

Il modello a shell. Decadimenti radioattivi. Il decadimento α .

Il modello a shell.

Il modello a shell a particella indipendente riesce a descrivere in maniera abbastanza soddisfacente la situazione in cui un solo nucleone rimane al di fuori di una shell chiusa ma se già ci si trova a dover affrontare la situazione in cui due nucleoni rimangono fuori dall'ultima shell chiusa il modello sarà in grado solo di fornire delle stime; siccome poi ai livelli eccitati contribuiscono ai infatti tutti i nucleoni esterni (e si parla infatti di nucleoni di valenza), il modello in questione non riesce a descrivere tutti i livelli eccitati ma solo quelli minori. Per quanto riguarda il momento di dipolo magnetico sono importanti i termini l ed s del nucleone più esterno; naturalmente è anche importante definire se il nucleone esterno è un protone oppure un neutrone in quanto per il protone si deve tener conto di g_l e di g_s , mentre per quanto riguarda il neutrone si deve tener conto solo di g_s . Tenendo conto che sia per il neutrone che per il protone si avranno le due possibilità seguenti:

$$\begin{cases} j = l - \frac{1}{2} \\ j = l + \frac{1}{2} \end{cases}$$

si potranno ottenere quattro curve (due per il protone e due per il neutrone) dette curve di Schmidt che approssimano sul piano (j, μ) l'andamento dei punti sperimentali relativi ai nucleoni pari e ai nucleoni dispari. Chiamando poi g_s^f il fattore g di spin relativo ai nucleoni liberi, si nota che, usando:

$$g_s \cong 0,6 g_s^f$$

dove 0,6 utilizzato è un valore sperimentale semiempirico, si ottiene un fit migliore tra il modello e i dati sperimentali. Per quanto riguarda, infine, il momento di quadrupolo elettrico si osserva che utilizzando il modello a particella indipendente i valori sperimentali e quelli teorici sono differenti e quindi bisogna tener conto di tutti i nucleoni.

Decadimenti radioattivi.

Come è stato accennato in precedenza, la fisica nucleare è nata per spiegare l'effetto osservato nei decadimenti radioattivi. Il decadimento è un fenomeno statistico e quindi non si può sapere quale e quando il singolo atomo andrà a decadere. Il parametro più importante che caratterizza il decadimento è la costante di decadimento λ . Che si misura in s^{-1} ; solitamente si preferisce utilizzare la vita media τ definita come:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

La costante λ è una caratteristica peculiare del tipo di nuclide e non dipende da altro; per taluni tipi di trasformazioni (casi comunque particolarissimi) λ può essere influenzato dall'habitat atomico nel quale si trova il nuclide. La legge del decadimento radioattivo ci dice che il numero di nuclei che decadono nel tempo dt è:

$$dN = -\lambda N dt$$

Integrando questa espressione si ricava:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \tag{1}$$

dove si è supposto che:

$$N(t = 0) = N_0$$

A questo punto è possibile definire il tempo di dimezzamento, indicato come $T_{1/2}$ e definito come il tempo necessario perché si abbia:

$$N\left(t = T_{1/2}\right) = \frac{N_0}{2}$$

Combinando allora quest'ultima relazione con l'espressione (1) si ricava:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$$

e quindi:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \cong \frac{0,693}{\lambda}$$

Il legame tra il tempo di dimezzamento e la vita media sarà allora il seguente:

$$T_{1/2} \cong 0,693\tau$$

Solitamente il dato che si trova tabulato con maggior facilità è proprio il tempo di dimezzamento. Un'altra grandezza importante è l'attività, ovvero la varianza istantanea del numero di atomi; con questa grandezza si misurano, dunque, i decadimenti nell'unità di tempo e quindi si avrà:

$$A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

ovvero:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

dove si è posto:

$$A_0 = \lambda N_0$$

L'attività si misura in decadimenti al secondo e un decadimento al secondo prende il nome di Becquerel (Bq); storicamente si usava come unità di misura l'attività di 1 g di ^{226}Ra che era pari a $3,7 \cdot 10^{10}$ Bq; definendo però il Curie (Ci) come appunto pari a $3,7 \cdot 10^{10}$ Bq è possibile usare il Curie come unità di misura. Solitamente un nuclide può decadere in diversi modi; la probabilità che un nuclide decada in un modo piuttosto che nell'altro è data dal rapporto tra i decadimenti che interessano ed i decadimenti totali. Supponendo che ci siano solo due possibili modi di decadere (1 e 2), varrà la seguente relazione:

$$\left| \frac{dN}{dt} \right|_{Tot} = \left| \frac{dN}{dt} \right|_1 + \left| \frac{dN}{dt} \right|_2 = \lambda_1 N + \lambda_2 N = \lambda_{Tot} N$$

dove λ_1 e λ_2 prendono il nome di costanti di decadimento parziali. L'evoluzione temporale di A si ottiene utilizzando la λ_{Tot} . Le probabilità di decadere in un modo o nell'altro sono anche dette branching ratio e vengono espresse nel modo seguente:

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_{Tot}} \\ \beta_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_{Tot}} \end{cases}$$

Siccome i decadimenti sono fenomeni spontanei, l'energia a disposizione, ovvero il ΔE tra l'energia del sistema di partenza e quella del sistema di arrivo, deve essere positiva. Facendo dunque riferimento allo schema di figura 1, si ha che condizione necessaria perché sia abbia il decadimento è che Q sia positivo.

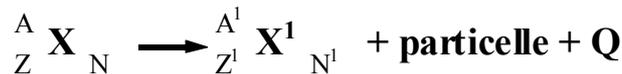


Figura 1

Per "particelle" si intendono particelle α , elettroni, fotoni, altri nuclidi, etc.... Una volta emessa l'energia Q, questa deve essere ridistribuita tra il sistema finale e le particelle e tale ridistribuzione si basa sul fatto che i decadimenti radioattivi sono caratterizzati dalle seguenti proprietà:

- conservazione del numero di nucleoni (A);
- conservazione del momento lineare;
- conservazione del momento angolare totale;
- conservazione della parità.

Per qualunque decadimento, la costante di decadimento definita è quella parziale, non totale perché si ha uno stato iniziale ed uno stato finale. Se lo stato iniziale e lo stato finale coincidono allora la λ parziale e la λ totale coincidono. Per la maggior parte dei casi il sistema iniziale si trova nello stesso stato fondamentale, se ciò non fosse sarebbe anche necessario sommare la relativa energia di eccitazione. Nella maggior parte dei casi, inoltre, il sistema di arrivo è in uno stato eccitato e quindi Q deve essere piccolo.

Il decadimento α .

Uno dei più importanti tipi di decadimento radioattivo è il decadimento α che viene genericamente espresso tramite la schematizzazione di figura 2.

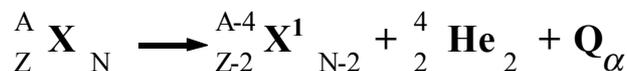


Figura 2

In tale trasformazione l'energia liberata deve essere positiva, ovvero si deve avere:

$$Q_\alpha > 0 \quad (2)$$

questo avviene quando A è maggiore di 150 il termine ma il decadimento α diventa veramente importante solo quando A tende a superare il valore di 200. Il termine Q_α può essere definito nel modo seguente:

$$Q_\alpha = (m_X - m_{X'} - m_\alpha)c^2 \quad (3)$$

e dunque, avendo un nuclide di massa $M(A,Z)$ che porterà ad un nuclide di massa $M(A-4, Z-2)$, si dovrà avere:

$$Q_\alpha = [M(A,Z) - M(A-4, Z-2) - m_\alpha]c^2$$

questo ovviamente nel caso in cui il nucleo genitore X fosse nello stato fondamentale. In funzione dell'energia di legame si avrebbe invece:

$$Q_\alpha = B_{X'} - B_X + B_\alpha$$

ovvero, nel caso in analisi:

$$Q_\alpha = BE(A-4, Z-2) - BE(A, Z) + 28MeV$$

dove 28 MeV rappresenta l'energia di legame della particella α . Combinando l'ultima relazione scritta con l'espressione (2) si ottiene che:

$$BE(A-4, Z-2) - BE(A, Z) + 28MeV > 0$$

che è verificata solo con nuclidi piuttosto pesanti. Per i nuclidi leggeri il decadimento α è visto più come una rottura (di nuclidi composti da diverse particelle α) che come un vero e proprio decadimento. In effetti, anche se per avere qualche probabilità di decadimento α è sufficiente avere

$$Q_\alpha = 2MeV$$

il decadimento avviene bene solo se si ha:

$$Q_\alpha > 4MeV$$

Graficamente si può considerare allora la figura 3.

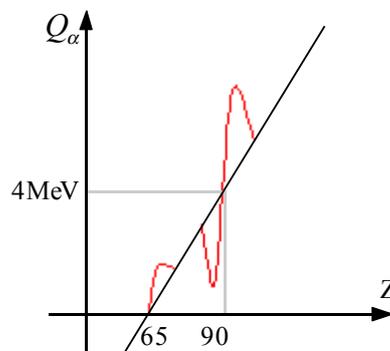


Figura 3

Come si può notare il Q_α diventa positivo in prossimità di Z pari a 65, ovvero nella zona delle terre rare e poi supera i 4 MeV in prossimità di Z pari a 90 (il Piombo), si nota però che l'andamento reale calcolato si discosta in alcuni punti dall'andamento calcolato lineare e, in particolare, si vede una profonda depressione nella zona del Piombo e un picco nella zona di Uranio e Torio; tali differenze sono dovute alla presenza di strutture con numeri magici. Per vedere ora come si ripartisce il termine Q_α si deve fare riferimento alla relazione seguente:

$$m_X c^2 = m_{X'} c^2 + m_\alpha c^2 + T_{X'} + T_\alpha$$

che vale nel caso in cui il nuclide X^1 sia nello stato fondamentale. Combinando l'ultima relazione scritta con l'espressione (3) si ricava:

$$Q_\alpha = T_{X'} + T_\alpha \quad (4)$$

Supponendo che il nucleo padre X sia a riposo e che quindi la sua quantità di moto sia nulla, si avrà, per il teorema della quantità di moto applicato al nucleo figlio X^1 e alla particella α si avrà:

$$|P_{X^1}| = |P_\alpha|$$

Siccome poi nei decadimenti α l'energia emessa è di circa 5 MeV, è possibile fare riferimento alla meccanica classica e quindi le ultime due equazioni scritte possono essere espresse nel modo seguente:

$$\begin{cases} Q_\alpha = \frac{1}{2} m_{X^1} v_{X^1}^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \\ m_{X^1} v_{X^1} = m_\alpha v_\alpha \end{cases}$$

Dal sistema scritto si ricava dunque:

$$T_\alpha = \frac{Q_\alpha}{1 + \frac{m_\alpha}{m_{X^1}}}$$

ovvero, nel caso in cui A sia circa pari a 200 (caso nel quale tale decadimento è molto importante):

$$T_\alpha \cong \frac{Q_\alpha}{1 + 0,02}$$

dunque per qualunque valore di Q_α , T_α sarà il 98% di Q_α , essendo allora:

$$T_{X^1} = Q_\alpha - T_\alpha$$

si ricava, per complemento che T_{X^1} sarà circa il 2% di Q_α . Nel caso in cui quindi, per esempio, si abbia:

$$Q_\alpha = 10 \text{ MeV}$$

si avrà:

$$\begin{cases} T_\alpha = 9,8 \text{ MeV} \\ T_{X^1} = 200 \text{ keV} \end{cases}$$

Anche se T_{X^1} rappresenta solo il 2% di Q_α non può comunque essere trascurato perché ha la sua importanza nel confronto con le altre energie di legame. Se il nucleo X^1 non è nello stato fondamentale al posto della semplice T_{X^1} è necessario aggiungere l'energia di eccitazione del nucleo X^1 e quindi si avrà:

$$m_X c^2 = m_{X^1} c^2 + m_\alpha c^2 + E_{X^1} + T_{X^1} + T_\alpha$$

e la relazione (4) si modifica fino al punto di ottenere:

$$Q_\alpha - E_{X^1} = T_{X^1} + T_\alpha$$

Sarà allora solo il termine presente al primo membro di quest'ultima relazione che viene spartito tra la particella α e il nucleo figlio X^1 . Ovviamente anche il nucleo figlio può nascere nello stato fondamentale oppure in uno stato eccitato. Considerando i decadimenti che legano lo stato fondamentale del genitore e lo stato fondamentale del figlio si riuscì a definire, nel caso dei pari-pari, una relazione tra $T_{1/2}$ ed E_α . Nel caso in cui dunque si abbia una transizione del tipo:

$$0^+ \rightarrow 0^+$$

Le osservazioni sperimentali hanno portato ad una relazione del tipo:

$$\text{Log}\left(T_{1/2}\right) = C_1 + \frac{C_2}{\sqrt{E_\alpha}}$$

dove C_1 e C_2 sono costanti fortemente dipendenti da Z . Facendo per esempio riferimento ai nuclei di ^{232}Th e ^{218}Th (è importante scegliere due isotopi di uno stesso elemento proprio per quanto detto a proposito delle costanti C_1 e C_2) si ha che i tempi di dimezzamento sono, rispettivamente pari a $1,4 \cdot 10^{10}$ giorni e 10^7 secondi e quindi presentano una differenza di circa 10^{24} volte; per quanto riguarda invece il termine E_α si ha, nei due casi 4,08 MeV e 9,8 MeV con un rapporto che è quindi quasi uguale a 2.

Teoria dell'emissione α . Momento angolare e parità nel decadimento α . Spettroscopia del decadimento α . Decadimento β .

Teoria dell'emissione α .

È ora necessario cercare la probabilità del decadimento α . Pensando alla particella α che viene emessa e si trova subito nelle vicinanze di un nucleo positivo; già solo per interazione coulombiana si dovrebbe avere un'energia variabile tra i 4 e i 10 MeV; le osservazioni sperimentali riportano però particelle α con energia non superiore ai 3 MeV che non si capisce quindi come possano aver oltrepassato la buca di potenziale rappresentata dal nucleo. Questa incompatibilità tra i valori è stata risolta pensando all'effetto tunnel. Si consideri dunque l'ipotesi di Gamow, secondo la quale le particelle α sono già formate all'interno del nucleo X (si parla dunque di effetto di clustering) e che tentino per un numero di volte abbastanza alto di uscire; in questo modo è appunto possibile configurare la loro fuoriuscita per effetto tunnel. Il parametro λ relativo al decadimento α si può dunque definire nel modo seguente:

$$\lambda = fP$$

dove f sia il numero di tentativi che la particella fa per tentare di oltrepassare la barriera di potenziale mentre P sia la probabilità di attraversare la barriera. Tale probabilità viene ottenuta sfruttando un calcolo di meccanica quantistica che porta ad avere:

$$P = e^{-2G}$$

dove G prende il nome di fattore di Gamow ed è espresso come:

$$G = 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \int_{R_1}^{R_2} [V(r) - E_\alpha]^{1/2} dr$$

Supponendo di essere nel sistema di riferimento del centro di massa (e considerando la massa ridotta m) è possibile sfruttare il diagramma di figura 1 nel quale si individuano due zone importanti: la prima è quella con r compreso tra 0 ed R_1 (nella quale la particella α e il nucleo sono la stessa cosa), la seconda è la zona con r maggiore di R_2 dove la particella α è considerata all'infinito.

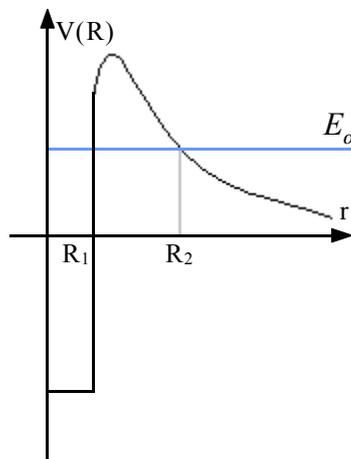


Figura 1

L'energia E_α potrà ovviamente essere espressa in base al valore del potenziale in corrispondenza di R_2 e quindi si avrà:

$$E_\alpha = V(R_2)$$

Il potenziale V è a sua volta la somma di un termine coulombiano e di un termine centrifugo espresso come:

$$V_{Cent} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}$$

Siccome, però, la particella α , passando da 0^+ a 0^+ , deve avere un contributo l_α nullo, non ci sarà il termine centrifugo; il fattore di Gamow sarà dunque esprimibile nel modo seguente:

$$G = 2 \int_{R_1}^{R_2} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \right)} dr = 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \cdot \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{R_2}} \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{R_2}{r} - 1 \right)^{1/2} dr$$

Integrando con una sostituzione di variabili si ottiene:

$$G = 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \cdot \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R_2}} \sqrt{R_2} \left[\cos^{-1} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{R_1}{R_2}} \right]$$

Nell'ipotesi che sia:

$$\frac{R_1}{R_2} \ll 1$$

si può sviluppare in serie ed ottenere:

$$G = 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \cdot \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R_2}} \sqrt{R_2} \left[\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \right]$$

Si ottiene così:

$$G = 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \cdot \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0}} \cdot \sqrt{\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 E}} \cdot \left[\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \right] = 2 \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\hbar c} \sqrt{\frac{2mc^2}{E_\alpha}} \cdot \left[\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \right]$$

G, che presenta solo due variabili che sono Z e l'inverso della radice di E_α , è l'esponente di un esponenziale e quindi una piccola variazione di E_α si ripresenta in maniera pesante su λ . Quando l_α non è nullo l'espressione di G è diversa e porta ad una probabilità di decadimento molto minore rispetto alla rispettiva probabilità con l_α nullo; ciò è dovuto al fatto che si deve aggiungere anche un potenziale centrifugo.

Con un rapido esempio numerico è possibile capire come varia la probabilità P con il variare di l_α . Dai calcoli svolti nel caso del Th (e quindi con $Z=90$) e utilizzando:

$$E_\alpha = 4,5 \text{ MeV}$$

si otterrà (essendo ovviamente $z=2$):

$$\begin{cases} P_{l=0} = 10^{-34} \\ P_{l=1} = 0,84 P_{l=0} \\ P_{l=2} = 0,6 P_{l=0} \\ P_{l=5} = 0,08 P_{l=0} \end{cases}$$

Quando quindi l è nullo si ha la massima probabilità di osservare un decadimento. Il parametro λ era composto da P e da f , dopo aver visto cosa si può dire sulla probabilità P bisogna ora concentrarsi sul fattore f ; questa frequenza può essere indicata come:

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{v}{R} = \sqrt{\frac{2(E_\alpha + V_0)}{mc^2}} \cdot \frac{c}{R}$$

Usando i seguenti valori numerici

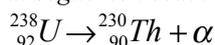
$$\begin{cases} A = 200 \\ V_0 = 3,5 \text{ MeV} \\ E_\alpha = 5 \text{ MeV} \end{cases}$$

si ottiene:

$$f \cong 6 \cdot 10^{21}$$

Il valore di f trovato dipende però solo leggermente da R e da E_α e quindi è abbastanza costante. L'inverso di f è τ , il tempo di transito nucleare (nel caso in esame vale circa $1,6 \cdot 10^{-22}$ secondi) ed è il tempo necessario per viaggiare all'interno del nucleo.

Si vede ora un esempio numerico relativo al seguente decadimento del tipo $0^+ \rightarrow 0^+$:



che ha un branching ratio di 0,77 e nel quale sia noto il termine:

$$E_\alpha = 4,3 \text{ MeV}$$

Essendo:

$$E_\alpha = V(R_2) = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

si può ricavare:

$$R_2 = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 E_\alpha} = 60,28 \text{ fm}$$

Ricordando poi la regola secondo la quale:

$$R = R_0 A^{1/3}$$

si possono ricavare R_α ed R_{Th} grazie ai quali si ottiene:

$$R_1 = R_{Th} + R_\alpha = 9,7 \text{ fm}$$

e quindi si avrà:

$$\frac{R_1}{R_2} = 0,16$$

Il fattore di Gamow sarà quindi:

$$G = 2 \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \sqrt{\frac{2mc^2}{E_\alpha}} \cdot \left[\frac{\pi}{2} - 2 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \right] = 84,7$$

Conoscendo G si può ricavare molto semplicemente la probabilità P . Siccome poi si è detto che f è piuttosto costante si può usare il valore trovato in precedenza e quindi si avrà, complessivamente:

$$\lambda = fP = 9,456 \cdot 10^{-16} \text{ s}^{-1}$$

Dal dato sul branching ratio si ha:

$$\beta = \frac{\lambda}{\lambda_{Tot}} = 0,77$$

da cui è possibile ricavare:

$$\lambda_{Tot}^{Gamow} = \frac{9,456 \cdot 10^{-16} \text{ s}^{-1}}{0,77}$$

Sfruttando allora la relazione secondo la quale:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

si ottiene:

$$T_{1/2}^{Gamow} = \frac{\ln 2}{\lambda_{Tot}^{Gamow}} = 5,64 \cdot 10^{14} \text{ s} = 1,79 \cdot 10^7 \text{ anni}$$

Dalle tabelle si ricava invece che:

$$T_{1/2}^{238} = 4,47 \cdot 10^9 \text{ anni}$$

Si osserva dunque una differenza di un fattore 100 che è dovuta al fatto di non aver utilizzato una forma perfetta del potenziale; solitamente i valori di $T_{1/2}$ di Gamow differiscono da quelli sperimentali di un fattore che va da 10 a 100 proprio a causa delle approssimazioni che vengono fatte.

Momento angolare e parità nel decadimento α .

Il momento angolare e la parità stabiliscono delle regole di selezione che possono favorire o inibire il decadimento α . Per quanto riguarda il momento angolare totale si deve avere:

$$|I_{in} - I_{fin}| \leq I_\alpha \leq I_{in} + I_{fin}$$

Le particelle α sono però composte da due protoni e due neutroni entrambi nello stato $1s$ e accoppiati in modo da dare uno spin complessivo nullo. Come conseguenza il momento angolare sarà dato esclusivamente da un contributo orbitale che verrà indicato con l_α ovvero:

$$I_\alpha = l_\alpha$$

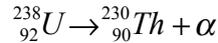
Combinando allora le ultime due relazioni scritte si ottiene:

$$|I_{in} - I_{fin}| \leq l_\alpha \leq I_{in} + I_{fin}$$

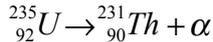
Per quanto riguarda la parità si avrà dunque:

$$\pi = (-1)^{l_\alpha}$$

Si osserva dunque che una variazione di parità $\Delta\pi$ implica che l_α sia dispari mentre quando la variazione di parità non c'è si ha l_α pari. Quest'ultima osservazione, combinata con il principio di conservazione della parità e con la relazione (1) porta ad una serie di regole di selezione che permettono di capire quali transizioni siano possibili e quali no. Facendo allora riferimento alla transizione:



che, come accennato, è una transizione $0^+ \rightarrow 0^+$ con peso del 77%, è possibile dedurre l'esistenza di altre transizioni che portano a livelli eccitati (di I e II livello) del Th. Tali transizioni saranno $0^+ \rightarrow 2^+$ e $0^+ \rightarrow 4^+$. La prima transizione è compatibile con $l_\alpha=2$ mentre la seconda con $l_\alpha=4$ dunque la prima di queste due è la seconda più probabile (circa il 22%) mentre la seconda è la meno probabile (meno dell'1%). La particella α emessa dalla transizione $0^+ \rightarrow 0^+$ ha la massima energia possibile, la transizione $0^+ \rightarrow 2^+$ ha un'energia minore e la transizione $0^+ \rightarrow 4^+$ ancora più piccola. Facendo riferimento al nuclide ${}^{235}\text{U}$ (che è un pari-dispari) le cose sarebbero cambiate perché in questo caso il termine s non è nullo. La trasformazione sarebbe stata la seguente:



con:

$$7/2^- \rightarrow 5/2^+$$

Il termine l_α , tenendo conto delle varie regole di selezione, potrà essere solo pari a 1, 3 o 5. Il livello popolato con la massima probabilità non è però il $5/2^+$, che è quello fondamentale, ma il $7/2^-$ che è uno stato eccitato (le probabilità sono rispettivamente del 4% e del 56%). Dunque il decadimento preferito non è quello allo stato fondamentale ma è quello con l_α nullo, anche se è uno stato eccitato e quindi porta ad energie del tipo

$$E_\alpha = E_0 - 200\text{keV}$$

Spettroscopia del decadimento α .

Il discorso sulle regole di selezione fatto per ${}^{238}\text{U}$, vale, con numeri anche abbastanza simili, per altri nuclidi e porta a dei diagrammi come quello mostrato in figura 2: gli spettri energetici dei decadimenti α .

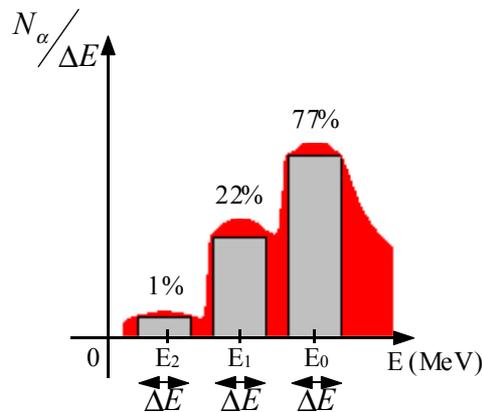


Figura 2

In tale figura è mostrato, in funzione dell'energia, il numero di particelle α presenti nell'intervallo energetico ΔE . In grigio si vede l'andamento ideale mentre in rosso è mostrato l'andamento reale, molto più uniforme in quanto deve fare i conti anche con il potere risolutivo dello strumento.

Decadimento β .

Un secondo importante tipo di decadimento è il decadimento β (inteso come β^+ o anche β^-); questo decadimento porta ad osservare particelle e^- oppure e^+ e lo spettro energetico sarà come quello mostrato in figura 3.

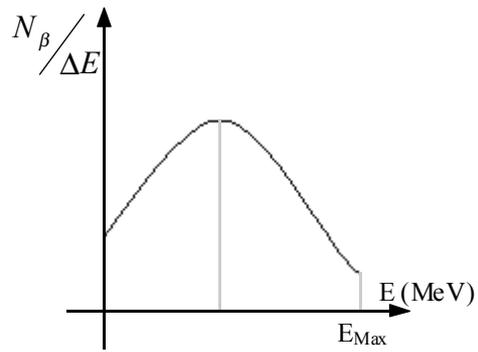


Figura 3

Si nota dunque che c'è uno spettro continuo e non a righe come quello del decadimento α . Questa distribuzione non è compatibile con l'idea del decadimento da "nucleo singolo" a "nucleo singolo con particella". Intorno al 1925 Pauli suppose che nel decadimento β ci fosse una ulteriore particella incognita che doveva essere un fermione ed essere priva di carica. Questa particella, poi chiamata neutrino, fu scoperta solo nel 1953.

Energetica del decadimento β . Teoria di Fermi sul decadimento β . I test sperimentali classici della teoria di Fermi. Regole di selezione dovute al momento angolare e alla parità. Reazione di Electron Capture. Decadimento γ .

Energetica del decadimento β .

Sia nel caso di decadimento β^- che nel caso di decadimento β^+ il termine A rimane costante mentre Z diminuisce o aumenta di 1; si avranno allora espressioni come quelle mostrate di seguito:

$$\begin{cases} {}^A_Z X_N \rightarrow {}^A_{Z+1} X_{N-1}^1 + e^- + \bar{\nu}_e \\ {}^A_Z X_N \rightarrow {}^A_{Z-1} X_{N+1}^1 + e^+ + \nu_e \end{cases}$$

Le particelle indicate con il simbolo ν sono i neutrini, che appartengono alla famiglia dei leptoni e che possono essere catalogati come mostrato nella tabella 1.

| Particelle | Antiparticelle | Neutrini associati | Antiparticelle |
|------------|----------------|--------------------|------------------|
| e^- | e^+ | ν_e | $\bar{\nu}_e$ |
| τ^- | τ^+ | ν_τ | $\bar{\nu}_\tau$ |
| μ^- | μ^+ | ν_μ | $\bar{\nu}_\mu$ |

Tabella 1

I leptoni non si creano mai da soli ma sempre in coppia (per conservare il numero leptonico): bisogna infatti associare un valore di numero leptonico pari a +1 ad ogni particella ed un valore di numero leptonico pari a -1 per ogni antiparticella. La conservazione del numero leptonico è osservata sperimentalmente e questo implica l'accoppiamento di particelle e antiparticelle come quello mostrato nelle relazioni prima viste. Il decadimento più semplice è quello del neutrone libero, che decade (con un $T_{1/2}$ di circa 10 minuti) secondo l'espressione seguente:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (1)$$

Ovviamente si osserva la conservazione del numero leptonico, si ha infatti:

$$0 \rightarrow 0 + 1 - 1$$

Quando si considera dunque il decadimento di un nucleo si potrà pensare che al suo interno decada un nucleone, ovvero un neutrone tramite la reazione (1) oppure un protone tramite la reazione seguente:

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$$

Il decadimento del neutrone non presenta problemi perché la massa del neutrone è maggiore delle altre particelle presenti nella relazione mentre il decadimento del protone può avvenire solo a spese dell'energia di legame. Supponendo che la massa del neutrino sia nulla si avranno infatti le seguenti espressioni relative al termine Q_β :

$$\begin{cases} Q_{\beta^-} = [M(X) - M(X^1)]c^2 \\ Q_{\beta^+} = [M(X) - M(X^1) - 2m_e]c^2 \end{cases}$$

Affinché allora il Q_β sia positivo nel primo caso si nota che la massa del nucleo figlio deve essere minore della massa del nucleo genitore mentre nel secondo caso si osserva che la differenza tra le masse dei due nuclei deve essere maggiore di almeno due masse elettroniche (e quindi deve essere superiore a 1,022 MeV). Si deduce da ciò che il decadimento β^+ è un fenomeno a soglia. Quando la differenza tra le masse è inferiore rispetto alla soglia c'è comunque un decadimento alternativo detto Electron Capture (EC). La EC si ha quando un nucleo assorbe un elettrone, arriva in questo modo a soddisfare la condizione limite e quindi decade; il processo completo sarà allora il seguente:

$${}^A_Z X_N + e^- \rightarrow {}^A_{Z-1} X_{N+1}^1 + \nu_e$$

ovvero, dal punto di vista dei nucleoni:

$$p + e^- \rightarrow n + \nu_e$$

La relazione energetica sarà allora la seguente:

$$Q_{EC} = [M(X) - M(X^1)]c^2 - BE_e$$

dove BE_e è l'energia di legame dell'elettrone catturato. Ovviamente, se il nucleo genitore è eccitato bisogna aggiungere nel bilancio energetico l'energia di eccitazione; stesso discorso per quanto riguarda l'eventuale eccitazione del nucleo figlio. Come è stato accennato in precedenza, la spettrometria dell'energia del decadimento β è notevolmente differente da quella del caso α perché lo spettro è continuo e non discreto come appunto nel caso del decadimento α ; una ulteriore

differenza con il decadimento α è data dal fatto che gli elettroni non possono essere visti come preformati all'interno del nucleo come si faceva invece per le particelle α . Per quanto riguarda l'energia, solitamente viene considerato come riferimento l'energia massima del grafico (che può variare tra i 18 keV e i 2,2 MeV ai quali corrispondono, rispettivamente, tempi di dimezzamento di 12 anni e di 300 ore). I tempi di decadimento β hanno una grande variabilità: da 10^{-3} secondi a 10^{15} anni e questo è invece un punto in comune con quanto avviene nel decadimento α ; la grande variabilità nei tempi di dimezzamento del decadimento α dipende però dalla barriera di potenziale, nel caso del decadimento β , invece, tale variabilità dipende dalla differenza di energia tra lo stato iniziale e quello finale. La perturbazione che dà origine al decadimento β è detta forza debole (in antagonismo con la forza forte) con la quale è possibile completare la lista di forze presenti in natura che troviamo nella tabella 2.

| <i>Forza</i> | <i>Range d'azione</i> |
|-------------------------|-----------------------|
| <i>Gravitazionale</i> | <i>Lungo</i> |
| <i>Elettromagnetica</i> | <i>Lungo</i> |
| <i>Forte</i> | <i>Breve</i> |
| <i>Debole</i> | <i>Breve</i> |

Tabella 2

Facendo riferimento al decadimento del neutrone libero si arriva ad ottenere:

$$Q_{\beta} = 0,782 \text{ MeV}$$

Misurando lo spettro β e cercando l'energia massima degli elettroni emessi si trova il seguente valore (con il suo errore intrinseco):

$$T_e^{\text{Max}} = 0,782 \text{ MeV} \pm 13 \text{ keV}$$

Il limite per cui la massa del neutrino sia nulla è l'errore sperimentale e quindi è possibile affermare che il neutrino non può avere una massa superiore di 13 keV. Trascurando il rinculo del nucleo si può poi dire che:

$$Q_{\beta} \cong T_e + T_{\nu}$$

e quindi, valutando la massima energia cinetica raggiungibile dall'elettrone si possono avere ulteriori informazioni sulla massa del neutrino (quando infatti l'energia cinetica dell'elettrone è massima l'energia cinetica del neutrino sarà minima e si potrebbero in questa situazione vedere eventuali contributi dovuti alla massa che prima erano celati).

Teoria di Fermi sul decadimento β .

Nel 1934 Fermi sviluppò una teoria sul decadimento β basata sulle ipotesi di Pauli a proposito del neutrino; partendo dalla supposizione che la massa del neutrino e il suo spin fossero nulli, Fermi propose che n, p, e^{-} e ν_e si trovassero nel medesimo punto fisico; in questo modo potevano tutti essere identificati da un unico vettore \mathbf{r} . Usando la regola d'oro di Fermi si ottiene:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \rho(E_f) \quad (2)$$

dove $\rho(E_f)$ sia la densità degli stati finali nell'intorno dell'energia E_f mentre l'elemento di matrice V_{fi} è l'integrale del potenziale di interazione debole tra lo stato iniziale e lo stato finale del sistema:

$$V_{fi} = \int \psi_f^* \theta \psi_i dv$$

dove θ sia l'operatore dell'interazione. Lo stato iniziale e finale sono caratterizzati nel modo seguente:

$$\begin{cases} \psi_{fin}^* = \psi_e^* \psi_{\nu}^* \psi^* \\ \psi_{in} = \psi \end{cases}$$

dove il simbolo ψ (senza alcun pedice) è da intendersi relativo al nucleo. Tutte le funzioni d'onda dipendono da \mathbf{r} : le funzioni d'onda relative al neutrino e all'elettrone si ottengono dalla teoria della particella libera; si avrà dunque:

$$\begin{cases} \psi_e(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}} \\ \psi_{\nu}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{r}} \end{cases}$$

dove V è il volume di normalizzazione. Imponendo che l'energia cinetica dell'elettrone sia circa pari ad 1 MeV si ricava:

$$p = \frac{1,4 \text{ MeV}}{c}$$

e quindi:

$$\frac{P}{\hbar} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ fm}^{-1} \quad (3)$$

I valori di r cambiano ma devono ovviamente mantenersi all'interno del range relativo alle dimensioni del nucleo, ovvero si deve avere:

$$pr \ll 1$$

Un discorso analogo può essere fatto anche per il neutrino ed è quindi possibile operare uno sviluppo in serie degli esponenziali che appaiono nelle espressioni delle funzioni d'onda, ottenendo:

$$\begin{cases} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}} = 1 + \frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r} + \dots \\ e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{r}} = 1 + \frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{r} + \dots \end{cases}$$

Limitandosi allora al solo primo termine si otterrà:

$$\begin{cases} \psi_e(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \\ \psi_\nu(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \end{cases}$$

Con questa approssimazione si arriva ad affermare che l'unico fattore che dipende dall'energia dell'elettrone o del neutrino sarà legato alla densità degli stati finali in quanto si ha:

$$|V_{fi}|^2 = g_F \frac{1}{V^2} \int_V \psi_f^* \psi_i dv = g_F^2 \frac{1}{V^2} |M_{fi}|^2 \quad (4)$$

dove M_{fi} è l'elemento di matrice nucleare. Per quanto riguarda allora proprio la densità degli stati finali, si avrà:

$$\rho(E_f) = \frac{dn}{dE_f} \quad (5)$$

dove però sia:

$$dn = dn_e dn_\nu$$

Essendo poi:

$$\begin{cases} dn_e = \frac{4\pi p^2}{h^3} dp V \\ dn_\nu = \frac{4\pi q^2}{h^3} dq V \end{cases}$$

si avrà, complessivamente:

$$dn = \frac{(4\pi)^2 p^2 q^2}{h^6} V^2 dp dq$$

e quindi, sostituendo nella relazione (5):

$$\rho(E_f) = \frac{(4\pi)^2 p^2 q^2}{h^6} V^2 \frac{dp dq}{dE_f}$$

Combinando allora quest'ultima espressione con le relazioni (2) e (4) si ottiene:

$$d\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} g_F^2 |M_{f-i}|^2 \frac{(4\pi)^2 p^2 q^2}{h^6} dp \frac{dq}{dE_f} \quad (6)$$

L'energia finale è ovviamente la somma dell'energia dell'elettrone e dell'energia del neutrino, ovvero:

$$E_f = E_e + E_\nu$$

Non avendo massa, l'energia del neutrino sarà esprimibile come:

$$E_\nu = qc$$

e quindi, combinando le ultime due relazioni scritte:

$$E_f = E_e + qc$$

Si avrà allora:

$$dE_f = cdq$$

e quindi:

$$\frac{dq}{dE_f} = \frac{1}{c}$$

Sostituendo dunque quest'ultima espressione nella relazione (6) si ottiene, complessivamente:

$$d\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} g_F^2 |M_{f-i}|^2 \frac{(4\pi)^2 p^2 q^2}{h^6 c} dp$$

Combinando allora tutto ciò che non dipende dal momento p in una costante C che risulterà definita come:

$$C = \frac{2\pi}{\hbar} g_F^2 |M_{f-i}|^2 \frac{(4\pi)^2}{h^6 c}$$

è possibile esprimere nel modo seguente il numero di elettroni con momento compreso tra p e p+dp:

$$N(p)dp = Cp^2 q^2 dp$$

Trascurando il rinculo del nucleo si può scrivere:

$$q = \frac{E_f - T_e}{c} = \frac{Q - T_e}{c}$$

e quindi, combinando le ultime due relazioni scritte:

$$N(p) = \frac{C}{c^2} p^2 (Q - T_e)^2$$

Ovviamente varranno le due seguenti implicazioni:

$$\begin{cases} p = 0 \Rightarrow N(p) = 0 \\ Q = T_e \Rightarrow N(p) = 0 \end{cases}$$

e quindi si otterrà un andamento come quello mostrato in nero in figura 1.

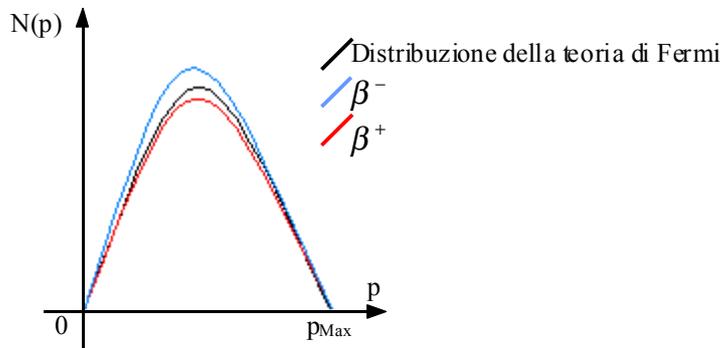


Figura 1

La differenza nei comportamenti tra i due decadimenti effettivi e la teoria di Fermi è dovuta al fatto che non si è tenuto conto della carica dell'elettrone; bisogna dunque aggiungere una funzione $F(z,p)$ di correzione ed ottenere:

$$N(p) = \frac{C}{c^2} p^2 (Q - T_e)^2 F(z, p) \quad (7)$$

Tutto questo discorso vale poi per $l_{e,v}$ nullo (che è il caso più comune). Quando l è nullo si parla infatti di transizione permessa (nel senso di probabilità, e quindi di λ , grande) mentre quando l non è nullo si ha transizione proibita (nel senso di probabilità, e quindi di λ , piccola). Quando l non è nulla (si ricordi che maggiore è il valore di l e maggiore è il numero di termini dello sviluppo in serie che bisogna considerare) è necessario moltiplicare il tutto per un ulteriore termine, detto termine spettrografico $S(p,q)$, che dipende nella forma analitica proprio dal valore di l . Con queste correzioni si ottiene:

$$N(p) = \frac{C}{c^2} p^2 (Q - T_e)^2 F(z, p) S(p, q)$$

e l'andamento sperimentale viene ricalcato molto bene. Molto spesso risulta più comodo esprimere il tutto in funzione dell'energia e quindi si può operare una conversione del tipo:

$$N(p)dp \rightarrow N(T_e)dT_e$$

La forma della curva, comunque, non cambia.

I test sperimentali classici della teoria di Fermi.

È importante fare ora un confronto con i dati reali dovuti alla sperimentazione; dalla relazione (7) è possibile arrivare a scrivere la seguente espressione:

$$Q - T_e \div \sqrt{\frac{N(p)}{F(z, p)p^2}} = K(T_e)$$

Facendo dunque un confronto con i punti sperimentali (rappresentati in azzurro) e quanto previsto dalla teoria di Fermi, si ottiene il grafico di figura 2, detto Kurie-plot.

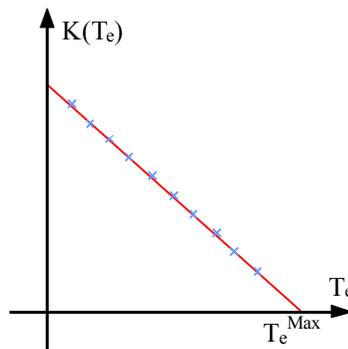


Figura 2

Se fosse stato $l \neq 0$, dalla teoria di Fermi non si sarebbe ottenuto un andamento rettilineo allineato con i punti sperimentali; tale andamento sarebbe però stato recuperato introducendo anche il termine spettrografico S visto in precedenza e ottenendo quindi:

$$Q - T_e \div \sqrt{\frac{N(p)}{F(z, p)p^2 S(p, q)}}$$

Si calcola ora la costante complessiva di decadimento λ e, per fare ciò, è necessario integrare la relazione (6)

$$\lambda = \int_0^{p_{Max}} N(p) dp = C \int_0^{p_{Max}} p^2 (Q - T_e)^2 F(z, p) dp$$

L'ultimo integrale può essere espresso in funzione dell'energia totale dell'elettrone (sarà necessario utilizzare una diversa funzione correttiva $f(z, E)$ e quindi si otterrà:

$$\lambda \div f(z, E_0)$$

dove E_0 sia l'energia totale massima (ovvero la Q). La funzione f è nota come l'integrale di Fermi. Per questioni di dimensionalità si preferisce esprimere l'integrale di Fermi come un numero puro; per ottenere l'adimensionalizzazione si può dividere per una appropriata costante:

$$C^1 = (mc)^3 (mc^2)^2$$

Ricordando poi il legame:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

si può arrivare a scrivere la seguente relazione:

$$fT_{1/2} = \ln 2 \frac{2\pi^3 \hbar^7}{g_F^2 m^5 c^4 |M_{fi}|^2}$$

Il prodotto a primo membro è dunque indipendente da tante grandezze relative all'elettrone e vi possiamo ricavare gli stati dalla $|M_{fi}|^2$; questo prodotto prende il nome di vita media comparativa ed è misurata in secondi. Solitamente si considera il logaritmo della vita media comparativa e si vede che è:

$$3,5 < \log fT_{1/2} < 6$$

Le transizioni con i valori più piccoli sono dette super-permesse (e sono le transizioni $0^+ \rightarrow 0^+$). Ci si sofferma infine sulla costante g_F (che vale per le transizioni di tipo Fermi) che vale:

$$g_F = 0,9 \cdot 10^{-4} \text{ MeVfm}^3$$

La costante di Fermi è una costante universale: altre costanti universali sono invece la costante g_{OPEP} , che vale 1, nonché quella relativa alla forza elettromagnetica, che prevede un rapporto di 10^{-2} , quella relativa alla forza gravitazionale, che prevede un rapporto di 10^{-39} e quella relativa alla forza debole che prevede un rapporto di 10^{-5} .

Regole di selezione dovute al momento angolare e alla parità.

Ci sono situazioni nelle quali il troncamento del primo termine dello sviluppo in serie non è sufficiente in quanto l'elemento di matrice nucleare si annulla (l'annullamento dell'elemento di matrice si ha per esempio quando c'è una variazione di parità); è quindi necessario considerare un ulteriore termine dello sviluppo (ovvero considerare il caso $l=1$). L'esponenziale avrà dunque la seguente forma:

$$e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}} = 1 + \frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r})$$

Per ogni termine in più che si considera nello sviluppo in serie si introduce un ulteriore termine quadratico di p ; ricordando però quanto espresso dalla relazione (3) si osserva che tale termine quadratico è dell'ordine di 10^{-4} e quindi ogni volta che si aggiunge un l si diminuisce di 10^4 la probabilità (considerando $l=2$ si diminuisce la probabilità di 10^{-8} , etc...). Al crescere di l , dunque, la probabilità scende pesantemente e quindi il tempo di dimezzamento aumenta. Per quanto riguarda la vita media comparativa, ogni volta che si sale di un termine l , si deve aggiungere un 3,5. Si avrà dunque la situazione mostrata in tabella 3.

| l | Intervallo | Tipologia |
|-----|------------|------------------|
| 0 | [3,5;6] | Permessa |
| 1 | [6;9,5] | Prima proibita |
| 2 | [9,5;12] | Seconda proibita |
| ... | ... | ... |

Tabella 3

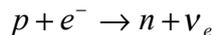
La teoria di Fermi non prende in considerazione lo spin (che comunque non è molto importante se non si è in presenza di un campo che polarizza gli spin), sia e^- che ν hanno però spin e possono complessivamente dare $s=0$ oppure $s=1$. Nel primo caso si ha la transizione di Fermi del tipo $0^+ \rightarrow 0^+$ che ha quindi ΔI nullo, nel secondo caso si ha la transizione di Gamow-Teller. Con $l=1$ si ha transizione di Fermi con $\Delta I=0,1$ e transizione di Gamow-Teller con $\Delta I=0,1,2$ ovvero con cambio di parità, la regola di selezione per il decadimento di tipo primo proibito sarà dunque la seguente:

$$\Delta I = 0,1,2$$

con cambio di parità. Forti variazioni di parità implicano l abbastanza grandi e quindi λ poco probabile e $T_{1/2}$ molto alti.

Reazione di Electron Capture.

In precedenza si è accennato al fatto che, oltre al decadimento β^+ e β^- , c'è anche la EC che era rappresentata nel modo seguente:



Esisterà dunque una λ_{EC} . Lo spettro dei neutrini emessi è discreto (come dovrebbe essere essendo in presenza di un fenomeno a due corpi) ed è possibile ricostruirlo a partire dall'elettrone che viene assorbito (e quindi dai raggi X caratteristici) per questo motivo la λ_{EC} viene anche indicata nel modo seguente: $\lambda_{\text{EC}}^{(\kappa)}$ dove κ è lo shell dell'elettrone coinvolto. Soffermandosi sul caso con l nullo sarà necessario rifare il discorso prima visto dove però non si ha più a che fare con una particella libera perché questa volta è stata catturata dal nucleo; si otterrà allora:

$$\lambda_{\text{EC}}^{(\kappa)} = \frac{g_F^2 |M_{fi}|^2 E_\nu^2}{\pi^2 \hbar^4 c^2} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^3$$

dove a_0 è ovviamente il raggio di Bohr. Un valore importante è (nel caso in cui sia possibile anche il decadimento β^+) il rapporto tra λ_{EC} e λ_{β} ; tale rapporto dipende da Z e dall'energia massima. Alcuni valori numerici sono riportati nella tabella numero 4.

| Z | E_{Max} | $\lambda_{\text{EC}}/\lambda_{\beta}$ |
|-----|------------------|---------------------------------------|
| 15 | 300 keV | 2 |
| 40 | 300 keV | 150 |
| 80 | 300 keV | $\sim 10^4$ |
| 15 | 1 MeV | 0,04 |
| 40 | 1 MeV | 2 |
| 80 | 1 MeV | ~ 60 |

Tabella 4

Decadimento γ .

Un terzo tipo di decadimento radioattivo è il decadimento γ , detto anche diseccitazione nucleare, dovuta, ovviamente, alla presenza nel nucleo di livelli eccitati raggiunti per esempio in seguito a decadimenti α o β . Oltre allo stato fondamentale, infatti, ogni nucleone ha degli stati eccitati instabili che hanno una certa vita media τ legata all'ampiezza ΔE dell'indeterminazione del livello energetico (solitamente pari a qualche eV) dalla relazione di Heisenberg:

$$\tau \Delta E = \hbar$$

nella quale si ricordi che:

$$\hbar = 6,6 \cdot 10^{-16} \text{ eVs}$$

Con A piccolo l'intervallo energetico tra i vari livelli eccitati è molto marcato; tale differenziazione va diminuendo con l'aumentare di A (tutti i nuclei con A grande hanno una differenza tra lo stato fondamentale e il livello eccitato molto piccola e circa pari a 0,1 MeV). Il tempo τ è solitamente dell'ordine dei 10^{-12} s quando la diseccitazione è di tipo elettromagnetico ma è molto più piccolo se la diseccitazione è di tipo diverso (nel caso del decadimento elettromagnetico τ varia tra 10^{-16} secondi e 10^4 anni). Quando τ è almeno superiore al μs (in modo che si possa riconoscere di essere in un livello diverso da quello fondamentale) si parla di livello metastabile e si ha un isomero del nuclide di partenza, come mostrato in figura 3.



Figura 3

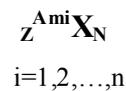


Figura 4

Quando più di un livello è metastabile si avrà la situazione mostrata in figura 4.