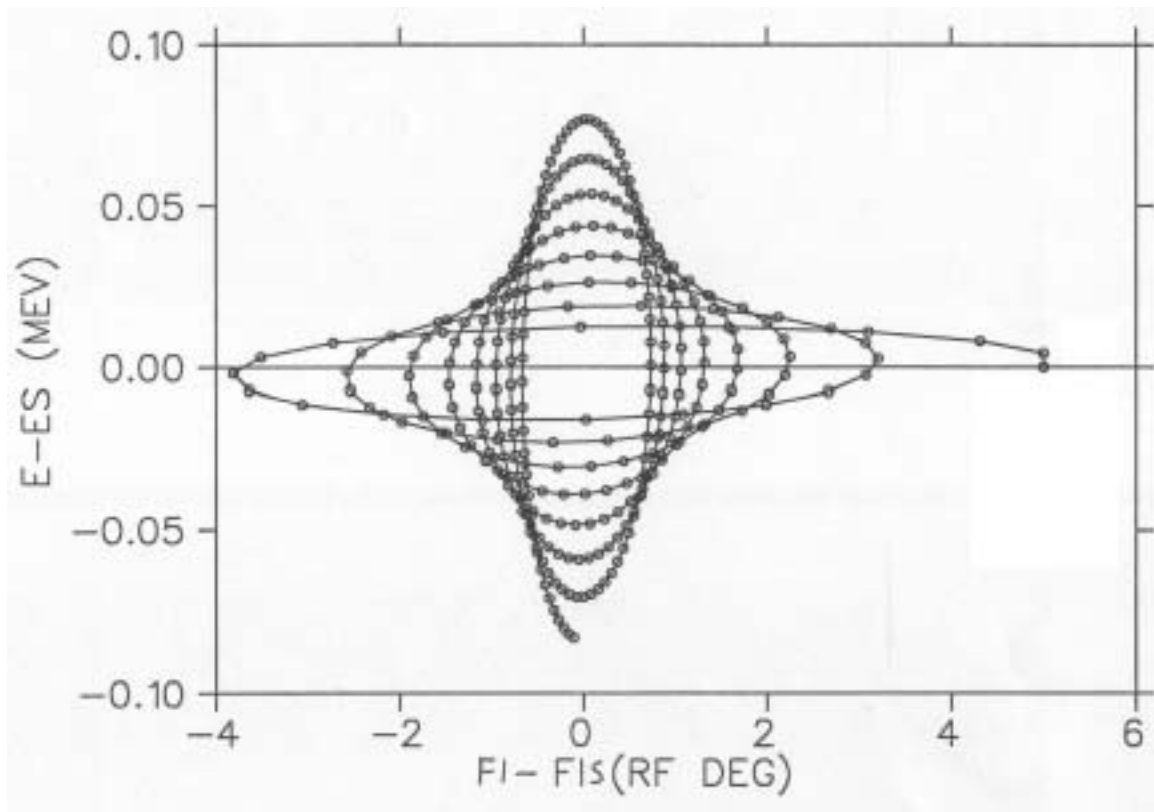


Figura 6

Volendo utilizzare un approccio che sfrutti l'hamiltoniano bisogna tenere conto le variabili canoniche solitamente utilizzate sono $(\Delta E/\omega, \Delta\phi)$. Si otterrà dunque il seguente hamiltoniano:

$$H = -\frac{\omega^2}{c} \cdot \frac{1}{2\beta^3\gamma^3} \cdot \frac{1}{m_0c^2} \left(\frac{\Delta E}{\omega}\right)^2 - \frac{qE_0T}{\omega} (\sin\phi - \phi \cos\phi_s)$$

Le equazioni del moto si ricavano dunque dalle espressioni:

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \left(\frac{\Delta E}{\omega} \right)} \\ \frac{d \left(\frac{\Delta E}{\omega} \right)}{ds} = - \frac{\partial H}{\partial \phi} \end{cases}$$

dove si noti che, essendo ϕ_s costante, sar :

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{d(\Delta\phi)}{ds}$$

Assumendo dunque E_{acc} e $\beta^3\gamma^3$ costante (ovvero considerando accelerazione lenta) si avr  la situazione mostrata in figura 7 nel caso in cui ϕ_s sia dell'ordine di -30° (si parla allora di moving bucket) mentre si otterr  al situazione mostrata in figura 8 nel caso in cui ϕ_s sia pari a $\pi/2$ (nel qual caso non c'  accelerazione e si parla di stationary bucket).

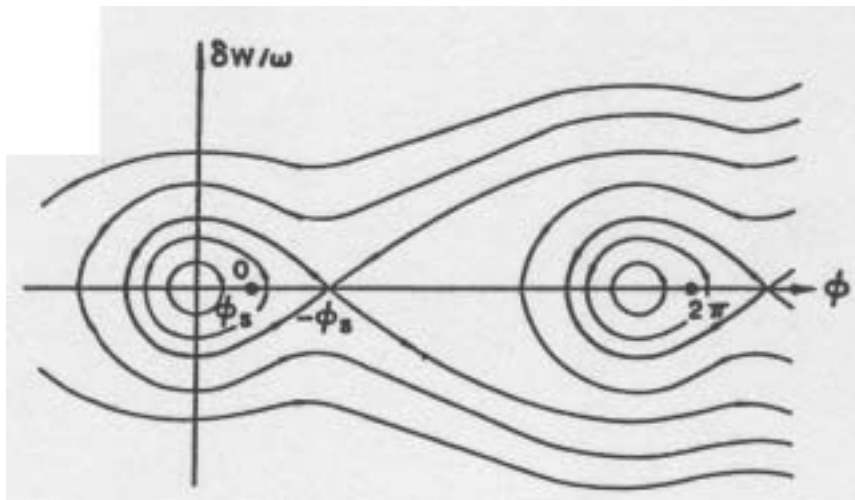


Figura 7

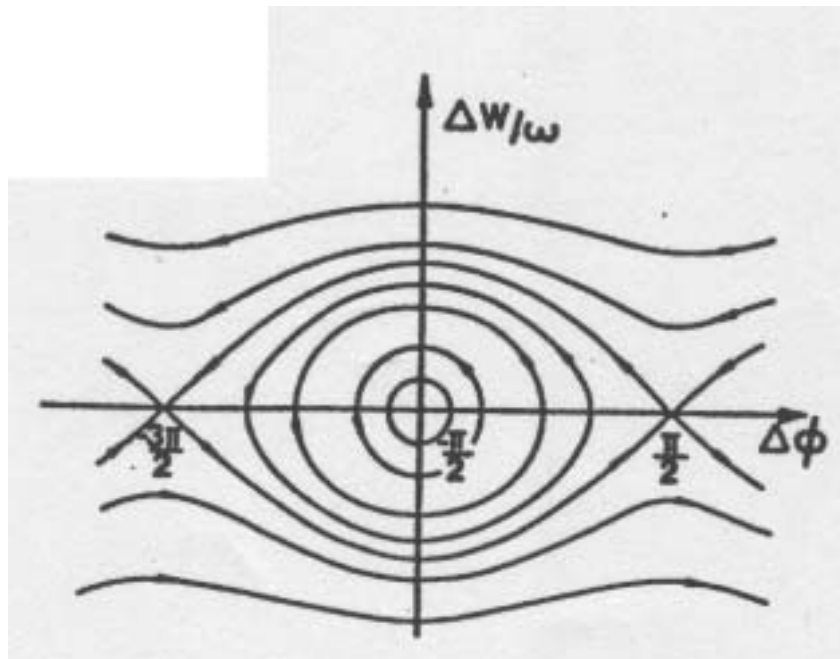


Figura 8