

**Decadimento  $\gamma$ . Energetica del decadimento  $\gamma$ . Analisi quantistica del decadimento  $\gamma$ . Regole di selezione per momento angolare e parità. Conversione interna. Spettroscopia del decadimento  $\gamma$ .**

**Decadimento  $\gamma$ .**

In figura 1 sono riportati i primi livelli eccitati dell'  $^{17}\text{O}$ .

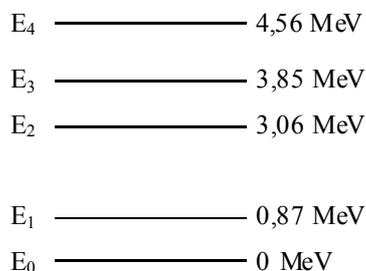


Figura 1

Dal livello numero 3 in giù è possibile osservare solo emissione di fotoni e quindi si hanno le cascate  $\gamma$ . Nella tabella 1 sono mostrati tre possibili decadimenti con le rispettive energie minime necessarie per emettere le singole particelle n, p o  $\alpha$ .

Decadimento	Energia Minima per l'emissione della particella indicata
$^{17}\text{O} \rightarrow ^{16}\text{O} + n$	$E_n = 4,15 \text{ MeV}$
$^{17}\text{O} \rightarrow ^{16}\text{N} + p$	$E_p = 13,78 \text{ MeV}$
$^{17}\text{O} \rightarrow ^{13}\text{C} + ^4_2\text{He}$	$E_\alpha = 6,36 \text{ MeV}$

Tabella 1

È opportuno concentrarsi un attimo sulla definizione di stato metastabile: uno stato metastabile è uno stato relativamente al quale il tempo di transizione è grande (solitamente maggiore di  $10^{-16}$  s); si parla in questo caso di un isomero del nuclide di partenza. Il passaggio dal livello metastabile allo stato fondamentale prende il nome di transizione interna (IT). Il decadimento elettromagnetico può allora avvenire per decadimento  $\gamma$  oppure per transizione interna; nel caso di decadimento  $\gamma$  la transizione dalla situazione energetica  $E_1$  alla situazione energetica  $E_2$  è accompagnata dall'emissione di un fotone  $\gamma$ ; nel caso del processo di transizione interna la transizione è accompagnata dall'emissione di elettroni atomici espulsi dall'atomo (il fatto che si tratti di elettroni atomici è mostrato dal fatto che la loro energia è discreta).

**Energetica del decadimento  $\gamma$ .**

Si supponga dunque che un nucleo di massa M a riposo vada incontro ad una transizione da uno stato iniziale di energia  $E_i$  ad uno stato finale di energia  $E_f$ , accompagnato da un fotone. Per la conservazione della quantità di moto si dovrà avere:

$$\vec{p}_r + \vec{p}_R = 0$$

dove il pedice R si riferisce al nucleo diseccitato che acquisterà quantità di moto a causa del rinculo. Si avrà allora:

$$p_R = p_\gamma \tag{1}$$

Per la conservazione dell'energia si potrà invece affermare che:

$$E_i = E_f + E_\gamma + T_R$$

con:

$$E_\gamma = cp_\gamma \tag{2}$$

Definendo allora come segue il salto energetico dallo stato iniziale allo stato finale

$$\Delta E = E_i - E_f$$

si avrà:

$$E_i - E_f = E_\gamma + T_R$$

Essendo poi, dalla meccanica classica:

$$T_R = \frac{p_R^2}{2M}$$

si può scrivere:

$$\Delta E = E_\gamma + \frac{p_R^2}{2M}$$

Moltiplicando e dividendo per  $c^2$  il rapporto che si trova a secondo membro si ricava:

$$\Delta E = E_\gamma + \frac{p_R^2 c^2}{2Mc^2}$$

Sfruttando la relazione (1) si ottiene allora:

$$\Delta E = E_\gamma + \frac{p_\gamma^2 c^2}{2Mc^2}$$

e quindi, facendo infine riferimento alla relazione (2):

$$\Delta E = E_\gamma + \frac{E_r^2}{2Mc^2} \quad (3)$$

detta energia del fotone emesso. Per  $A=100$  e transizione di 1 MeV si ha:

$$\frac{E_r^2}{2Mc^2} \cong 10^{-5} eV$$

e quindi, normalmente, il  $\Delta E$  viene identificato come l'energia del fotone emesso trascurando il secondo addendo del secondo membro della relazione (3). Nel caso dell'emissione si avrà quindi:

$$\Delta E \cong E_\gamma$$

Nel caso dell'assorbimento è invece necessario considerare anche il termine che prima trascurato per poter avere la transizione:

$$E_\gamma + \frac{E_r^2}{2Mc^2} \rightarrow E_f \rightarrow E_i$$

### Analisi quantistica del decadimento $\gamma$ .

Per la probabilità di emissione di un fotone nella transizione da  $E_i$  ad  $E_f$ , si farà una stima ideale attraverso la quale si troverà un valore di riferimento dal quale poi tutti gli altri valori della probabilità saranno calcolati; si parla allora di una  $\lambda_{\gamma L}(E, M)$  di Weisskopf (il pedice L indica l'ordine di multipolo). Tale stima considera:

- La funzione in termini di particella singola:

$$\psi_i = R_i(r) \phi_{l,m}(\vartheta, \varphi)$$

- Il protone esterno come unico responsabile della transizione.

- Lo stadio finale della transizione caratterizzato da  $s(l=0)$ :

$$\psi_f = R_f(r) = \text{costante}$$

-  $R_i$  ed  $R_f$  definite costanti per  $r$  minore di  $R$  (raggio nucleare) e nulle per  $r$  maggiore di  $R$ .

Tenendo conto di queste considerazioni si otterrà una  $\lambda(E, L)$  e una  $\lambda(M, L)$  espressi come:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda(E, L) \div \left( \frac{E}{\hbar c} \right)^{2L+1} R^{2L} \\ \lambda(M, L) \div \left( \frac{E}{\hbar c} \right)^{2L+1} R^{2L-2} \end{array} \right.$$

Come prima cosa è importante notare che maggiore è l'ordine di multipolo  $L$  e maggiore è anche  $\lambda$ , inoltre, essendo:

$$R = R_0 A^{1/3}$$

il termine  $\lambda$  dipende dalle dimensioni nucleari. I termini  $\lambda$  si misurano in  $s^{-1}$  con  $E$  misurato in MeV ed  $R$  in Fermi. Nella tabella 2 sono riportati i valori numerici relativi ad alcuni tipi di transizioni.

Tipo di transizione	Valore di $\lambda$
E1	$10^{14} A^{2/3} E^3$
E2	$7,3 \cdot 10^7 A^{4/3} E^5$
E3	$34 A^2 E^7$

$E4$	$1,1 \cdot 10^{-5} A^{8/3} E^9$
$M1$	$5,6 \cdot 10^{13} E^3$
$M2$	$3,5 \cdot 10^7 A^{2/3} E^5$
$M3$	$16 A^{4/3} E^7$
$M4$	$4,5 \cdot 10^{-6} A^2 E^9$

Tabella 2

I coefficienti di decadimento, osservati con la teoria di Weisskoff, permettono di capire che la probabilità di transizione dipende dall'ordine di multipolo; una transizione  $E_1$  dominante sarà parzialmente rappresentata da un contributo  $M_2$  mentre una transizione  $M_1$  dominante sarà molto meglio rappresentata da un contributo  $E_2$ . In generale un  $\lambda$  piccolo è dominante.

### Regole di selezione per momento angolare e parità.

L'ordine di multipolo  $L$  viene stabilito dalla parità e dalla conservazione del momento angolare totale, dati dunque  $I_i$  ed  $I_f$  bisogna considerare la seguente relazione vettoriale:

$$\vec{I}_i = \vec{L} + \vec{I}_f$$

dalla quale si potrà ricavare:

$$|I_f - I_i| \leq L \leq I_f + I_i$$

Se  $I_i$  oppure  $I_f$  sono nulli la transizione è di puro multipolo. Se non c'è differenza di parità il contributo di  $E$  sarà relativo agli  $L$  pari e quello di  $M$  dagli  $L$  dispari mentre se c'è differenza di parità il contributo di  $E$  sarà relativo agli  $L$  dispari e il contributo di  $M$  sarà relativo agli  $L$  pari. Il valore  $L$  nullo non è possibile in quanto non sarebbe una situazione compatibile con la transizione elettronica. Se però:

$$I_i = I_f = 0$$

allora non c'è emissione di fotoni e  $L$  è nullo.

### Conversione interna.

Quando  $L$  è nullo il livello finale è un livello metastabile e quindi esiste una modalità differente di diseccitazione rispetto al decadimento  $\gamma$  che prende il nome di conversione interna (a volte indicato IT). Come è stato accennato in precedenza, la transizione interna è accompagnata dall'emissione di elettroni atomici espulsi dall'atomo; dal punto di vista energetico varrà allora la seguente relazione:

$$\Delta E = T_{e^-} + B_{at}$$

dove  $B_{at}$  è detta energia di legame atomica. Si avrà allora un'espressione della probabilità  $\lambda_{CI}^{(k)}$  dove è importante specificare sempre il livello. In generale, per la costante di decadimento vale la relazione:

$$\lambda_{Tot} = \lambda_\gamma + \lambda_{IT}$$

Si definisce inoltre coefficiente di conversione interna la seguente grandezza:

$$\alpha = \frac{\lambda_{IT}}{\lambda_\gamma}$$

e quindi si può scrivere:

$$\lambda_{Tot} = \lambda_\gamma (1 + \alpha)$$

Naturalmente, quando le possibili transizioni interne sono diverse, anche il coefficiente  $\alpha$  sarà composito, ovvero si avrà:

$$\alpha_{Tot} = (\alpha_K + \alpha_L + \dots)$$

così come poi ci possono essere delle differenziazioni legate ai vari sottolivelli e quindi si potrebbe avere:

$$\alpha_L = \alpha_{L_I} + \alpha_{L_{II}} + \dots$$

Nella maggior parte dei casi si potrà però semplicemente scrivere:

$$\alpha_{Tot} \cong \alpha_K$$

Il calcolo del coefficiente  $\alpha$  è particolarmente complesso e tiene conto che:

$$\begin{cases} \psi_i = \psi_{Ni} \psi_e^{(k)} \\ \psi_f = \psi_{Nf} \psi_e^{(libero)} \end{cases}$$

e tiene inoltre conto del rapporto tra  $Z^3$  ed  $n^3$ . Un calcolo non relativistico porta ai due seguenti risultati:

$$\begin{cases} \alpha(E, L) = \frac{\lambda_{CI}}{\lambda_\gamma} = \frac{Z^3}{n^3} \left( \frac{L}{L+1} \right) \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \right)^4 \left( \frac{2m_e c^2}{E} \right)^{L+\frac{5}{2}} \\ \alpha(M, L) = \frac{\lambda_{CI}}{\lambda_\gamma} = \frac{Z^3}{n^3} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \right)^4 \left( \frac{2m_e c^2}{E} \right)^{L+\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Si nota dunque che c'è una forte dipendenza dal tipo di transizione (magnetica o elettrica). Per transizioni in cui sono importanti sia i contributi di M che quelli di E la conversione interna è dominante per piccoli valori di E e per alti valori di Z. Quando, come si è accennato prima, si ha:

$$I_i = I_f = 0$$

si parla di conversione interna pura e non si calcola il termine  $\alpha$  poiché  $\lambda_\gamma$  è nulla;  $\alpha$  viene utilizzato solo per valori almeno superiori all'1%.

### Spettroscopia del decadimento $\gamma$ .

La spettroscopia del decadimento  $\gamma$  è molto complessa; si può comprendere questo osservando gli schemi di decadimento. In tali schemi vengono indicati, per ogni nuclide, il livello fondamentale e i livelli eccitati e si fa risaltare la differenza di massa tra due nuclidi vicini. Nella seguente immagine di figura 3 viene mostrato un esempio di schema di decadimento relativo al nuclide  $^{40}_{19}\text{K}_{21}$ . Come si vede nel diagramma è mostrato il tipo di transizione (in azzurro è indicata l'emissione di fotoni), i livelli energetici, la parità e la probabilità che una certa transizione si realizzi (branching ratio)

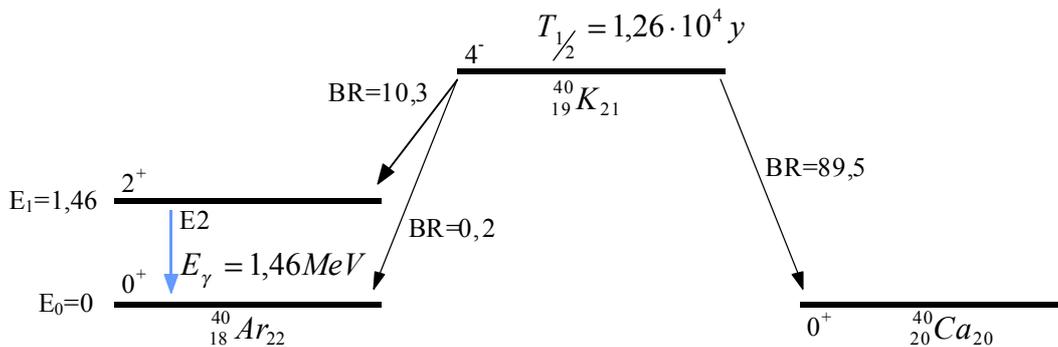


Figura 3

Ovviamente la somma dei branching ratio deve essere pari all'unità. La transizione più favorita è la  $\beta^-$  in quanto si ha:

$$Q_{\beta^-} = (M_K - M_{Ca})c^2 = 1,314\text{MeV}$$

Osservando la differenza di parità si ha un  $\Delta I$  di quattro unità che può avvenire per:

$$\begin{cases} l_{disp} = 3 \\ s = 1 \end{cases}$$

La transizione  $\beta$  al terzo ordine è proibita. Dall'altra parte si ha, per quanto riguarda il livello più basso:

$$Q_o = (M_K - M_{Ar})c^2 = 1,505\text{MeV}$$

dunque la Q disponibile è maggiore di 1,022 MeV. Lo 0,2% indicato nel diagramma sarà frazionato tra la cattura elettronica (EC) e il decadimento  $\beta^+$  dove però il primo tipo di transizione è altamente favorita. Per quanto riguarda invece le transizioni verso il livello di energia  $E_1$  si avrà:

$$Q_o = (1,505\text{MeV}) - (1,46\text{MeV}) < 1,022\text{MeV}$$

Dunque il branching del 10,3% è solo relativo alla EC in quanto non c'è la possibilità di creare il positrone. La grossa differenza nei branching ratio (10,3 contro 0,2) è dovuta al fatto che è avvenuto uno scambio di parità del tipo  $\Delta I=2$  e quindi sarà:

$$\begin{cases} l = 1 \\ s = 1 \end{cases}$$

Siccome  $^{40}\text{K}$  ha un tempo di dimezzamento molto elevato è possibile arrivare a comprendere come lo 0,0117% del K sia  $^{40}\text{K}$ . Tutti i corpi che contengono K hanno dunque una piccola percentuale di radioattività. È perciò importante

conoscere l'attività in decadimenti al secondo ovvero in Becquerel (Bq) ma sarà altrettanto importante conoscere l'attività specifica, che si misura in Bq/kg.

*Qualche esempio numerico per comprendere l'importanza dei valori in gioco. Si faccia innanzitutto riferimento ad un corpo umano, che ha una massa standard  $m$  di 70 kg. Di questi, lo 0,35% è  $^{40}\text{K}$ . Si valuti dunque l'attività (complessiva e specifica) di questo. L'attività si misura come:*

$$A = \lambda N$$

*e quindi, nel caso in analisi, si avrà:*

$$A = \lambda N = \left( 0,0035 \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{N_{Av}}{PA} m \right) = 7293 \text{Bq}$$

*mentre l'attività specifica sarà:*

$$a = \frac{A}{m} = 104 \frac{\text{Bq}}{\text{kg}}$$

*Un altro esempio particolarmente significativo può essere quello della banana, al cui attività specifica è pari a 127 Bq/kg; per una banana priva di buccia, e quindi del peso approssimativo di 100g, si ingeriscono quindi 12,7 Bq di  $^{40}\text{K}$ . Le noccioline tostate prive di acqua (le arachidi) hanno una attività specifica di 700 Bq/kg e quindi una decina di grammi di arachidi porta 12 Bq di  $^{40}\text{K}$ . Per quanto riguarda, infine, i funghi secchi, anch'essi hanno una attività specifica di 700 Bq/kg e quindi una tipica bustina da due porzioni (equivalente a circa 40 g di funghi secchi) porta 70 Bq di  $^{40}\text{K}$  e quindi una singola porzione presenta circa 35 Bq di  $^{40}\text{K}$ .*

**Spettroscopia del decadimento  $\gamma$ . Reazioni nucleari.**

**Spettroscopia del decadimento  $\gamma$ .**

È stato in precedenza affermato che il decadimento  $\gamma$  si ha quando un nuclide presenta uno o più isomeri eccitati; i nuclei che presentano isomeri sono distribuiti, come mostrato in figura 1, in zone particolari della carta dei nuclidi.

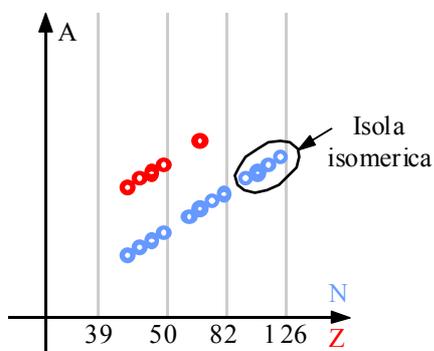


Figura 1

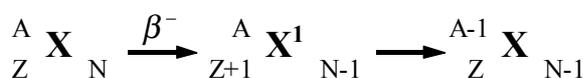


Figura 2

Quando si è in presenza di livelli altamente eccitati di un nuclide si assiste all'emissione di neutroni o protoni ritardati; questo avviene in quanto si può assistere a decadimento diretto oppure a decadimento tramite il passaggio per un diverso nucleo; si avrà quindi una sequenza del tipo: nucleo precursore  $\rightarrow$  nucleo emettitore  $\rightarrow$  nucleo figlio come quella schematizzata in figura 2 che, ovviamente, introduce nella reazione un certo ritardo. Supponendo allora che il livello eccitato abbia un'energia  $E_{K1}$  si potrà costruire uno schema di decadimento come quello mostrato in figura 3.

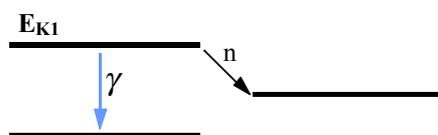


Figura 3

Un esempio numerico può essere quello relativo al  ${}^{17}\text{N}$  di cui si vede lo schema di decadimento in figura 4.

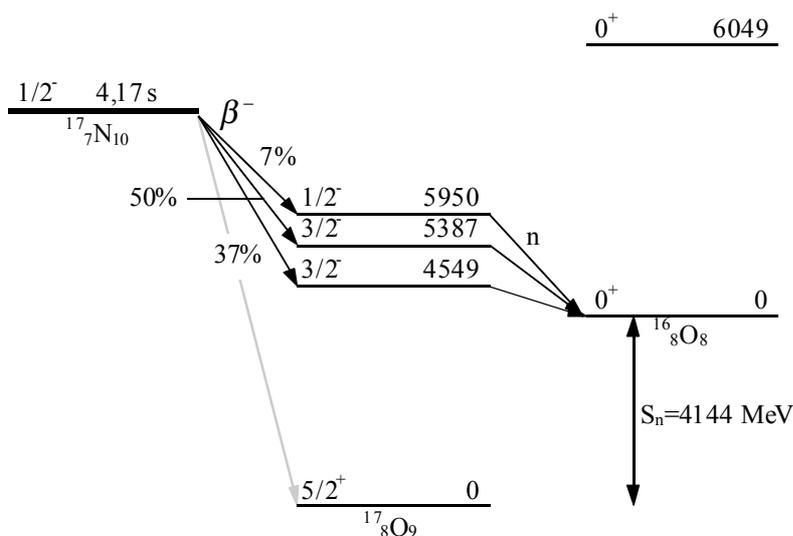


Figura 4

Si può dunque osservare che saranno rilevati dei neutroni emessi con ritardo, in effetti lo spettro dei neutroni emessi nel decadimento appena mostrato è quello rappresentato in figura 5.

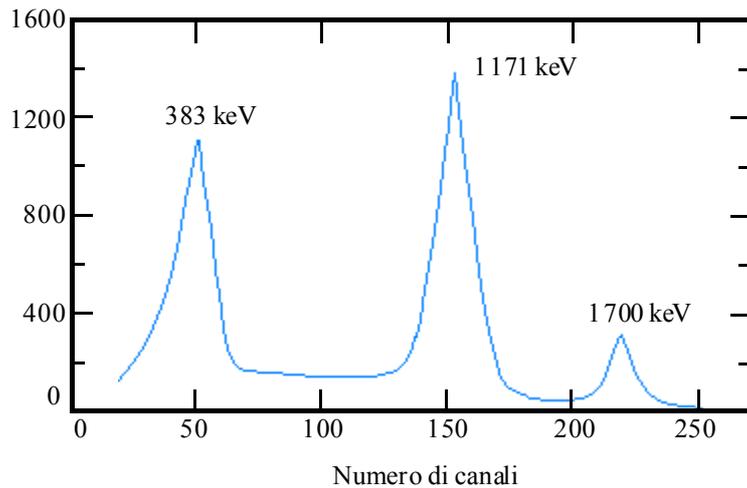


Figura 5

Per quanto riguarda l'energia, si avrà:

$$T_n = 5950 - 4144$$

L'energia ceduta va poi al neutrone secondo la relazione:

$$E_n = T_n \frac{A}{A-1}$$

In figura 6 è mostrato l'andamento temporale dell'attività e si nota l'andamento costante dei neutroni di background (in azzurro), l'andamento sperimentale (in rosso) che è quello ottenuto tramite un fit dei punti sperimentali) e l'andamento tendenziale (in grigio). Quest'ultimo non è altro che una retta, la cui pendenza dipende sostanzialmente dal tempo di dimezzamento.

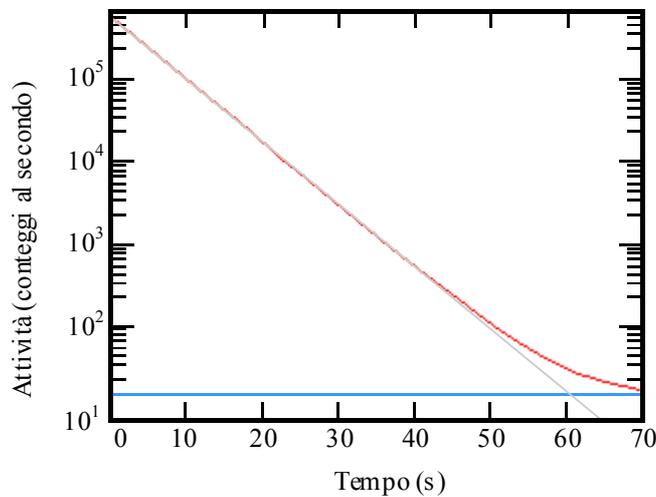
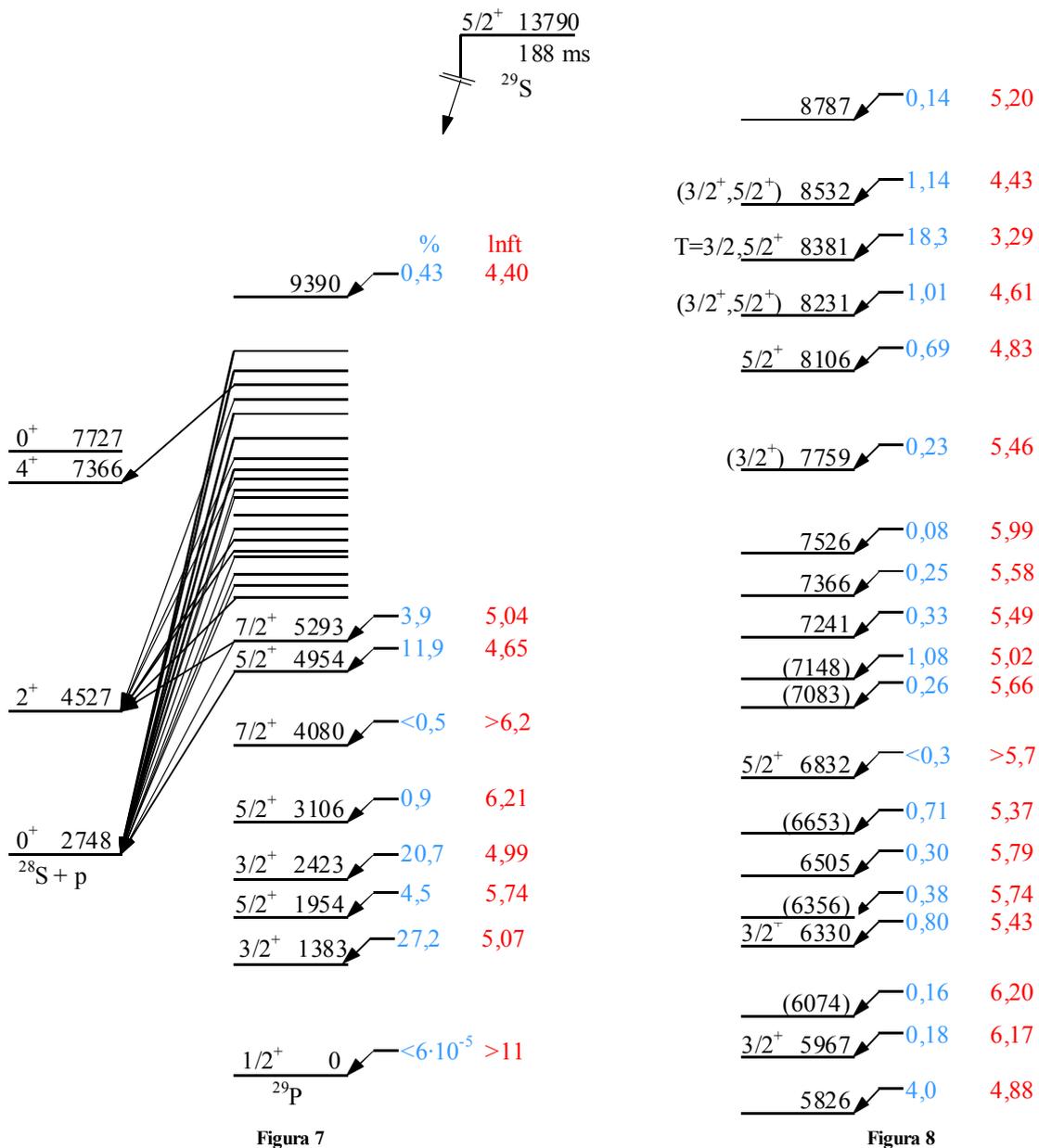


Figura 6

In figura 7 si vede un altro schema di decadimento che presenta, questa volta, dei protoni ritardati e che, ancora una volta, parte da un evento di decadimento  $\beta$ , relativo però a  $^{29}\text{S}$ .



La parte non numerata è mostrata ingrandita in figura 8. In figura 9 è invece mostrato lo spettro energetico dei protoni emessi durante il decadimento di  $^{29}\text{S}$  nel quale possono essere individuati circa una trentina di picchi.

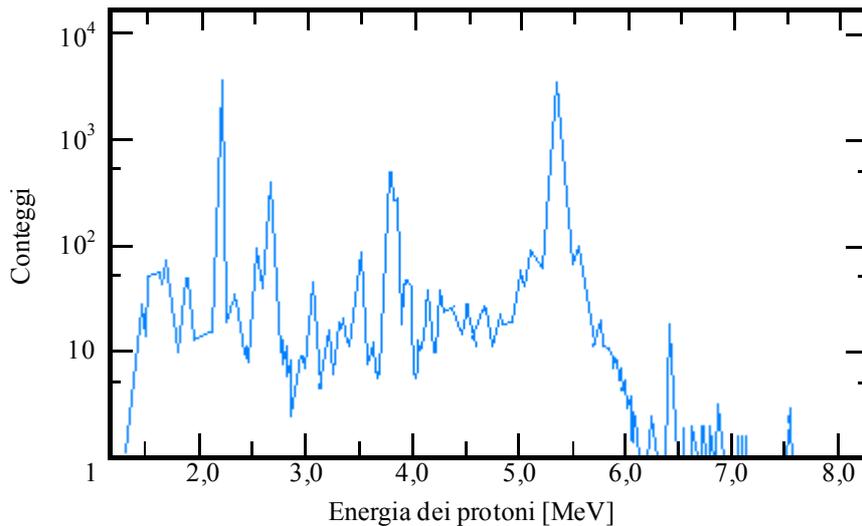


Figura 9

In figura 10 viene preso in considerazione il decadimento di  $^{137}_{55}\text{Cs}$ .

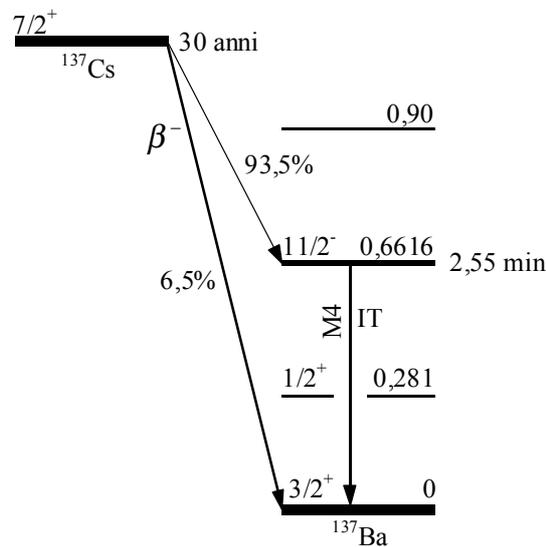


Figura 10

Il Cesio emette dunque un fotone da 0,6616 MeV e questo lo rende un pericoloso contaminante ambientale; si nota inoltre che entrambe le trasformazioni evidenziate in questo schema presentano un  $\Delta I$  di 2 ma la prima presenta anche un cambio di parità e questo la rende più probabile. Giunti allora al secondo livello eccitato del Ba troviamo un tempo di dimezzamento piuttosto grande dovuto al forte  $\Delta I$ ; il grande  $\Delta I$  è anche il motivo per cui, a questo punto, la transizione interna sia preferita al decadimento  $\gamma$ . Il coefficiente di conversione interna IT è dell'11% (ed equivale alla probabilità che fra tutti i decadimenti possibili avvenga proprio la IT). In effetti esistono due possibili transizioni interne: quella mostrata, che porta allo stato fondamentale del Ba e che presenta un multipolo magnetico M4, e quella che porterebbe al primo stato eccitato del Ba (non mostrata in figura in quanto implicherebbe un  $\Delta I$  piuttosto grande e quindi praticamente non si vede). Per quanto riguarda lo spettro energetico delle particelle emesse si vedrà, per quanto riguarda lo spettro  $\beta$ , uno spettro continuo e poi dei valori precisi dovuti al decadimento monocromatico, ovvero agli elettroni monocromatici dovuti alla internal transition. Un discorso analogo potrebbe essere ripetuto per i fotoni. In figura 11, infine, è mostrato un ultimo esempio di schema di decadimento legato al decadimento di  $^{176}\text{Lu}$ .

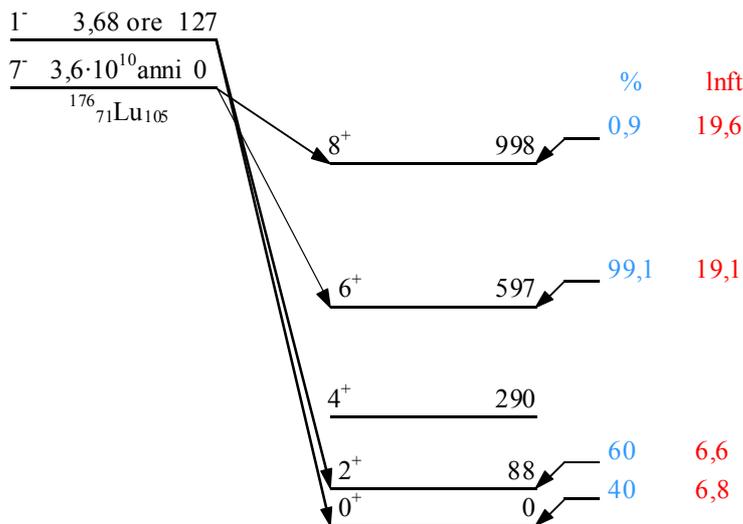


Figura 11

Si nota che il livello  $4^+$  non viene mai raggiunto perché gli vengono preferiti livelli che permettono il minimo  $\Delta I$ ; in effetti gli altri quattro livelli vengono raggiunti dai due di partenza con un  $\Delta I$  pari a  $\pm 1$ . Si nota inoltre che tanto più è alto il  $Q$  e tanto più alto è il logft; in effetti dei livelli attorno al 19 sono caratteristici per le transizioni  $\beta$  proibite (in questo caso sono le prime proibite).

### Reazioni nucleari.

L'emissione ritardata è molto spesso legata agli eventi di fissione per i quali si conoscono più di 100 precursori che vengono solitamente raccolti in 6 gruppi in base al valore medio del tempo di dimezzamento. In natura, però, esistono anche nuclidi naturalmente radioattivi che vanno a formare famiglie radioattive naturali; tali famiglie non sono altro che l'insieme di nuclidi che derivano dai decadimenti di  $^{235}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$  e  $^{232}\text{Th}$ . I decadimenti che danno origine, a partire dai precursori, agli elementi della famiglia sono decadimenti del tipo  $\alpha$  e  $\beta$  per poi arrivare, dopo diversi decadimento, all'elemento  $^{206}_{82}\text{Pb}$ , che è stabile. Si definisce dunque il fondo radioattivo naturale come la radioattività dovuta alla presenza in natura di nuclidi radioattivi;  $^{14}\text{C}$  e  $^3\text{H}$  contribuiscono al fondo naturale con tempi di dimezzamento di 5000 e 9000 anni e vengono da reazioni dei raggi cosmici. Anche  $^{40}\text{K}$  fa parte del fondo naturale, rappresenta un decimillesimo del potassio presente in natura ed è presente anche nel corpo umano. Quando esiste un precursore con un tempo di dimezzamento molto maggiore rispetto al tempo di dimezzamento di qualunque altro elemento della sua catena si parla di equilibrio secolare, espresso dalla relazione:

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \dots = \lambda_N N_N$$

Facendo per esempio riferimento alla catena relativo al  $^{238}\text{U}$  si trovano gli elementi mostrati, con il rispettivo tempo di dimezzamento, nella tabella 1.

Nuclide	Tempo di dimezzamento [anni]
$^{238}\text{U}$	$4,5 \cdot 10^9$
$^{234}\text{U}$	$2,5 \cdot 10^5$
$^{230}\text{Th}$	$8 \cdot 10^4$
$^{226}\text{Ra}$	1620

Tabella 1

Si nota dunque che, a parte il nuclide precursore, tutti gli altri nuclidi della catena hanno tempi di dimezzamento molto più piccoli e dunque dall'equilibrio secolare si deduce che:

$$\lambda_{238} N_{238} = \lambda_{234} N_{234} = \lambda_{230} N_{230} = \lambda_{226} N_{226}$$

In particolare ci si sofferma sui primi due termini dell'uguaglianza, ovvero sulla seguente espressione:

$$\lambda_{238} N_{238} = \lambda_{234} N_{234}$$

dalla quale si ricava:

$$\frac{N_{234}}{N_{238}} = \frac{\left(T_{1/2}\right)_{234}}{\left(T_{1/2}\right)_{238}} = 5 \cdot 10^{-4}$$

Prendendo poi il  $^{226}\text{Ra}$  e separandolo dal resto della catena si osserva che tale nuclide andrà a sua volta a creare una ulteriore catena di decadimenti che conterrà anche  $^{222}\text{Rn}$ , quest'ultimo nuclide ha un tempo di dimezzamento di circa 3 giorni e quindi si può nuovamente osservare il formarsi di un nuovo equilibrio secolare tra questi due elementi.

Soffermandosi ora sulla  $\lambda_{\text{Tot}}$  e sulla  $\lambda_{\text{Parz}}$  si può fare riferimento ad un grammo di Uranio naturale; da questo campione si potranno osservare i decadimenti  $\alpha$  dovuti alla presenza di  $^{235}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$  e  $^{234}\text{U}$  e poi si avrà anche la fissione spontanea; quest'ultima reazione avviene infatti quando si ha:

$$16 < \frac{Z^2}{A} < 50$$

e, per l'Uranio si ha:

$$\frac{Z^2}{A} = 35,6$$

Il tempo di decadimento dovuto alla fissione (dal quale poi si ricava la rispettiva  $\lambda$ ) è di circa  $10^{15}$  anni mentre il tempo di dimezzamento complessivo (dovuto quasi completamente all'apporto relativo ai decadimenti  $\alpha$ ) è di  $4,5 \cdot 10^9$  anni. L'attività di fissione spontanea dell'Uranio porta a circa 24 fissioni in un anno per ogni grammo di Uranio; come raffronto si osserva che  $^{238}\text{U}$  va incontro a 12450 disintegrazioni al secondo, stesso valore per  $^{234}\text{U}$ , per quanto riguarda invece  $^{235}\text{U}$  si hanno 570 disintegrazioni al secondo.

Alcuni rapidi esempi numerici conclusivi. Il  $^{252}\text{Cf}$  è caratterizzato dal seguente rapporto:

$$\frac{Z^2}{A} = 38$$

e dai seguenti tempi di dimezzamento relativi ai fenomeni di fissione e di decadimento  $\alpha$ :

$$\begin{cases} T_{1/2}^{FS} = 85,4 \text{anni} \\ T_{1/2}^{\alpha} = 2,70 \text{anni} \end{cases}$$

e quindi, complessivamente:

$$T_{1/2}^{Tot} = 2,70 \text{anni}$$

Un ulteriore dato numerico interessante è la potenza fornita da un grammo di  $^{239}\text{Pu}$  pensando all'emissione di particelle  $\alpha$  con energia di 5,6 MeV. Il numero di decadimenti per secondo e per grammo sarà:

$$N = \frac{N_{Av}}{A} m \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = 6 \cdot 10^{11}$$

Per valutare la potenza è ora necessario moltiplicare quanto trovato per l'energia emessa da ogni singola particella  $\alpha$ ; si avrà dunque:

$$P = NE_{\alpha} = 3,6 \cdot 10^{12} \frac{\text{MeV}}{\text{sg}} = 0,573 \frac{\text{Watt}}{\text{g}}$$

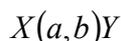
**Reazioni nucleari e leggi di conservazione. Energetica delle reazioni nucleari. Sezione d'urto delle reazioni nucleari. Sezioni d'urto di scattering e di reazione. Il modello ottico e il modello a nucleo composto.**

**Reazioni nucleari e leggi di conservazione.**

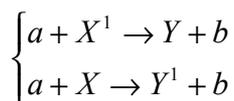
È giunto ora il momento di parlare delle reazioni nucleari, ovvero di quelle reazioni che si hanno quando due nuclei si avvicinano abbastanza da entrare nel range di azione delle forze nucleari. Le reazioni nucleari sono prima di tutto caratterizzate dall'energia alla quale avvengono: si parla allora di basse energie quando si è nell'ordine del MeV, di medie energie quando si è nell'ordine delle centinaia di MeV (o comunque ad energie superiori alla soglia di produzione dei pioni) e di alte energie quando si è nell'ordine delle centinaia di GeV (il limite odierno per le macchine acceleratrici è di circa 200 GeV). In questo corso si farà riferimento solo alle basse energie. La reazione nucleare si ha quando una particella proiettile colpisce un target per dare origine alla reazione



indicata anche, a volte, nel modo seguente:



Nell'ambito delle basse energie le particelle indicate come  $a$  e  $b$  sono molto più leggere delle particelle  $X$  e  $Y$ . Ovviamente  $X$  e  $Y$  possono coincidere (e quindi anche  $a$  e  $b$  coincideranno) e si parla di scattering (che è elastico o anelastico a seconda che  $X$  rimanga o meno, dopo la reazione, nello stato fondamentale). Se  $X$  ed  $Y$  sono tra di loro diverse allora lo saranno anche  $a$  e  $b$  che possono essere per esempio fotoni (nel qual caso si parla di reazione fotonucleare). Quando  $X$  rimane e  $b$  è un fotone si parla di cattura radiativa, che è utile per la realizzazione di isotopi più pesanti che solitamente saranno emettitori  $\beta$ . La relazione (1) esprime uno dei possibili canali della reazione, altri due possibili canali della reazione sono i seguenti:



dove  $X^1$  ed  $Y^1$  sono ovviamente degli stati eccitati di  $X$  e  $Y$ . Il primo membro della relazione (1) prende il nome di canale di entrata (oppure canale  $\alpha$ ) mentre il secondo membro prende il nome di canale di uscita (o canale  $\beta$ ). Un canale può essere aperto o chiuso a seconda che la reazione possa avvenire o meno. Il fatto che una reazione possa avvenire dipende ovviamente dalla seguente serie di leggi:

- legge della conservazione dell'energia totale;
- legge della conservazione del momento;
- legge della conservazione del momento angolare;
- legge della conservazione della parità;
- legge della conservazione del numero totale di nucleoni (ad energie superiori alla soglia di produzione dei mesoni);
- legge della conservazione del numero dei vari nucleoni (a basse energie).

La reazione nucleare avviene in tempi variabili tra i  $10^{-16}$  o  $10^{-22}$  secondi e quindi si trascura tutto ciò che dipende in seguito dalla forza debole in quanto questa agisce in tempi dell'ordine di  $10^{-3}$  secondi.

**Energetica delle reazioni nucleari.**

Siccome solitamente vengono viste le particelle  $b$ , in quanto sono solitamente le più facili da fermare e quindi da rivelare, è conveniente cercare una relazione che leghi tali particelle alle particelle  $a$  e all'angolo esplorato dal rivelatore. Si consideri dunque la reazione espressa dalla relazione (1) e si supponga che  $X$  ed  $Y$  siano nello stato fondamentale. Si farà riferimento all'energia nella sua forma classica ovvero:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

dove  $m$  sia la massa a riposo. Anche per le reazioni nucleari si può definire il  $Q$  value che sarà:

$$Q = (m_i - m_f)c^2 = (m_X + m_a - m_Y - m_b)c^2$$

oppure anche:

$$Q = T_{out} - T_{in}$$

Si parlerà allora di reazione esotermica quando:

$$Q > 0 \Leftrightarrow T_Y + T_b > T_X + T_a$$

mentre si dirà endotermica una reazione tale per cui:

$$Q < 0 \Leftrightarrow T_Y + T_b < T_X + T_a$$

Facendo ora riferimento alla conservazione della quantità di moto si avrà:

$$m_X v_X + m_a v_a = m_Y v_Y + m_b v_b$$

(spesso, tra l'altro, nel sistema del laboratorio si pone  $v_x$  nulla mentre  $v_a$  è solitamente nota), fissato dunque l'angolo  $\theta$  di emissione di  $b$ , si può considerare il piano di reazione e si ricaveranno le due seguenti espressioni:

$$\begin{cases} p_a = p_b \cos \vartheta + p_Y \cos \varphi \\ 0 = p_b \sin \vartheta - p_Y \sin \varphi \end{cases}$$

Supponendo che  $X$  sia ferma si ha, inoltre:

$$Q = T_Y + T_b - T_a$$

Ricordando allora l'espressione:

$$T = \frac{p^2}{2m}$$

si può esprimere il  $Q$  nel modo seguente:

$$Q = T_b \left( 1 + \frac{m_b}{m_Y} \right) - T_a \left( 1 - \frac{m_a}{m_Y} \right) - \frac{2\sqrt{m_a m_b T_a T_b}}{m_Y} \cos \vartheta$$

Riscrivendo quest'ultima espressione in funzione di  $T_b$  si ottiene la relazione seguente:

$$\sqrt{T_b} = A \pm \sqrt{A^2 + B} \quad (2)$$

dove siano:

$$\begin{cases} A = \frac{\sqrt{m_a m_b T_a}}{m_b + m_Y} \cos \vartheta \\ B = \frac{m_Y Q + T_a (m_Y - m_a)}{m_Y + m_b} \end{cases}$$

Quando allora  $Q$  è positivo si sceglie la soluzione positiva e si avrà un andamento come quello mostrato in figura 1.

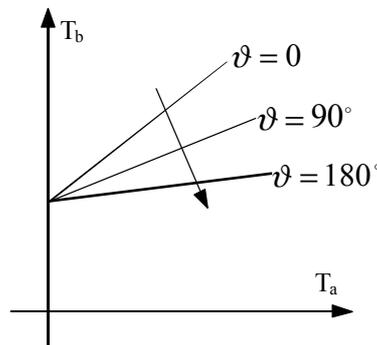


Figura 1

Quando invece il termine  $Q$  è negativo, siccome comunque il radicando che appare nella relazione (2) deve essere positivo, si deve avere:

$$T_a \geq |Q| \frac{m_Y}{\frac{m_a m_b \cos^2 \vartheta}{m_Y + m_b} + m_Y - m_a}$$

Dunque  $T_a$  deve superare un certo limite e questo limite dipende dall'angolo  $\theta$ . Il più piccolo valore di  $T_a$  che soddisfi la disuguaglianza (che si ha per il massimo valore del coseno) prende il nome di energia di soglia  $T_S$  che sarà dunque definita come segue:

$$T_S = |Q| \left( 1 + \frac{m_a}{m_Y + m_b - m_a} \right)$$

Quando poi sia:

$$m_Y + m_b \cong m_X + m_a$$

esiste una formula semplificata per l'energia di soglia, secondo la quale:

$$T_S = |Q| \left( 1 + \frac{m_a}{m_X} \right)$$

Nelle reazioni a soglia la rappresentazione grafica è quella mostrata in figura 2.

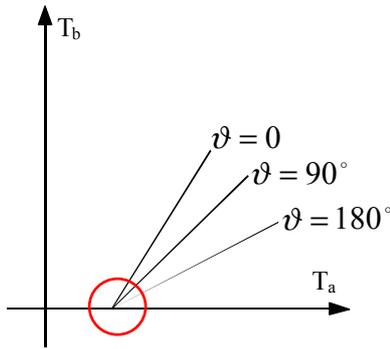


Figura 2

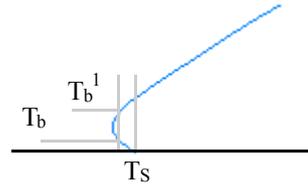


Figura 3

In figura 3 è invece mostrato un ingrandimento della zona cerchiata in rosso nella figura 2; quanto mostrato avviene solo con  $T_s$  piccolo e per angoli inferiori a  $90^\circ$ . Quando si è nello stato fondamentale si ha  $Q_0$ , quando si è invece in uno stato eccitato si avrà  $Q_1, Q_2, \dots$ . Si scriverà allora:

$$T_a + T_X = T_b + T_Y + E_Y^* - Q$$

dalla quale si ricava:

$$(T_b + T_Y)_{Max} - (T_b + T_Y)_l = E_Y^*$$

#### Sezione d'urto delle reazioni nucleari.

Si considera ora la sezione d'urto di una reazione nucleare e per far questo si faccia riferimento la situazione mostrata in figura 4 nella quale si vede un fascio di particelle che vanno a colpire un bersaglio composto idealmente da un unico strato atomico.

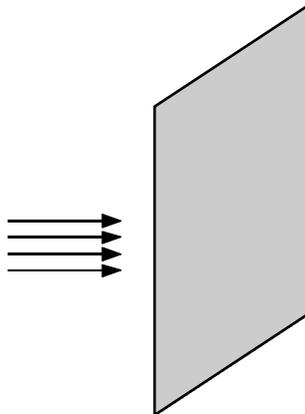


Figura 4

Dall'acceleratore arriva una certa intensità di particelle  $a$  che verrà indicata con il simbolo  $I_a$ ; il bersaglio presenta ovviamente una certa densità di nuclei e quindi il numero di particelle viste dal rivelatore quando è posto ad una certa distanza e sottende ad un certo angolo solido è:

$$R_b = \frac{N_b}{s} \div I_a N_X$$

È dunque possibile definire la sezione d'urto totale nel modo seguente:

$$\sigma = \frac{R_b}{I_a N_X}$$

Quando le particelle  $a$  altro non sono che neutroni non si parla di una corrente di particelle  $I_a$  ma di un flusso  $\Phi$ . La sezione d'urto non ha solo un significato geometrico ma dipende dalla probabilità che l'evento si verifichi. Ovviamente la sezione d'urto si può riferire non a tutte le reazioni ma solo ad alcune. Solitamente si indica nel modo seguente:

$$\sigma_{Tot}(\alpha) = \sigma_{Sc}(\alpha) + \sigma_{Com}(\alpha)$$

dove con  $\alpha$  si indica il canale, con Sc si fa riferimento allo scattering elastico e con Com si indica la sezione d'urto complementare a quella relativa allo scattering elastico e quindi la sezione d'urto relativa a tutte le altre possibili reazioni. Se non si integra rispetto all'intero  $4\pi$  si ottiene la sezione d'urto differenziale:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{f(\vartheta, \varphi)}{I_a N_X 4\pi}$$

Ovviamente si avrà:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

Se poi la funzione  $f$  dipende solo da  $\theta$  si avrà:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{f(\vartheta)}{I_a N_X 4\pi}$$

e quindi:

$$\sigma = 2\pi \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\vartheta d\vartheta = 4\pi \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)$$

Ovviamente l'ultima uguaglianza vale solo se si è in presenza di una sezione d'urto differenziale costante. Se il rivelatore riconosce anche l'energia del nucleo prodotto si dovrà considerare un doppio differenziale del tipo  $dE d\Omega$ , mentre invece, se interessa solo l'energia si avrà  $dE$ . La sezione d'urto differenziale dipende dal sistema di riferimento; mettendosi nel caso in cui sia:

$$\frac{m_a}{m_X} \approx 1$$

si avrà:

$$\begin{cases} \vartheta_{C.M.} = 2\vartheta_{Lab} \\ \varphi_{C.M.} = 2\varphi_{Lab} \end{cases}$$

e quindi si avrà:

$$\begin{cases} d\Omega = 2\pi \sin\vartheta d\vartheta \\ d\Omega_{Lab} = 2\pi \sin\vartheta_{Lab} d\vartheta_{Lab} \end{cases}$$

Ricordando allora la relazione tra il sistema del laboratorio e il sistema dal centro di massa si avrà:

$$d\Omega = 8\pi \sin\vartheta_{Lab} \cos\vartheta_{Lab} d\vartheta_{Lab}$$

inoltre:

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega_{Lab}} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \cdot \frac{d\Omega}{d\Omega_{Lab}} = \frac{\sigma_0}{4\pi} \cos\vartheta_{Lab}$$

con

$$0 \leq \vartheta_{Lab} \leq \frac{\pi}{2}$$

Dunque, nel sistema del centro di massa, lo scattering è isotropo mentre nel sistema del laboratorio c'è una dipendenza da  $\theta$ .

### Sezioni d'urto di scattering e di reazione.

Si ricordi ora la definizione di parametro d'impatto  $b$ , che era la minima distanza tra le due particelle; facendo allora riferimento alla figura 5 si avrà:

$$b \leq R_1 + R_2$$

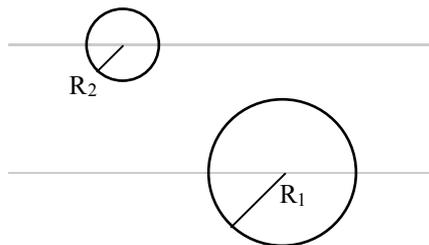


Figura 5

Da un punto di vista geometrico si avrebbe:

$$b \div \pi(R_1 + R_2)^2$$

ma i valori numerici in questo modo non tornano. L'andamento della  $\sigma_\alpha$  in funzione della  $T_a$  prende il nome di funzione di eccitazione; tale funzione è diversa a seconda che a sia un neutrone o una particella carica. La relazione semiclassica relativa alla quantizzazione del prodotto  $pb$  è la seguente:

$$pb = \sqrt{l(l+1)}\hbar \approx l\hbar$$

da cui si ricava:

$$b = \frac{l\hbar}{p} = l\tilde{\lambda}$$

Da questa relazione si comprende come al salire del numero quantico  $l$  il parametro d'urto salga anch'esso; per un certo  $l_{Max}$  espresso allora dalla relazione:

$$l_{Max} = \frac{b_{Max}}{\tilde{\lambda}} = \frac{R}{\tilde{\lambda}}$$

in corrispondenza del quale si avrà area massima espressa come:

$$A_{Max} = \pi(l_{Max} + 1)^2 \tilde{\lambda}^2 = \pi\left(\frac{R}{\tilde{\lambda}} + 1\right)^2 \tilde{\lambda}^2 = \pi(R + \tilde{\lambda})^2$$

si parla di relazione semiclassica per la sezione d'urto. Si definisce ora la sezione d'urto di scattering e di assorbimento; considerando un fascio di particelle incidenti con funzione d'onda:

$$\psi_i = A \sum_{l=0}^{\infty} i^l j_l(Kr) P_l(\cos \vartheta)$$

quando  $r$  è abbastanza grande (dell'ordine dei centimetri) si possono scrivere le funzioni di Bessel nella loro forma asintotica, ottenendo:

$$\psi_i = \frac{A}{2Kr} \sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1} (2l+1) \left[ e^{-i\left(Kr-l\frac{\pi}{2}\right)} - e^{i\left(Kr-l\frac{\pi}{2}\right)} \right] P_l(\cos \vartheta)$$

Si avrà dunque, complessivamente:

$$\psi(r) = \frac{A}{2Kr} \sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1} (2l+1) \left[ e^{-i\left(Kr-l\frac{\pi}{2}\right)} - \eta_l e^{i\left(Kr-l\frac{\pi}{2}\right)} \right] P_l(\cos \vartheta)$$

e quindi l'equazione d'onda dell'onda diffusa sarà:

$$\psi_{Sc} = \frac{A}{2Kr} e^{iKr} \sum_{l=0}^{\infty} i(2l+1)(1-\eta_l) P_l(\cos \vartheta)$$

Il termine  $\eta_l$  sarà dunque semplicemente uno shift di fase. Si calcola ora la sezione d'urto differenziale di scattering elastico:

$$\frac{d\sigma_{Sc}}{d\Omega} = \frac{1}{4K^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)i(1-\eta_l) P_l(\cos \vartheta) \right|^2$$

Complessivamente si avrà allora:

$$\sigma_{Sc} = \int \frac{d\sigma_{Sc}}{d\Omega} d\Omega = \frac{1}{4K^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^2 \frac{4\pi}{2l+1} |1-\eta_l|^2 = \sum_{l=0}^{\infty} \pi \tilde{\lambda}^2 (2l+1) |1-\eta_l|^2$$

Si esprime poi:

$$\eta_l = e^{2i\delta_l}$$

dove  $\delta_l$  è lo shift di fase e si ottiene:

$$\sigma_{Sc} = \sum_{l=0}^{\infty} 4\pi \tilde{\lambda}^2 (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

Quando  $l$  è nullo si torna ad avere:

$$\sigma_{Sc} = 4\pi \frac{\sin^2 \delta_0}{K^2}$$

Quando non si è in presenza di scattering elastico (e quindi si cerca quella che prima è stata chiamata sezione d'urto complementare e che più propriamente si può chiamare sezione d'urto di reazione) si devono valutare i casi in cui sia:

$$|\eta_l| < 1$$

Dal bilancio tra la corrente entrante e quella uscente e poi normalizzando il tutto per la corrente incidente, si avrà dunque:

$$\sigma_R = \sum_{l=0}^{\infty} \pi \hat{\lambda}^2 (2l+1) (1 - |\eta_l|^2)$$

La  $\sigma$  totale, data dalla somma di quella di scattering e di quella di reazione sarà:

$$\sigma_{Tot} = \sigma_{Sc} + \sigma_R = \sum_{l=0}^{\infty} 2\pi \hat{\lambda}^2 (2l+1) (1 - \text{Re} \eta_l)$$

Complessivamente si avrà:

$$|\eta_l|^2 \leq 1$$

Le condizioni limite sono ovviamente le seguenti:

$$\begin{cases} \eta_l = -1 \\ \eta_l = 0 \end{cases}$$

alle quali corrispondono le due seguenti situazioni:

$$\begin{cases} \sigma_R = 0 \\ \sigma_R = \sigma_R^{Max} = \sigma_{Sc} \end{cases}$$

Come conseguenza è possibile affermare che:

$$\sigma_{Tot}^{Max} = 2\sigma_R^{Max}$$

e quindi si può fare riferimento al grafico di figura 6.

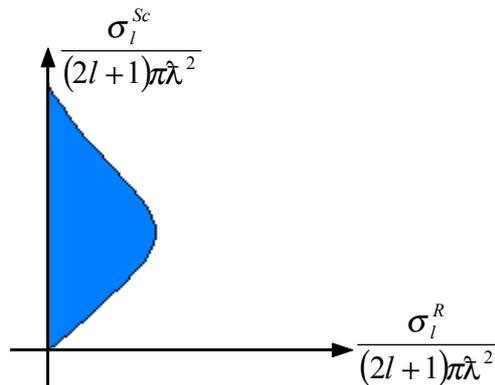


Figura 6

Nel caso massimo si avranno dunque i seguenti valori:

$$\begin{cases} \sigma_{Sc} = \pi (R + \hat{\lambda})^2 \\ \sigma_R = \pi (R + \hat{\lambda})^2 \\ \sigma_{Tot} = 2\pi (R + \hat{\lambda})^2 \end{cases}$$

È quindi come se le dimensioni del nucleo raddoppiassero.

#### **Il modello ottico e il modello a nucleo composto.**

I modelli interpretativi che permettono di comprendere le reazioni nucleari sono fondamentalmente due:

- il modello ottico;
- il modello a nucleo composto.

Il modello ottico prevede l'interazione tra ben determinati nucleoni mentre il modello composto è molto più complesso in quanto si suppone che il proiettile venga assorbito, che questo assorbimento dia origine ad una struttura instabile e che quindi ci sia un decadimento (si ha dunque un procedimento a due step); nel caso del nucleo composto il canale di ingresso e di uscita sono assolutamente scorrelati. A volte un procedimento è ben descritto dal modello del nucleo composto fino a quando l'energia del proiettile è piccola, quando poi l'energia aumenta è il modello diretto ad essere più soddisfacente. Il modello a nucleo composto descrive molto bene anche la presenza delle risonanze nell'andamento delle sezioni d'urto in funzione dell'energia cinetica.