

### L'energia di legame.

#### L'energia di legame.

In base a quanto visto nella lezione precedente la massa di un nucleo con assegnati il numero atomico  $Z$  e il numero di massa  $A$  sarà espressa dalla relazione seguente:

$$M(Z, A) = Zm_H + (A - Z)m_N - \frac{BE}{c^2}$$

Quando si sostituisce al termine  $BE$  l'espressione trovata sfruttando il modello a goccia, si ottiene la formula semiempirica della massa espressa di seguito:

$$M(Z, A) = Zm_H + (A - Z)m_N - \frac{1}{c^2} \left[ a_v A - a_s R_0^2 A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \delta \right] \quad (1)$$

Moltiplicando tutto per  $c^2$  e conglobando nelle costanti moltiplicative tutto ciò che non sia  $Z$  o  $A$  si ottiene:

$$M(Z, A)c^2 = Zm_H c^2 + (A - Z)m_N c^2 - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{sym} \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \delta$$

Per alleggerire la trattazione si suppone che  $A$  sia dispari in modo da non considerare il termine di pairing; rimane così:

$$M(Z, A)c^2 = Zm_H c^2 + (A - Z)m_N c^2 - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{sym} \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$

L'ultima espressione scritta si può riorganizzare in modo da ricavare un'equazione di secondo grado nell'incognita  $Z$ :

$$\left( 4a_{sym} A^{-1} + a_c A^{-\frac{1}{3}} \right) Z^2 - (4a_{sym} - m_H c^2 + m_N c^2) Z + (Am_N c^2 - a_v A + a_s A^{2/3} + a_{sym} A) = M(Z, A)c^2$$

Questa equazione rappresenta, come mostrato in figura 1, una parabola, il cui vertice coincide con il punto in cui, per un dato  $A$ ,  $Z$  sia minimo.

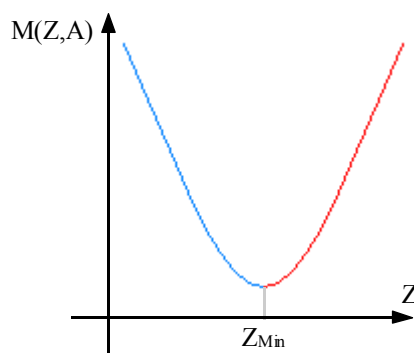


Figura 1

Tale minimo si ottiene ovviamente ponendo:

$$\frac{\partial M(Z, A)}{\partial Z} = 0$$

e trovando:

$$Z_{Min} = \frac{(m_N c^2 - m_H c^2 + 4a_{sym})A}{2(4a_{sym} + a_c A^{2/3})}$$

È importante notare che, siccome il neutrone ha una massa leggermente superiore rispetto a quella dell'atomo di Idrogeno, si avrà:

$$(m_N - m_H)c^2 = 0,78MeV$$

si nota quindi come ci sia una differenza rispetto al caso in cui si considera la sola massa del protone, nel qual caso si avrebbe:

$$(m_N - m_p)c^2 = 1,25MeV$$

perché in questo secondo caso non bisogna tener conto dell'elettrone. Tenendo conto dei valori numerici è possibile fare la seguente approssimazione:

$$Z_{Min} \cong \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{a_C}{a_{sym}} A^{2/3}}$$

Per A piccolo si ha dunque:

$$Z_{Min} \cong \frac{A}{2}$$

mentre quando A cresce la  $Z_{Min}$  diminuisce per arrivare ad attestarsi, per A maggiore di 200, sul valore di 0,39. Dalla parabola di figura 1 si osserva che per ogni A considerata esiste almeno un nuclide con massa minima e i nuclidi con massa maggiore possono diventare quello di massa minima. Sul ramo colorato in azzurro le trasformazioni per andare verso lo  $Z_{Min}$  saranno composte da passi del tipo:

$$\begin{cases} A \rightarrow A \\ Z \rightarrow Z + 1 \\ N \rightarrow N - 1 \end{cases}$$

e si parla quindi di decadimenti  $\beta^-$  nei quali, per soddisfare il principio di conservazione della carica, verrà emessa una carica negativa attraverso un elettrone. Sul ramo colorato di rosso, invece, le trasformazioni per andare verso  $Z_{Min}$  saranno passi del tipo:

$$\begin{cases} A \rightarrow A \\ Z \rightarrow Z - 1 \\ N \rightarrow N + 1 \end{cases}$$

e quindi si è in presenza di decadimenti  $\beta^+$  nei quali, sempre per soddisfare il principio di conservazione della carica, verrà emessa una carica positiva attraverso un positrone. Il più semplice emettitore  $\beta^-$  è l' $^3H$ . Nell'immagine di figura 2 è mostrata la disposizione, sulla carta dei nuclidi, degli emettitori  $\beta^-$  (area in azzurro) e degli emettitori  $\beta^+$  (area in rosso).

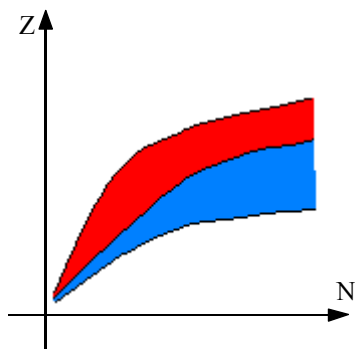


Figura 2

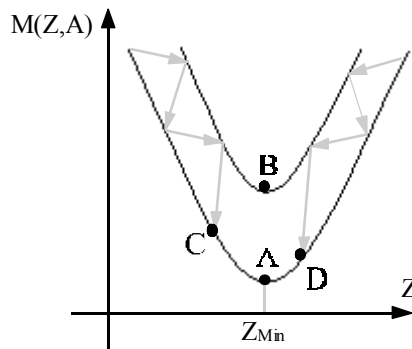


Figura 3

Scegliendo un nuclide con A pari, non è possibile trascurare, nell'equazione (1), il termine  $\delta$ ; come conseguenza di questo si arriva ad ottenere non una ma due parabole, distanziate di un termine  $2\delta$ , come mostrato in figura 3. La parabola superiore è quella dei dispari-dispari mentre quella inferiore è quella dei pari-pari. Il decadimento avviene in questo caso seguendo le frecce indicate e si può notare che una volta giunti nei punti C e D non è più possibile andare in A perché si dovrebbe passare per B (il che, però, implicherebbe un aumento della massa); C e D sono dunque due punti stabili ovvero i due minimi di questa situazione. Il minimo della curva dispari-dispari (ovvero il punto B) non è necessariamente stabile e infatti può decadere  $\beta^-$  o  $\beta^+$ . Esiste infine la possibilità che da C si passi direttamente a D attraverso quello che viene chiamato doppio decadimento  $\beta$ . Nuclidi stabili per il decadimento  $\beta$  non sono però necessariamente nuclidi stabili in assoluto in quanto esistono diversi altri tipi di decadimento.

*La validità della formula semiempirica delle masse può essere testata con alcuni esempi numerici che ne metteranno in luce anche i limiti; si osserva dunque che, inserendo i valori numerici visti in precedenza, la formula assume la seguente forma:*

$$BE = 15,5A - 16,8A^{2/3} - 0,72 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - 23 \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta$$

dove sia

$$\delta = 34A^{-3/4}$$

Si consideri inizialmente un nuclide piccolo:  $^{12}_6C$ ; in questo caso il valore teorico sarà il seguente:

$$BE = 91,92MeV$$

dal quale si ricava:

$$\frac{BE}{A} = 7,66MeV$$

Il valore sperimentale sarà invece il seguente:

$$BE = 6m_N + 6m_H - M(^{12}C) = 89,10MeV$$

dal quale si ricava:

$$\frac{BE}{A} = 7,43MeV$$

C'è dunque una buona concordanza. Volendo utilizzare un nuclide medio si può scegliere  $^{56}_{26}Fe$ , nel qual caso il valore teorico sarà il seguente:

$$BE = 489,9MeV$$

dal quale si ricava:

$$\frac{BE}{A} = 8,75MeV$$

Il valore sperimentale sarà invece il seguente:

$$BE = 26m_N + 26m_H - M(^{56}Fe) = 479MeV$$

dal quale si ricava:

$$\frac{BE}{A} = 8,55MeV$$

e quindi anche in questo caso c'è una buona concordanza. Si consideri infine il caso di un nuclide grosso con doppio magico:  $^{208}_{82}Pb$ . In questo caso il valore teorico sarà il seguente:

$$BE = 1603MeV$$

dal quale si ricava:

$$\frac{BE}{A} = 7,71MeV$$

Il valore sperimentale sarà invece il seguente:

$$BE = 82m_N + 82m_H - M(^{208}Pb) = 1712MeV$$

dal quale si ricava:

$$\frac{BE}{A} = 8,23MeV$$

Si nota allora che l'effetto della presenza dei numeri magici è quello di rendere poco confrontabili i risultati sperimentali e quelli teorici. Per comprendere il motivo di questo si faccia riferimento all'energia necessaria per separare un neutrone da un nucleo di  $^{15}_7N_8$  e di  $^{16}_7N_9$ . Nel primo caso l'energia richiesta è data dalla relazione:

$$M(^{14}_7N_7)c^2 - M(^{15}_7N_8)c^2 + m_Nc^2 = 10,83MeV$$

nel secondo caso si ricava invece:

$$M(^{15}_7N_8)c^2 - M(^{16}_7N_9)c^2 + m_Nc^2 = 2,49MeV$$

e quindi si nota che c'è bisogno di una energia decisamente maggiore per togliere il neutrone relativo al primo caso, in quanto formerebbe un numero magico di neutroni. Si utilizza infine l'energia di legame per cercare una conferma della relazione secondo la quale:

$$R = R_0 A^{1/3}$$

e per fare questo si utilizzano i nuclei specchio ovvero quei nuclei nei quali Z ed N sono invertiti, per esempio il nucleo specchio di  $^{15}_7X_8$  è  $^{15}_8X_7$  ovvero, nel caso particolare relativo ai numeri scelti:  $^{15}_7N_8$  e

$^{15}_8\text{O}_7$ . Si valuta dunque la differenza nell'energia di legame  $\Delta E$  relativa a questi due atomi e si osserva che tale differenza è imputabile al termine Coulombiano della formula della massa; dunque si avrà:

$$\Delta E = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} (2Z - 1)$$

Osservando poi che, nel caso dei nuclei specchio vale la relazione:

$$A = Z + Z - 1 = 2Z - 1$$

si ottiene:

$$\Delta E = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R_0} A^{2/3}$$

e da quest'ultima relazione si può ricavare  $R_0$ . Usando alcuni atomi specchio si ottengono i valori raccolti nella tabella 1.

$A$	$\Delta E$ (MeV)
11	0,97
15	1,74
17	1,74
19	2,22
23	3,03
27	3,85
31	4,42
35	4,94
39	5,49
43	5,8

**Tabella 1**

Con questo set di valori sperimentali si ricava:

$$R_0 = 1,24 \text{ fm}$$

molto simile dunque al valore trovato in precedenza.

**Momento angolare nucleare. Parità. Momenti elettromagnetici nucleari. Il Deutone.**

**Momento angolare nucleare.**

Il momento angolare totale di un nucleo è la risultante dei momenti di spin e dei momenti angolari e si indica con il simbolo  $I$ . Generalmente, se  $A$  è dispari,  $I$  sarà sicuramente un semi-intero (in unità  $\hbar$ ) mentre, se  $A$  è pari,  $I$  sarà un intero (in unità  $\hbar$ ). Nuclei con  $A$  pari e  $Z$  pari (i pari-pari) avranno  $I$  nullo nello stato fondamentale. I valori massimi misurati per  $I$  sono 9/2 e 7, da questo si deduce che coppie di nucleoni identici accoppiano i propri momenti angolari in maniera antiparallela e quindi un grosso gruppo di nucleoni annullano il proprio  $I$  e un gruppo ristretto è responsabile dell' $I$  complessivo del nucleo.

**Parità.**

La parità (+,-) si definisce come il fatto che non cambi niente o meno quando si inverte il segno delle coordinate spaziali. Complessivamente si indica il momento angolare e la parità con la seguente simbologia:  $I^\pi$  dove  $\pi$  è, appunto, + o -.

**Momenti elettromagnetici nucleari.**

Ci si sofferma ora sui momenti elettromagnetici nucleari che valutano le interazioni del nucleo con campi elettromagnetici esterni. Da ora in avanti si indicherà con  $L$  il numero di multipolo:  $L=0$  sarà allora un monopolo,  $L=1$  un dipolo,  $L=2$  un quadripolo,  $L=3$  un esapolo,  $L=4$  un ottupolo e così via. I primi tre valori di  $L$  indicati sono molto importanti mentre i valori 3 e 4 sono molto rari ed oltre non c'è quasi niente. Ovviamente è possibile avere un monopolo elettrico ma non un monopolo magnetico e altrettanto ovviamente è possibile avere un dipolo magnetico ma non un dipolo elettrico e così via; in generale, considerando la relazione seguente:

$$\int \psi^* \mu \psi d\mu$$

dove  $\mu$  è il momento di multipolo, si avrà che, se  $\mu$  è dispari i multipoli dispari si annullano mentre avviene il contrario se  $\mu$  è pari. Siccome momenti elettrici e magnetici hanno parità inversa, non ci saranno  $L$  elettrici dispari ed  $L$  magnetici pari. Il momento di multipolo elettrico non è altro che la carica netta posseduta dal nucleo e quindi sarà  $Ze$ ; il successivo momento non nullo sarà il momento di dipolo magnetico, che si può valutare pensando alla situazione classica di un elettrone che, nel compiere la sua orbita, genera un momento magnetico espresso dalla relazione:

$$|\mu| = \frac{e}{2m_e} |\tilde{l}|$$

con

$$|\tilde{l}| = mvr$$

che è il momento angolare classico dell'elettrone. Volendo estendere questa espressione all'ambito nucleare, nel quale ovviamente non ci sono elettroni, si definisce il momento magnetico nell'ambito della meccanica quantistica nel modo seguente:

$$\langle \mu \rangle = \frac{e\hbar}{2m_p} l$$

dove ora  $l$  è un numero quantico. Ricordando la definizione del magnetone di Bohr, secondo la quale:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5,7884 \cdot 10^{-5} \frac{eV}{T}$$

è possibile definire il magnetone nucleare come segue:

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 3,15 \cdot 10^{-8} \frac{eV}{T}$$

e si avrà così:

$$\langle \mu \rangle = \mu_N l$$

Quest'ultima espressione può essere riscritta in maniera più conveniente nel modo seguente:

$$\langle \mu \rangle = g_l \mu_N l$$

dove  $g_l$  prende il nome di fattore  $g$  nucleare (ed è un numero adimensionale); nel caso del protone si avrà:

$$g_l^p = 1$$

mentre per quanto riguarda il neutrone si avrà, data l'assenza di carica elettrica:

$$g_i^n = 0$$

Oltre al contributo relativo al moto orbitale, protoni e neutroni, esattamente come gli elettroni, presentano anche un momento magnetico di spin che non ha un analogo classico ma che viene indicato con una notazione simile a quella precedentemente vista per il caso orbitale:

$$\langle \mu \rangle = g_s \mu_N s$$

con

$$s = \frac{1}{2}$$

Il termine  $g_s$  misurato per protoni e neutroni libero ha il valore riportato di seguito:

$$\begin{cases} g_s^p = 5,585 \\ g_s^n = -3,826 \end{cases}$$

prende il nome di fattore  $g$  di spin e mostra che anche il neutrone, pur non avendo carica, presenta comunque un momento di spin non nullo. Per la teoria di Dirac si potrebbe calcolare che il  $g_s$  dell'elettrone è pari a 2, trovando dunque qualcosa di diverso dai  $g_s^p$  e  $g_s^n$ . Questa è una prima evidenza del fatto che protoni e neutroni non sono elementi elementari; in effetti i nucleoni fanno parte della famiglia degli adroni (famiglia che si differenzia dall'altro importante gruppo: i leptoni). Gli adroni a loro volta si dividono in barioni (formati, come appunto il neutrone e il protone, da tre quark) e i mesoni (formati da un quark e da un antiquark). Alcuni valori numerici per  $\mu$  sono riportati nella tabella 1.

Nuclide	$\mu$ [ $\mu_N$ ]
$n$	-1,913
$p$	2,793
${}^2H$	0,857
${}^{57}Fe$	0,091
${}^{57}Co$	4,74

Tabella 1

Dopo il momento di monopolio elettrico e il momento di dipolo magnetico, il successivo momento non nullo è il momento di quadrupolo elettrico; classicamente si ha:

$$Q = \int_V (3z^2 - r^2) \rho(\vec{r}) dV$$

Facendo riferimento ad un sistema di coordinate di tipo cilindrico si può osservare che, se la distribuzione di carica fosse sferica, il momento di quadrupolo sarebbe nullo in quanto sarebbe:

$$x^2 = y^2 = z^2 = \frac{r^2}{3}$$

Se invece la distribuzione fosse oblata o prolata si avrebbe un momento di quadrupolo maggiore o minore di zero (dunque a partire dal momento di quadrupolo si può capire qualcosa su come è distribuita la carica). Passando al caso quantistico si avrà invece:

$$e\langle Q \rangle = e \int \psi^* (3z^2 - r^2) \psi dV$$

Questa espressione è relativa al singolo protone in quanto, per un neutrone, il momento di quadrupolo elettrico è nullo. Relativamente ai tre casi esaminati nel caso classico (simmetria sferica o deformazione oblata o prolata, che nel caso quantistico si riferirà alla  $|\psi|^2$ ) si avranno i tre seguenti risultati:

$$\begin{cases} Q = 0 \\ Q \div -\langle r^2 \rangle \\ Q \div 2\langle r^2 \rangle \end{cases}$$

Definendo il barn come segue:

$$1b = 10^{-28} m^2 = 100 fm^2$$

si possono considerare i valori numerici listati nella tabella 2.

Nuclide	$Q$ [b]
${}^2H$	0,00288
${}^{17}O$	-0,02578

$^{59}\text{Co}$	0,40
$^{63}\text{Cu}$	-0,209
$^{176}\text{Lu}$	8

Tabella 2

Da tale tabella si osserva che, nel caso di  $^2\text{H}$ , è possibile pensare ad un eccesso di carica lungo l'asse Z in quanto Q è positivo; un medesimo discorso può essere fatto per la terra rara  $^{176}\text{Lu}$ . Al variare di A, i valori numerici citatisi ottengono sfruttando la seguente regola:

$$eQ \leq R_0^2 A^{2/3}$$

che discende dal supporre che sia sempre l'ultimo protone (detto anche protone di valenza) a dare contributo al momento di quadrupolo elettrico.

### Il Deutone.

Il Deutone (o Deuterone) altro non è che il nucleo dell'atomo di Deuterio ovvero  $^2\text{H}$  e cioè un nuclide formato solo da un protone ed un neutrone; tale nuclide è caratterizzato dal non ammettere stati eccitati e quindi si può parlare solo di stato legato o di stato non legato. Per iniziare la trattazione è possibile utilizzare la formula relativa all'energia di legame ed ottenere:

$$BE = -2,22\text{MeV}$$

che da ora in avanti verrà indicata come  $E_B$ . Per studiare il Deutone è necessario ricavare la forma analitica della sua funzione d'onda; per fare questo è per prima cosa necessario stimare la forma del potenziale che, essendo attrattivo si potrà indicare (supponendo di essere nel caso di un campo di forze centrali) come  $V(r)$ . Si può imporre, in analogia con quanto si vede per gli atomi, che lo stato di minima energia del Deutone sia caratterizzato da

$$l = 0$$

Si suppone dunque che il potenziale abbia la forma mostrata in figura 1 e che sia definito nel modo seguente:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \forall r < b \\ 0 & \forall r > b \end{cases}$$

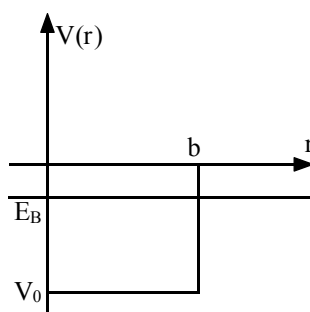


Figura 1

Definendo nel modo seguente la parte radiale della funzione d'onda:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot \frac{u(r)}{r}$$

è possibile arrivare a scrivere la seguente equazione radiale:

$$-\frac{\hbar}{2m} \cdot \frac{d^2 u}{dr^2} + V(r)u(r) = Eu(r)$$

dove m è da intendersi come massa ridotta che, come è noto, è definita nel modo seguente:

$$m = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n} \approx \frac{m_p}{2}$$

in quanto la massa del protone e del neutrone vengono considerate praticamente identiche. L'equazione radiale può ovviamente essere analizzata in due intervalli distinti; nella zona in cui:

$$0 < r < b$$

si avrà:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E_B)u = 0$$

Nella zona 2, invece, ovvero quella con

$$r > b$$

si avrà:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{2m}{\hbar^2} E_B u = 0$$

La soluzione in zona 1 è la seguente:

$$u(r) = A \sin(Kr)$$

con

$$K = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E_B)}$$

In zona 2 invece si ha:

$$u(r) = B e^{-\kappa r}$$

con

$$\kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE_B}$$

Ovviamente è necessario raccordare le due soluzioni nel punto in cui

$$r = b$$

e questo permette di ottenere la seguente equazione trascendente:

$$K \cot g(Kb) = \kappa$$

L'unica soluzione possibile ha allora una struttura come quella mostrata in figura 2.

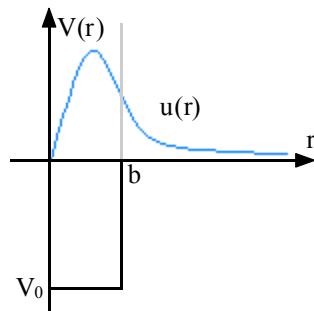


Figura 2

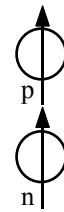


Figura 3

Da esperimenti di scattering elettronico si arriva a dedurre che:

$$b = 2,1 \text{ fm}$$

Risolvendo dunque numericamente l'equazione trascendente trovata si trova:

$$|V_0| = 35 \text{ MeV}$$

Facendo poi i conti con lo  $\psi^2$  si vede che per il 60% del tempo si sta fuori dalla buca; dunque si tende ad utilizzare solo l'equazione radiale nella forma relativa alla zona 2. Il momento I misurato per il Deutone è pari ad 1 e quindi, facendo riferimento alla relazione:

$$I = s_p + s_n + l$$

con  $s_p$  ed  $s_n$  spin del protone e del neutrone, si deduce che, avendo in precedenza posto nullo il numero quantico  $l$ , i due spin si devono sommare (essendo entrambi pari ad  $\frac{1}{2}$ ) e quindi si è in presenza di una situazione con due spin paralleli come quella mostrata in figura 3. Un'altra caratteristica del Deutone che può essere misurata è la parità e si può sperimentalmente arrivare ad affermare che la parità del Deutone è pari; complessivamente si ha dunque:

$$I^\pi = 1^+$$

Dalla meccanica quantistica è noto che vale la relazione:

$$\pi = (-1)^l$$

e si parla dunque di parità pari per  $l$  nullo (stati s) e per  $l=2$  (stati d) e di parità dispari per  $l=1$  (stati p). I risultati che sono stati fino ad ora trovati sono dunque compatibili con la scelta precedentemente fatta di considerare  $l$  nullo ma non escludono il caso con  $l=2$ . Le discrepanze con il modello che prevede  $l$  nullo emergono quando si considerano i valori di  $\mu$  e di  $Q$ ; i valori misurati sono infatti i seguenti:



$$\begin{cases} \mu = 0,857\mu_N \\ Q = 0,00288b \end{cases}$$

mentre i valori che deriverebbero dal modello con  $l$  nullo sarebbero:

$$\begin{cases} \mu = 0,879\mu_N \\ Q = 0 \end{cases}$$

Per arrivare ad ottenere i valori sperimentali è necessario supporre che lo stato fondamentale del Deutone non sia uno stato puro; invece dunque di considerare lo stato  $s$  imposto dall'aver posto  $l$  nullo è necessario considerare anche lo stato  $d$  dovuto ad  $l=2$  e quindi si avrà:

$$\psi = a_s\psi(l=0) + a_d\psi(l=2)$$

dove  $a_s$  e  $a_d$  sono dei pesi e quindi si deve avere che:

$$a_s^2 + a_d^2 = 1$$

Per arrivare ai giusti valori, soprattutto per quanto riguarda  $Q$ , bisogna porre:

$$\begin{cases} 4\% < a_d^2 < 6\% \\ 94\% < a_s^2 < 96\% \end{cases}$$

Si nota dunque che appare un termine non centrale importante.

**Scattering fra nucleoni. Interazione protone-protone e neutrone-neutrone. Il modello a scambio di forze. Il modello a shell.**

**Scattering fra nucleoni.**

Si consideri un fascio di neutroni che incide su Idrogeno molecolare; se l'energia dei neutroni è molto superiore rispetto all'energia di legame si può approssimare tutto il discorso come se si trattasse dell'interazione tra due nucleoni liberi e, per iniziare, si faccia riferimento all'interazione di scattering elastico. Nel sistema di riferimento del laboratorio la situazione mostrata in figura 1 descrive in modo soddisfacente quanto accade.

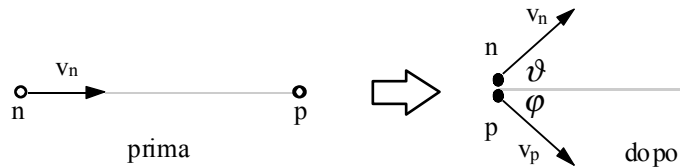


Figura 1

Nel sistema di riferimento del centro di massa si ha invece quanto mostrato in figura 2.

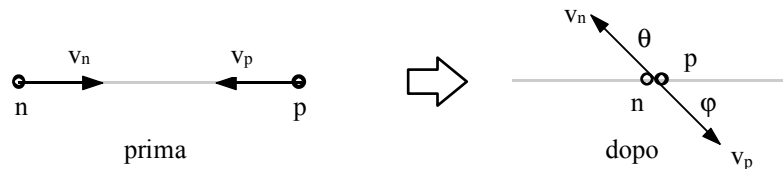


Figura 2

In questa seconda situazione si avrà ovviamente:

$$v_p = \frac{v_0}{2} = v_n$$

I due sistemi di riferimento sono tra loro legati dalle seguenti relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta_{CM} = 2\vartheta_{Lab} \\ \phi_{CM} = 2\phi_{Lab} \\ \phi_{CM} + \vartheta_{CM} = 180^\circ \\ \phi_{Lab} + \vartheta_{Lab} = 90^\circ \\ T_{Lab} = \frac{1}{2}mv^2 \\ T_{CM} = 2 \left[ \frac{1}{2}m \left( \frac{v_0}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{4}mv^2 = \frac{1}{2}T_{Lab} \end{array} \right.$$

Il parametro di impatto  $b$  tra il neutrone e il bordo del protone (essendo il raggio  $R$  della particella bersaglio circa 1fm) sarà:

$$b = R = 1fm$$

Il momento angolare relativo tra i nucleoni deve essere quantizzato in unità  $\hbar$  e quindi si considera la seguente equazione semiclassica:

$$m v b = l \hbar$$

Quando sia:

$$m v b \ll \hbar \tag{1}$$

è possibile supporre che:

$$l = 0$$

Dalla relazione (1) è quindi possibile ricavare:

$$v \ll \frac{\hbar}{mb}$$

alla quale è possibile associare la seguente energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \ll \frac{\hbar}{2mb^2} \cdot \frac{c^2}{c^2} \cong 20MeV$$

Come conseguenza si avrà:

$$T_{CM} = 10MeV$$

È stato dunque trovato un limite superiore per quanto riguarda l'energia al di sotto della quale si hanno interazioni con momento angolare principale nullo. Da ora in poi si farà dunque riferimento ai soli scattering di bassa energia, per i quali è valida l'ipotesi secondo la quale  $l$  è nulla. Si calcola ora la probabilità che lo scattering avvenga, ovvero la sezione d'urto; per fare questo si considerano sia il neutrone che il protone come particelle senza spin e, messo il protone nell'origine del sistema, si faccia riferimento ad un fascio incidente con la seguente funzione d'onda:

$$\psi_{inc} = e^{iKz}$$

con:

$$K = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$$

dove  $m$  sia ancora la massa ridotta. Scomponendo ora in serie di armoniche e limitandosi al primo termine (infatti il termine  $l$  è nullo) si ha:

$$\psi_{inc} = \frac{\sin Kr}{Kr}$$

ovvero, esplicitando il seno in somme di esponenziali:

$$\psi_{inc} = \frac{1}{2iKr} (e^{iKr} - e^{-iKr})$$

in questo modo risultano evidenziate un'onda entrante e un'onda uscente. Tutto ciò che può avvenire in uno scattering elastico è un cambiamento nella fase dell'onda uscente e quindi, definendo lo shift di fase  $\delta_0$ , si ha, ad una certa distanza dall'evento di scattering:

$$\psi(r) = \frac{1}{2iKr} (e^{i(Kr+2\delta_0)} - e^{-iKr})$$

La  $\psi$  di scattering (differenza tra quella incidente e quella scatterata) è dunque:

$$\psi_{Sca} = \psi - \psi_{inc} = \frac{1}{2iK} (e^{i\delta_0} - 1) \frac{e^{iKr}}{r}$$

La densità di corrente di scattering sarà:

$$j_{Sca} = \frac{\hbar}{2mi} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi^*}{\partial r} \psi \right) = \frac{\hbar}{mKr^2} \sin^2 \delta_0$$

mentre per le particelle incidenti si ha:

$$j_{inc} = \frac{\hbar K}{m}$$

La corrente  $j_{Sca}$  è uniformemente distribuita su una sfera di raggio  $r$  e dunque l'elemento di area  $r^2 d\Omega$  sottende, sulla sfera, all'angolo solido

$$d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

a partire dal punto di scattering. La probabilità  $d\sigma$  che una particella scatterata arrivi dunque in  $d\Omega$  sarà:

$$d\sigma = \frac{j_{Sca} r^2 d\Omega}{j_{inc}}$$

dalla quale si ottiene la sezione d'urto differenziale:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sin^2 \delta_0}{K^2}$$

Si nota dunque come non ci sia dipendenza angolare ma solo dallo sfasamento e quindi lo scattering è isotropo. La sezione d'urto complessiva sarà ovviamente:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

ovvero, essendo la sezione d'urto differenziale una costante con il variare dell'angolo (in quanto  $l$  è stata ipotizzata nulla):

$$\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} \int d\Omega = 4\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\pi \sin^2 \delta_0}{K^2} \quad (2)$$

Tutto questo, ovviamente, vale nel sistema del centro di massa. I risultati sperimentali sottolineano la costanza della sezione d'urto  $\sigma$  in quanto si mantiene costante su un valore di circa  $20b$  per un intervallo energetico che va dai 10 eV ai 10 keV, dopodiché ha un andamento discendente. Si consideri ora il caso specifico del potenziale mostrato in figura 3; siccome  $l$  è stato imposto nullo si può fare riferimento alla sola componente radiale e quindi nella zona 1 si avrà:

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar} (V_0 - E) u = 0$$

dalla quale si ricava

$$u(r) = A \sin(Kr)$$

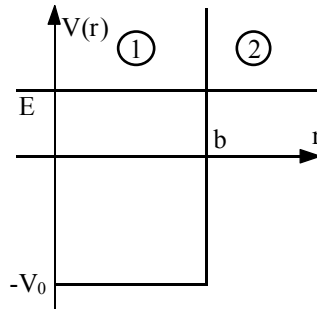


Figura 3

Nella zona 2 si avrà invece:

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar} E u(r) = 0$$

Dall'ultima relazione scritta si ricava:

$$u(r) = C \sin(\kappa r) + D \cos(\kappa r)$$

Ponendo poi:

$$\begin{cases} C = B \cos \delta_0 \\ D = B \sin \delta_0 \end{cases}$$

si ricava:

$$u(r) = B \sin(\kappa r + \delta_0) \quad (3)$$

Dal raccordo di  $u$  in corrispondenza di  $b$  si ottiene:

$$B \sin(\kappa b + \delta_0) = A \sin(Kb)$$

mentre dal raccordo di  $du/dr$  nel medesimo punto si ricava:

$$\kappa B \cos(\kappa b + \delta_0) = K A \sin(Kb)$$

Dividendo allora l'ultima relazione scritta per quella precedente si ottiene:

$$K \cot g(Kb) = \kappa \cot g(\kappa b + \delta_0)$$

Utilizzando a questo punto il metodo generale visto in precedenza si arriverebbe, in questo caso, alla seguente espressione della sezione d'urto:

$$\sigma = \frac{4\pi}{\kappa^2 + \alpha^2} \left[ \cos(\kappa b) + \frac{\alpha}{\kappa} \sin(\kappa b) \right]$$

dove sia:

$$\alpha = -K \cot g(Kb)$$

L'espressione di  $\sigma$  così trovata presenta effettivamente un plateau in corrispondenza delle basse energie per poi decrescere con l'aumentare dell'energia, non tornano però i valori numerici in quanto, a fronte dei valori sperimentali pari a  $20b$ , i calcoli portano solo a  $4b$ . Per risolvere questa discrepanza è necessario fare riferimento agli spin; gli spin dei protoni e dei neutroni (entrambi pari ad  $\frac{1}{2}$ ) si possono combinare per dare uno spin complessivo:

$$S = s_p + s_n$$

A seconda degli orientamenti degli spin dei nucleoni, S può essere pari a zero o all'unità; la soluzione con S=1 ha tre possibili orientamenti e quindi si parla di stato di tripletto; la soluzione con S nullo ha invece un solo possibile orientamento e quindi si parla di stato di singoletto. Dei quattro possibili orientamenti, dunque, tre si riferiscono allo stato di tripletto ed uno allo stato di singoletto; complessivamente è allora possibile avere:

$$\sigma = \frac{3}{4}\sigma_t + \frac{1}{4}\sigma_s$$

Usando i valori numerici si ha allora:

$$20 = \frac{3}{4}4 + \frac{1}{4}\sigma_s$$

da cui:

$$\sigma_{s,0} = 60b$$

Questo valore è ovviamente stato trovato mischiando, come mostrato, dati sperimentali e dati teorici. Da tutto questo discorso si evince che le forze nucleari sono dunque spin-dipendenti. Studiando lo scattering a bassa energia con l'ortoidrogeno o il paraidrogeno, ovvero le due forme molecolari dell'Idrogeno che presentano, rispettivamente, i due protoni paralleli piuttosto che antiparalleli (si ricordi che l'Idrogeno molecolare è infatti biatomico) si riesce effettivamente a misurare la dipendenza dallo spin. Nel caso dell'Idrogeno molecolare bisogna però tener conto di un ulteriore parametro; quando infatti i neutroni incidenti sull'Idrogeno molecolare hanno basse energie, la loro lunghezza d'onda di De Broglie è talmente grande da portarli ad interferire con le funzioni d'onda di entrambi i protoni. Per analizzare gli effetti di interferenza in problemi di questo tipo si introduce una lunghezza di diffusione a definita in modo che sia:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sigma = 4\pi a^2$$

Si avrà, allora, combinando quest'ultima relazione con la relazione (2):

$$a = -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin \delta_0}{k}$$

Da questa relazione si comprende come  $\delta_0$  debba tendere a zero a basse energie per garantire che a rimanga finito; a basse energie si può dunque scrivere:

$$a \cong -\frac{\delta_0}{k}$$

dalla quale si ricava che l'equazione dell'onda scatterata, ovvero l'equazione (3), diventa:

$$u(r) = B \sin[\kappa(r - a)]$$

Se a è maggiore di zero si ha stato di tripletto (stato legato) e quindi si fa riferimento al grafico di figura 4; se invece a è negativo si ha stato di singoletto (stato non legato) e quindi fa riferimento al grafico di figura 5.

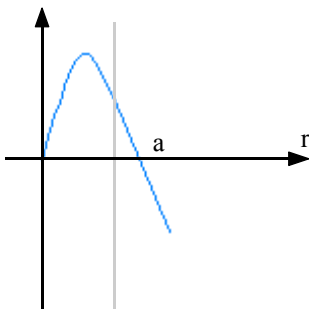


Figura 4

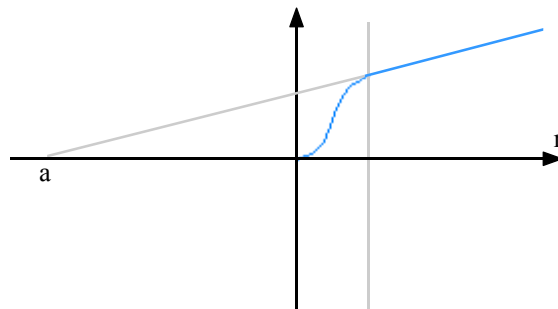


Figura 5

Dalle misure in orto e para idrogeno si ricavano le misure di a:

$$\begin{cases} a_t = 5,35 \text{ fm} \\ a_s = -23,6 \text{ fm} \end{cases}$$

#### Interazione protone-protone e neutrone-neutrone.

Quando i due nucleoni sono uguali la loro interazione presenta una maggiore complessità, soprattutto in quanto, essendo i nucleoni dei fermioni, si avrà:

$$\psi_{12} = -\psi_{21}$$

Essendo inoltre le due particelle uguali, bisogna tener conto dell'indistinguibilità degli scattering avvenuti ad angolo  $\theta$  e ad angolo  $\pi-\theta$ . Si consideri inizialmente l'interazione del tipo p-p (più facile da ottenere) per la quale si otterrà la sezione d'urto differenziale con l'andamento mostrato in figura 6.

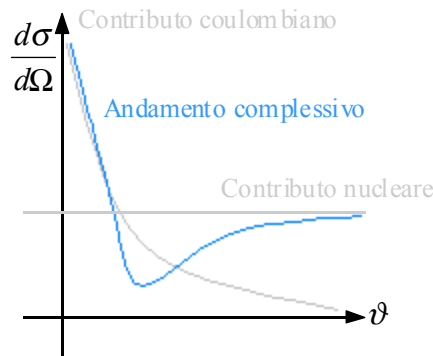


Figura 6

Per ottenere questo risultato è necessario utilizzare un potenziale composto da diversi contributi; ci sarà infatti un termine coulombiano, che sarà proporzionale a

$$V_{coul} \div \sin^{-4} \frac{\vartheta}{2}$$

e un termine nucleare, proporzionale a

$$V_{nuc} \div \sin^2 \delta_0$$

Per tener conto anche dell'indistinguibilità tra  $\theta$  e  $\pi-\theta$  si introduce invece un termine, simile a quello coulombiano, proporzionale a:

$$V_{int} \div \sin^{-4} \left( \pi - \frac{\vartheta}{2} \right) = \cos^{-4} \frac{\vartheta}{2}$$

Ci sono poi altri termini come ad esempio un termine di interferenza tra i due termini coulombiani e poi altri termini dovuti all'interferenza tra lo scattering nucleare e il coulombiano a  $\theta$  e  $\pi-\theta$ .

**Il modello a scambio di forze.**

All'aumentare dell'energia i dati sperimentali portano ad un andamento con l'angolo della sezione d'urto differenziale come quello mostrato in figura 7.

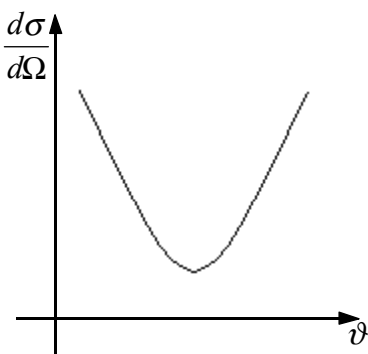


Figura 7

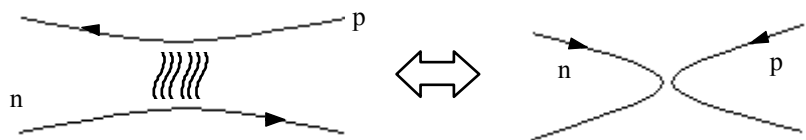


Figura 8

Per spiegare questo si suppone che ci possa essere lo scambio di qualche cosa tra le particelle, come mostrato in figura 8. Si tratta allora di un'interazione tra campi: per due elettroni i due campi elettromagnetici devono scambiarsi un bosone di massa nulla, il fotone; per le forze nucleari (di range finito) la particella deve essere un bosone con una massa di circa  $140 \text{ MeV}/c^2$ , detta mesone (teoria OPEP). La particella virtuale scambiata deve soddisfare il principio di indeterminazione di Heisemberg secondo il quale:

$$\Delta mc^2 \Delta t \leq \hbar$$

dalla quale si ricava:

$$\Delta t \leq \frac{\hbar}{\Delta mc^2}$$

Tenendo poi conto che:

$$R = c\Delta t$$

è il raggio d'azione della forza nucleare, si ricava:

$$R \approx \frac{\hbar c}{\Delta mc^2}$$

Conoscendo R (circa 1,5 fm) si ritrova il valore limite di massa prima vista. La relazione complessiva di scattering tra due nucleoni identici è dunque la seguente:

$$n_1 \rightarrow n_1 + \pi^0 \dots \pi^0 + n_2 \rightarrow n_2$$

$$p_1 \rightarrow p_1 + \pi^0 \dots \pi^0 + p_2 \rightarrow p_2$$

$$n_1 \rightarrow n_1 + \pi^0 \dots \pi^0 + p_2 \rightarrow p_2$$

$$n_1 \rightarrow p_1 + \pi^{-1} \dots \pi^{-1} + p_2 \rightarrow n_2$$

Questa ipotesi è stata proposta negli anni '30 ed è stata in seguito verificata sfruttando i raggi cosmici (nel 1947). La scoperta di  $\pi$  ha dato origine alla famiglia dei mesoni (tra i quali i mesoni  $\pi$  sono quelli con massa inferiore). Per i mesoni si sono effettivamente misurate le seguenti masse:

$$\begin{cases} m_{\pi^{\pm 1}} c^2 = 139 \frac{MeV}{c^2} \\ m_{\pi^0} c^2 = 134 \frac{MeV}{c^2} \end{cases}$$

I mesoni sono composti da quark e antiquark e i mesoni  $\pi$  sono anche noti come pioni che vengono attualmente utilizzati per trovare il modo di produrre neutrini dal loro decadimento.

### Il modello a shell.

L'analisi fino ad ora fatta del nucleo con le caratteristiche di tutti i nucleoni diventa ovviamente ingestibile con l'aumentare del numero dei nucleoni, è dunque opportuno cercare dei modelli nucleari che permettano di ottenere i dati fin qui visti e che siano gestibili. Un primo modello prevede di considerare il nucleo come un gas di nucleoni debolmente attrattivi. Per quanto riguarda i neutroni si avrà una situazione come quella mostrata in figura 9, dove il termine  $E_F^n$  indica l'energia di fermi per il neutrone.

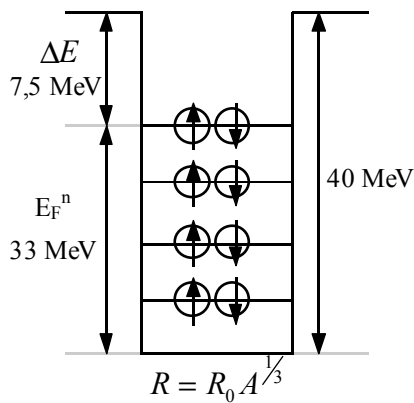


Figura 9

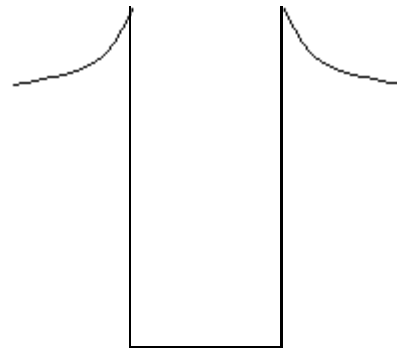


Figura 10

Sfruttando una geometria sferica per il volume nucleare si ricava il momento:

$$P_F \approx 250 \frac{MeV}{c}$$

L'energia cinetica media di un singolo nucleone è di circa 20 MeV che corrisponde ad una velocità piccola rispetto a  $c$ , ciò permette di fare riferimento ai calcoli classici. Il libero cammino medio è molto alto (molto più grande delle dimensioni del nucleo stesso). Per i protoni si può ripetere un discorso analogo con una buca di potenziale che abbia però un andamento come quello mostrato in figura 10. Facendo riferimento alla carta di Segre e ricordando che al crescere di  $A$  il numero dei neutroni cresce più del numero dei protoni il modello proposto porterebbe a livelli pieni di neutroni e vuoti di protoni; siccome poi i neutroni si possono trasformare in protoni e cadere verso livelli più interni non si avrebbero più nuclei stabili. Per tener conto dunque del fatto che i protoni sentono anche l'interazione coulombiana, i livelli dei protoni sono un po' più alti, e questo risolve il problema. Un altro modello, più evoluto, è il modello a shell che prevede ancora una serie di livelli energetici con livelli eccitati raggiungibili fornendo energia ai nucleoni; il modello a shell modella bene alcuni fattori in precedenza causa di perplessità. Per esempio, infatti, il modello a shell

permette di comprendere il comportamento anomalo dei nuclei con numeri magici supponendo che i numeri magici si abbiano quando gli shell vengono riempiti. Un esempio semplice di modello a shell è quello a particella indipendente; in questo caso si sostituisce l'interazione di un nucleone con tutti gli altri tramite la presenza di un potenziale di campo medio. La prima cosa da fare è ricercare la forma del potenziale in questione con il quale si valuterà poi la funzione d'onda

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = R_{n,l}(r) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$$

dove  $n$  è il numero dei nodi della  $R(r)$  mentre  $l$  è il momento angolare ed  $m$  è la proiezione di  $l$  sull'asse  $z$ . La sequenza dei livelli relativi ad  $l=0,1,2,\dots$  è detta  $s,p,d,f,g,\dots$ . Siccome deve sempre essere verificato il principio di esclusione di Pauli, i livelli energetici sono  $2(2l+1)$  degeneri perché in ogni sottolivello si possono mettere due nucleoni con spin antiparalleli. Per quanto riguarda la scelta del potenziale, questo deve sostanzialmente seguire la distribuzione di materia nucleare:

- per nuclei leggeri ( $A < 10$ ) si usa il potenziale dell'oscillatore armonico tridimensionale;
- quando non interessa particolarmente la situazione di superficie si utilizza solo un potenziale a buca quadrata (che però non riesce ad esprimere i numeri magici);
- solitamente si usa un potenziale che ricalca la distribuzione di carica nel nucleo.

Un esempio è il potenziale di Woods-Saxon, mostrato in figura 11 ed espresso nel modo seguente:

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$

dove  $a$  è un valore costante pari a 0,5fm mentre un valor medio di  $V_0$  usato per i nuclei mediopesanti è 40MeV.

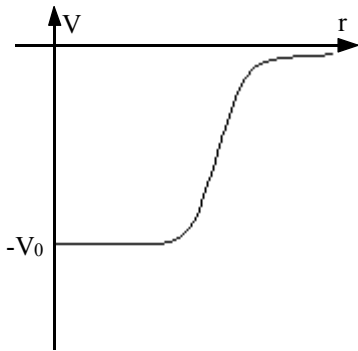


Figura 11

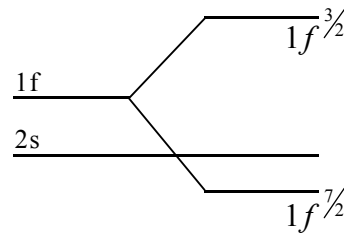


Figura 12

La sequenza dei livelli energetici è di questo tipo:

$$1s, 1p, 1d, 2s, 1f, 1g, \dots$$

Per ciascuno di questi livelli la degenerazione è  $(2l+1)$  e quindi si ha:

$$2, 6, 10, 14, 18, \dots$$

Il numero di stati inferiori è allora:

$$2, 8, 18, 20, 34, 40, 58, \dots$$

Considerando solo la dipendenza da  $r$  si possono ricavare solo i numeri magici 2, 8 e 20 e quindi è necessario introdurre un termine spi-orbita, ottenendo:

$$V(r) = V_{centrale}(r) + V_{sp}(\vec{r}) \cdot \vec{s}$$

Definito un momento:

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$$

con proiezioni

$$m_j = \pm j$$

si comprende come i numeri quantici importanti siano  $n, j, m_j$  ed  $s$ . Il livello  $1p$  si splitta dunque in due sottolivelli, quello con energia minore è quello con il segno positivo; la differenza  $\Delta E$  tra questi due sottolivelli non è costante ma cresce al crescere di  $l$  (altrimenti cambierebbe ben poco). La sequenza dei livelli è ora mutata e si ha, per esempio, la situazione mostrata in figura 12. In questo modo i livelli energetici si mischiano e si ottiene la sequenza corretta di numeri magici. Facendo riferimento al caso con  $A$  nucleoni;  $A-1$  formano il core (ovvero shell pieno) generatore del potenziale e un solo nucleone esterno è quello che permette di ricavare tutte le caratteristiche che servono, ovvero da quest'ultimo nucleone si ricaverà l'espressione di  $I^\pi$ . Un discorso simile è quello in cui manca un solo nucleone per avere uno shell pieno; in questo caso i valori di  $I^\pi$  si ricaveranno in base ai valori della lacuna. Per ricavare  $I$  si deve utilizzare la  $j$  del nucleone esterno,  $l$  invece determinerà la parità. Quando ci sono due nucleoni esterni al core,  $I$  si



ricava combinando i due  $j$  dei due nucleoni; quando poi ci sono tanti nucleoni oltre lo shell chiuso, se ne accoppia un numero pari e quelli che rimangono forniscono le caratteristiche che servono. Quando ci sono due livelli vicini con  $l$  molto diverso l'uno dall'altro, si tende, prima di finire il livello energetico inferiore, a riempire con una coppia di nucleoni il livello superiore, questo prende il nome di effetto di pairing. Un esempio di questo tipo si può avere con l' $^{17}_8\text{O}_9$  che presenta 8 nucleoni del core ed un solo nucleone (un neutrone) esterno. Per quanto riguarda i protoni si osserva infatti che, essendo 8, questi occupano completamente i livelli  $1s$  ed  $1p$  (ed in effetti 8 un numero magico); per quanto riguarda i neutroni, invece, è possibile fare riferimento alla sequenza di livelli mostrata in figura 12.

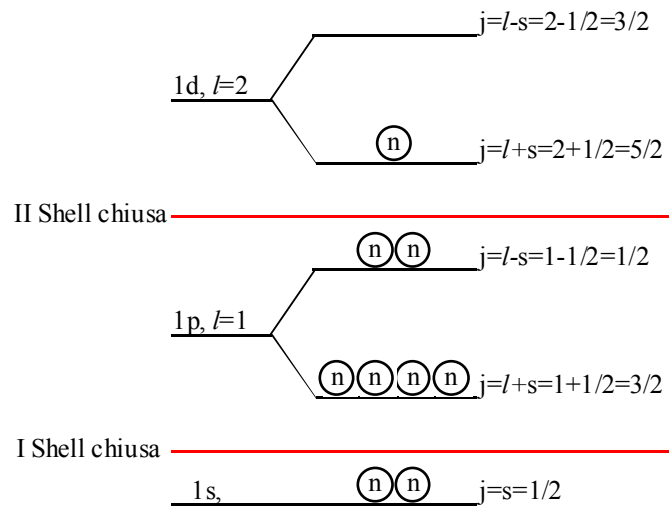


Figura 12

La configurazione dei neutroni è dunque la seguente:

$$\left(1s_{1/2}\right)^2 \left(1p_{3/2}\right)^4 \left(1p_{1/2}\right)^2 1d_{5/2}$$

Dal nucleone esterno si ricaverà:

$$\begin{cases} j = \frac{5}{2} \\ l = 2 \end{cases}$$

Siccome dall'ultimo nucleone si ricavano i dati relativi all'intero nucleo si avrà:

$$\begin{cases} I = j = \frac{5}{2} \\ \pi = (-1)^l = (-1)^2 = 1 \Rightarrow + \end{cases}$$

e quindi si avrà.

$$I^\pi = \frac{5}{2}^+$$