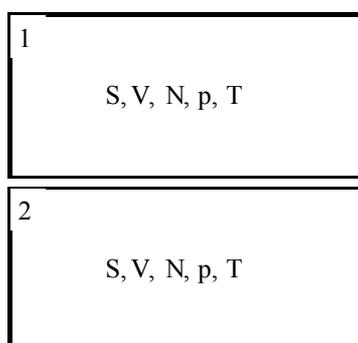


Trasmissione del calore. Scambio termico per conduzione. Legge di Fourier.

Consideriamo i due sistemi termodinamici rappresentati nell'immagine seguente:



Si supponga che la temperatura del sistema 1 sia maggiore della temperatura del sistema 2 e che le superfici di delimitazione dei due sistemi siano poste in contatto tra di loro, in modo da formare un'unica barriera che divide i due sistemi; è allora possibile che i due sistemi si scambino calore. Ovviamente, a seconda dei gradi di libertà concessi dalla parete, tra i due sistemi ci potrebbe essere anche un flusso di massa (ovviamente a patto che i potenziali chimici associati ai due sistemi siano tra loro differenti). Quando c'è un flusso di massa, però, come inevitabile conseguenza ci sarà anche uno scambio di calore: si parlerà, in casi come questo, di fenomeni di scambio termico convettivo. Quando, invece, non c'è trasporto di massa, si parla di scambio di calore per diffusione molecolare. La convezione può allora essere considerata come uno scambio per diffusione che avviene quando il fluido è in movimento.; possiamo quindi dire che, generalmente, lo scambio di calore avviene per diffusione: si parlerà poi di conduzione se il sistema è in equilibrio e, appunto, di convezione se il fluido non è in equilibrio e c'è dunque un flusso di massa. Questi due metodi di scambio del calore prevedono comunque un contatto fisico tra i due sistemi interessati. Un terzo metodo che invece non richiede il contatto fisico (in quanto sfrutta le onde elettromagnetiche) è detto irraggiamento. Alcuni esempi di scambio termico sono i seguenti:

- pensando al sistema termodinamico cuore osserviamo come ci siano scambi di calore per conduzione dovuti agli organi che si trovano in contatto con il cuore ma ci sono anche, ovviamente, scambi di calore con il sangue che si muove e che quindi scambia calore per convezione;
- in un bicchiere d'acqua si formano delle stratificazioni di temperatura; se lasciamo il bicchiere fermo i vari strati di acqua scambieranno tra di loro calore per diffusione fino a che tutta l'acqua non avrà la stessa temperatura; se, invece, mescoliamo l'acqua contenuta nel bicchiere, le masse più fredde e più calde dell'acqua si mescoleranno tra di loro e quindi lo scambio di calore sarà dovuto alla convezione;
- in una centrale nucleare le barre di combustibile che vanno incontro a fissione scambiano calore con il fluido del primario (acqua o vapore o entrambi) per convezione poiché il fluido del primario si muove velocemente nel circuito e lambisce le barre.

Bisogna inoltre precisare che lo scambio di calore per irraggiamento è sempre presente e si somma sempre ad eventuali altri metodi di scambio termico, spesso non viene però considerato in quanto il calore che viene scambiato in questo modo è irrilevante rispetto agli scambi termici che avvengono per vie diverse. Per quanto riguarda, invece, i fenomeni di trasporto per conduzione e convezione si deve osservare che tali processi sono influenzati dal tipo di materiale, dal tipo di moto del fluido (è infatti possibile avere scambio termico per diffusione anche in una situazione in cui ho il fluido in movimento); osserviamo inoltre che durante i processi di transizione di fase è più facile cedere calore rispetto alle situazioni nelle quali è presente un'unica fase del fluido. Anche se, come abbiamo detto, i fenomeni di scambio di calore non appaiono rigidamente isolati, da ora in poi studieremo le tre tipologie di scambio alle quali si è accennato in modo esclusivo ed indipendente: iniziamo dunque a parlare dello scambio termico per conduzione.

Dal punto di vista molecolare, lo scambio termico per conduzione (o diffusione) è dovuto allo scambio di energia tra una molecola e l'altra. Parlando di conduzione appare ovvio introdurre un parametro che esprime il grado di conduzione: la conducibilità termica λ . Tale parametro esprime la potenza che attraversa una barretta di un materiale delimitata da due facce di un metro quadrato poste alla distanza di 1 metro l'una dall'altra e sottoposta ad una differenza di temperatura di 1 kelvin. Si avrà quindi:

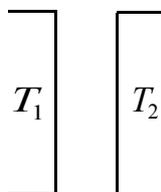
$$\lambda = \frac{W}{mk} = \frac{kcal}{mh^{\circ}C}$$

Nella prima tabella della pagina seguente vediamo alcuni esempi significativi relativi a questo parametro. Dobbiamo inoltre osservare che, solitamente, i materiali con alta conducibilità elettrica hanno anche una buona conducibilità termica (per comprenderne il nesso bisogna fare riferimento alla legge di Lorentz – Wiedman). Sfruttando la seguente tabella possiamo pervenire alla definizione di isolante, un materiale dotato di bassa conducibilità termica, e di

conduttore, dotato invece di alta conducibilità termica. A seconda quindi dell'effetto desiderato possiamo, interponendo sostanze differenti tra due sistemi a temperatura diversa, regolare il calore trasferito da un sistema all'altro.

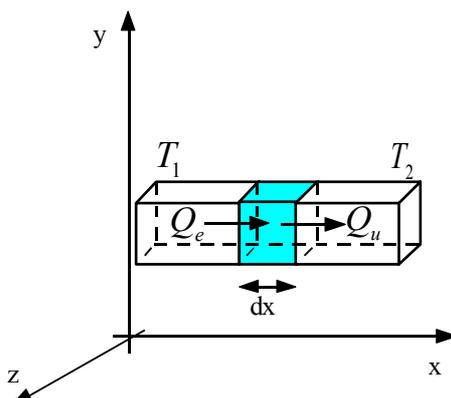
Sostanza	Conducibilità termica (λ)
Acciaio al carbonio	40 – 50 $kcalh^{-1}m^{-1}C^{-1}$
Alluminio	150 – 170 $kcalh^{-1}m^{-1}C^{-1}$
Acciaio inox	10 – 20 $kcalh^{-1}m^{-1}C^{-1}$
Rame	250 $kcalh^{-1}m^{-1}C^{-1}$
Acqua (0°C)	0,48 $kcalh^{-1}m^{-1}C^{-1}$
Acqua (100°C)	0,59 $kcalh^{-1}m^{-1}C^{-1}$
Acqua (300°C)	0,48 $kcalh^{-1}m^{-1}C^{-1}$
Aria	0,020 $kcalh^{-1}m^{-1}C^{-1}$

Facendo per esempio riferimento alla seguente situazione



Nella quale vediamo due sistemi termodinamici a temperatura differente, notiamo che, ponendo del rame nell'intercapedine tra i due sistemi, si avrà un buono scambio termico, mettendovi invece dell'aria lo scambio termico sarà minore (in quanto è molto più piccola la conducibilità dell'aria). Osserviamo inoltre che, se l'intercapedine tra i due sistemi, riempita con aria, permette il flusso dell'aria, lo scambio di calore sarà maggiore rispetto ad una situazione nella quale lo spazio tra i due sistemi non permette la circolazione dell'aria. Nel primo caso, infatti, lo scambio per conduzione (l'unico presente nel secondo caso) si somma all'effetto di convezione dovuto al flusso di aria in movimento.

Consideriamo ora il seguente grafico:



Possiamo esprimere la legge di Fourier secondo la quale il flusso termico in una data direzione è proporzionale alla capacità del sistema di condurre calore ed al gradiente termico, ovvero:

$$|\Phi_x| = |\lambda| \left| \frac{\Delta T}{\Delta x} \right|$$

Siccome affinché ci sia flusso di calore nella direzione indicata la temperatura del sistema 2 deve essere inferiore rispetto alla temperatura del sistema 1, si avrà:

$$\Phi_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

Ripetendo il medesimo discorso in tutte e tre le dimensioni si ottiene il flusso complessivo, che sarà:

$$\Phi_{Tot} = -\lambda_x \frac{\partial T_x}{\partial x} - \lambda_y \frac{\partial T_y}{\partial y} - \lambda_z \frac{\partial T_z}{\partial z}$$

Questa espressione si riferisca ad un materiale anisotropo perché è stata fatta la differenziazione tra le conducibilità termiche nelle diverse direzioni e dunque il materiale non si comporta nello stesso modo in tutte le direzioni. Nel caso in cui il materiale sia isotropo si avrà:

$$\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z$$

e quindi:

$$\Phi_{Tot} = -\lambda \frac{\partial T_x}{\partial x} - \lambda \frac{\partial T_y}{\partial y} - \lambda \frac{\partial T_z}{\partial z} = -\lambda \left(\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial T_z}{\partial z} \right) = -\lambda Grad T$$

Dal punto di vista dimensionale il flusso ϕ è un calore trasmesso nell'unità di tempo e di superficie e quindi si avrà:

$$\Phi = \frac{Q}{tS}$$

Con riferimento all'immagine della pagina precedente abbiamo che il calore scambiato dall'elementino in azzurro sarà:

$$dQ_x = \Phi_x S dt = -\lambda \frac{dT}{dx} S dt$$

Occupiamoci ora del bilancio termico relativo a quella situazione: si avrà, facendo riferimento al primo principio:

$$\Delta U = \sum Q + \sum L$$

siccome però non viene svolto alcun lavoro tale relazione si riduce nel modo seguente:

$$\Delta U = \sum Q \quad (1)$$

Come appare in figura, il calore scambiato dall'elementino è composto da un calore entrante e da un lavoro uscente, ovvero si avrà:

$$\sum Q = Q_e + Q_u$$

dove siano:

$$\begin{cases} dQ_e = -\lambda \frac{\partial T_x}{\partial x} S dt \\ dQ_u = -\lambda \frac{\partial T_{x+dx}}{\partial x} S dt \end{cases}$$

Si ha inoltre:

$$T_{x+dx} = T_x + \frac{\partial T}{\partial x} dx$$

Si osservi però che:

$$\frac{\partial T_{x+dx}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T_x + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) = \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{(\partial x)^2}$$

Il calore uscente può dunque essere riscritto nel modo seguente:

$$dQ_u = \left[-\lambda \frac{\partial T_x}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 T}{(\partial x)^2} \right] S dt$$

Possiamo a questo punto considerare il seguente bilancio:

$$dQ_e - dQ_u = \lambda \frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} dx S dt$$

Indichiamo ora la variazione di energia interna come il prodotto del volume per il dx per la massa volumica per il calore massico per la variazione di temperatura, ovvero:

$$du = S dx \rho c dT_x$$

Sostituendo allora queste due ultime relazioni nell'espressione (1) si ottiene:

$$\lambda \frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} dx S dt = S dx \rho c dT_x$$

dalla quale si ricava:

$$\lambda \frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} = \rho c \frac{dT_x}{dt}$$

Questa espressione, detta equazione di Fourier, esprime la variazione di energia lungo la coordinata x ed è il bilancio sull'elementino quando ci sia solo energia in transito ma non ci sia formazione di calore all'interno del sistema stesso. Nel momento in cui si avesse una fornitura di calore dovrei modificare tale espressione nel modo seguente:

$$\lambda \frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} + q = \rho c \frac{dT_x}{dt}$$

dove q è il calore fornito per unità di volume. Quest'ultima espressione è allora l'equazione di Fourier nel caso di generazione di calore. Quando ci si trova in regime stazionario si avrà:

$$\frac{dT_x}{dt} = 0$$

e quindi l'equazione di Fourier in regime stazionario sarà la seguente:

$$\frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

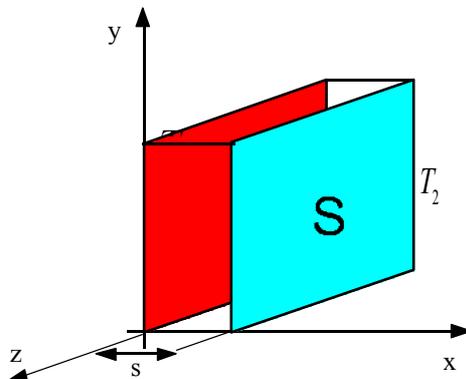
Vediamo dunque apparire il termine detto diffusività termica e così definito:

$$a = \frac{\lambda}{\rho c}$$

la cui unità di misura sarà:

$$[a] = \frac{\frac{W}{mK}}{\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{J}{kgK}} = \frac{W}{m} \cdot \frac{m^3}{Ws} = \frac{m^2}{s}$$

Mettiamoci ora nella condizione semplice in cui ci sia regime stazionario e non ci sia generazione di calore; l'equazione di riferimento sarà appunto la (2) che è un'equazione differenziale del secondo ordine; per risolverla saranno ovviamente necessarie le condizioni iniziali, facciamo dunque riferimento alla seguente situazione nella quale vediamo un sistema finito delimitato da due superfici parallele caratterizzate da temperature differenti:



Sfruttando questo disegno appare evidente che le condizioni iniziali sono le seguenti:

$$\begin{cases} T(x=0) = T_1 \\ T(x=s) = T_2 \end{cases}$$

Integriamo dunque l'equazione differenziale una prima volta, ottenendo:

$$\frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial T}{\partial x} = const$$

Integrando poi una seconda volta si giunge ad una relazione del tipo:

$$T = Ax + B$$

Abbiamo dunque ottenuto che la temperatura ha un andamento lineare. Imponendo ora la prima condizione al contorno si ottiene:

$$B = T_1$$

da cui si ricava:

$$T = Ax + T_1$$

Imponendo invece la seconda condizione al contorno si ottiene:

$$T_2 = As + T_1$$

ovvero:

$$A = \frac{T_2 - T_1}{s}$$

e quindi la soluzione dell'equazione differenziale sarà:

$$T = \frac{T_2 - T_1}{s}x + T_1$$

Ricordando le definizioni prima date osserviamo che il calore scambiato sarà dunque:

$$dQ = -\lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{T_2 - T_1}{s}x + T_1 \right) S dt = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{s} S dt$$

mentre il flusso di potenza sarà:

$$\frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{s} S$$

Siccome il calore fluisce dalla zona a temperatura più alta alla zona a temperatura più bassa, per avere un flusso di potenza con il segno positivo si dovrà considerare la seguente relazione:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{s} (T_1 - T_2) S$$

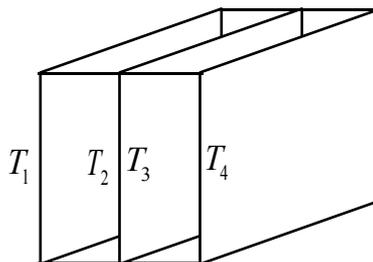
Vediamo dunque che c'è una proporzionalità diretta con la sezione, la differenza di temperatura e la caratteristica λ del materiale mentre c'è proporzionalità inversa con la lunghezza. Possiamo osservare come questa situazione possa essere intesa come un'analogia con la legge di Ohm secondo la quale:

$$I = G\Delta V$$

pur di porre:

$$\begin{cases} \dot{Q} \rightarrow I \\ (T_1 - T_2) \rightarrow \Delta V \\ \frac{\lambda S}{s} \rightarrow G \end{cases}$$

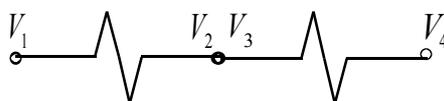
dove appare evidente che G è un'energia per unità di tempo. Possiamo allora utilizzare questa analogia per gestire una situazione nella quale si considerano n facce piane parallele, come nell'immagine seguente:



Dove ovviamente si avrà:

$$T_2 = T_3 \tag{3}$$

L'analogia appare evidente considerando il seguente disegno:



dove ovviamente si avrà:

$$V_2 = V_3$$

Così dunque come si aveva:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

si avrà anche:

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2$$

dove sia:

$$\begin{cases} \Delta T_1 = T_1 - T_2 = \dot{Q} \frac{s_1}{\lambda_1 S} \\ \Delta T_2 = T_3 - T_4 = \dot{Q} \frac{s_2}{\lambda_2 S} \end{cases}$$

Ricordando dunque quanto affermato dalla relazione (3)

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 = T_1 - T_2 + T_3 - T_4 = T_1 - T_2 + T_2 - T_4 = T_1 - T_4 = \dot{Q} \left(\frac{s_1}{\lambda_1 S} + \frac{s_2}{\lambda_2 S} \right)$$

Continuando con questa analogia possiamo considerare le seguenti due definizioni:

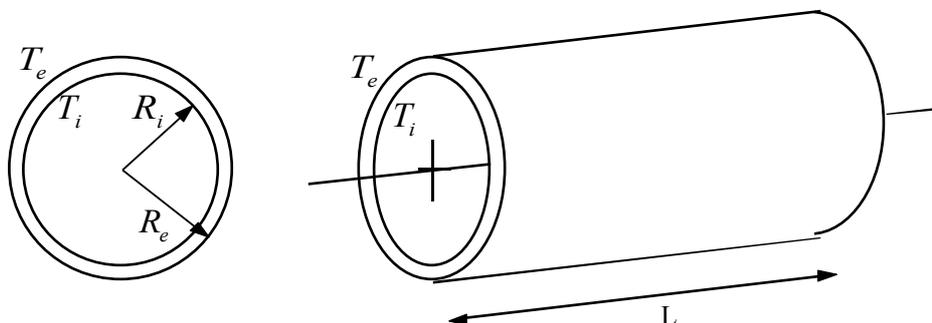
$$\begin{cases} R_1 = \frac{s_1}{\lambda_1 S} \\ R_2 = \frac{s_2}{\lambda_2 S} \end{cases}$$

e quindi ottenere:

$$T_1 - T_4 = \dot{Q}(R_1 + R_2)$$

Il cilindro cavo. Doppio cilindro cavo. Caso con sorgente di calore interna. Caso bidimensionale.

Dopo aver analizzato, durante l'ultima lezione, una geometria molto semplice come era quella delle due facce piane parallele, vediamo ora un'altra geometria regolare particolarmente utile ed importante: il cilindro cavo.



Si supponga che il cilindro abbia una lunghezza tale che, in rapporto ai raggi caratteristici, possa essere considerato un cilindro infinito; stabilite le temperature della superficie interna e della superficie esterna imponiamo che sia:

$$T_i > T_e$$

Si vuole valutare il flusso di temperatura dalla superficie interna a alla superficie esterna; per fare questo ricordiamo la generica espressione trovata nella lezione precedente secondo la quale:

$$dQ_x = -\lambda \frac{dT}{dx} S dt$$

dalla quale si ricava, per quanto riguarda la potenza:

$$\frac{dQ_x}{dt} = q = -\lambda \frac{dT}{dx} S$$

Nel caso che stiamo analizzando la direzione x è rappresentata dalla direzione radiale r e la superficie S che ci interessa è la superficie laterale del cilindro; possiamo dunque riscrivere l'ultima relazione nel modo seguente:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r L \quad (1)$$

Sfruttiamo ora il metodo della separazione delle variabili in modo da ottenere:

$$q \frac{dr}{r} \frac{1}{2\pi L} = -\lambda dT$$

Possiamo a questo punto integrare il primo membro tra il valore del raggio interno e il valore del raggio esterno e il secondo membro tra la temperatura interna e quella esterna:

$$q \int_{R_i}^{R_e} \frac{dr}{r} \frac{1}{2\pi L} = -\lambda \int_{T_i}^{T_e} dT$$

dalla quale si ricava:

$$q \left[\ln r \right]_{R_i}^{R_e} \frac{1}{2\pi L} = -\lambda [T]_{T_i}^{T_e}$$

ovvero:

$$q \ln \frac{R_e}{R_i} = -2\pi L \lambda (T_e - T_i)$$

e quindi:

$$q = \frac{2\pi L \lambda}{\ln \frac{R_e}{R_i}} (T_i - T_e)$$

Ricordando l'analogia con il caso elettrotecnico vista nella lezione precedente possiamo affermare che, nel caso del cilindro cavo, la resistenza termica sarà:

$$R = \frac{\ln \frac{R_e}{R_i}}{2\pi L \lambda}$$

Dal punto di vista delle unità di misura si avrà:

$$[R] = \frac{1}{\frac{m}{W}} = \frac{K}{W}$$

Per quanto riguarda, invece, la conduttanza termica si avrà, ovviamente:

$$G = \frac{2\pi L \lambda}{\ln \frac{R_e}{R_i}}$$

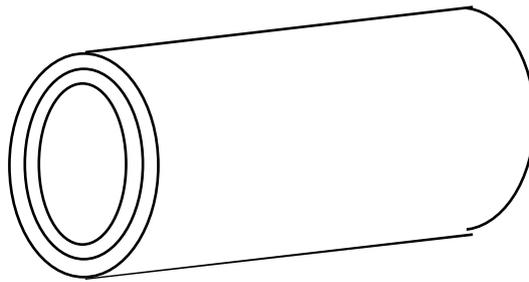
che ovviamente, si misura in W/K. Siccome eravamo interessati all'andamento della temperatura all'interno delle due superfici, dobbiamo esplicitare la relazione (1) rispetto alla temperatura, ottenendo:

$$dT = -\frac{q}{2\pi r L \lambda} dr$$

da cui si ricava:

$$T = -\frac{q}{2\pi \lambda L} \ln r$$

Un'altra importantissima geometria che appare in tantissime applicazioni pratiche è il doppio cilindro cavo.



Solitamente il cilindro cavo esterno è un isolante termico. In una situazione come questa la resistenza termica totale sarà:

$$R_{Tot} = R_1 + R_2$$

Siccome questa geometria viene utilizzata sfruttando materiali diversi per ognuno dei cilindri cavi (un discorso assolutamente analogo al caso del cilindro doppio può essere fatto per il cilindro triplo e così via) bisogna anche tener conto che, non essendo omogenei, i due cilindri hanno anche conducibilità termiche diverse e quindi l'ultima relazione scritta si può esplicitare così:

$$R_{Tot} = \sum_{i=1}^2 \frac{\ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}{\lambda_i 2\pi L}$$

Mettiamoci ora nella situazione (illustrata nella prima immagine della pagina seguente) nella quale ho una parete a facce piane parallele all'esterno della quale la temperatura è nulla mentre all'interna della quale è presente una sorgente di calore q . In base a quanto abbiamo detto appare evidente che l'equazione alla quale dobbiamo fare riferimento sarà, in questo caso, la seguente:

$$\frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -q$$

Le condizioni al contorno, invece, sono le seguenti:

$$\begin{cases} T(x=0) = 0 \\ T(x=2s) = 0 \end{cases}$$

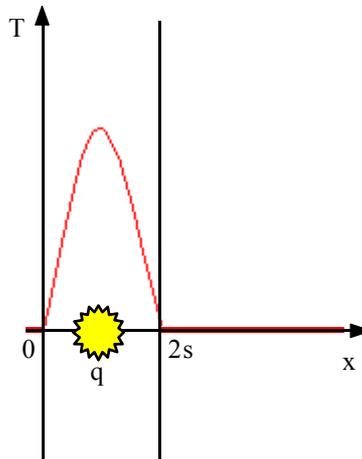
Integrando una prima volta l'equazione di Fourier avremo:

$$\frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial T}{\partial x} = -qx + const$$

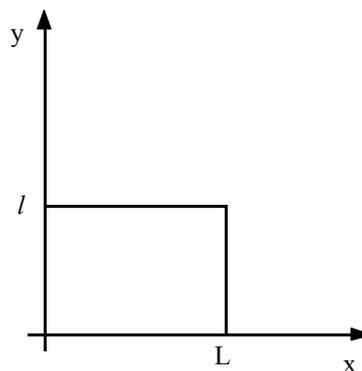
integrando poi una seconda volta si otterrà:

$$\frac{\lambda}{\rho c} T = -\frac{qx^2}{2} + x \cdot const + const_2$$

Notiamo dunque che, all'interno della parete, l'andamento della temperatura è parabolico (traccia rossa sul grafico seguente).



Soffermiamoci ora su una situazione bidimensionale come quella rappresentata nella seguente figura.



Supponiamo di essere in condizione di regime stazionario e battezziamo ϑ la temperatura; ci troveremo dunque a dover gestire una relazione del tipo:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_y}{\partial y^2} = 0$$

Esprimiamo inoltre la temperatura (funzione di entrambe le coordinate x ed y) come un prodotto di una funzione della sola x e di una funzione della sola y:

$$\vartheta(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (2)$$

Combinando dunque le ultime due espressioni scritte si ottiene:

$$Y \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0$$

ovvero:

$$-\frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}$$

Battezziamo dunque:

$$-\frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = \gamma^2$$

Avremo dunque le due seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases} -\frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \gamma^2 \\ \frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = \gamma^2 \end{cases}$$

La forma generale delle soluzioni di queste due equazioni sarà la seguente:

$$\begin{cases} X(x) = A_3 \sin(\gamma x) + A_4 \cos(\gamma x) \\ Y(y) = A_1 \sinh(\gamma y) + A_2 \cosh(\gamma y) \end{cases}$$

Sostituendo allora queste due espressioni nell'equazione (2) si ottiene:

$$\vartheta(x, y) = X(x) \cdot Y(y) = [A_3 \sin(\gamma x) + A_4 \cos(\gamma x)] \cdot [A_1 \sinh(\gamma y) + A_2 \cosh(\gamma y)] \quad (3)$$

Siccome dobbiamo affrontare due equazioni differenziali, sarà necessario conoscere le quattro condizioni al contorno; supponiamo dunque che tali condizioni al contorno siano:

$$\begin{cases} \vartheta(x=0) = 0 \\ \vartheta(x=L) = 0 \\ \vartheta(y=0) = 0 \\ \vartheta(y=l) = \vartheta(x) \end{cases}$$

Sfruttando dunque la prima e la terza condizione al contorno si ricava:

$$\begin{cases} A_4 = 0 \\ A_2 = 0 \end{cases}$$

e quindi la relazione (3) si riduce nel modo seguente:

$$\vartheta(x, y) = [A_3 \sin(\gamma x)] \cdot [A_1 \sinh(\gamma y)]$$

Tenendo ora conto della seconda condizione al contorno si giunge alla seguente espressione:

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{L}$$

Combinando allora le ultime due relazioni scritte si ottiene:

$$\vartheta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_3 \sin(\gamma_n x)] \cdot [A_1 \sinh(\gamma_n y)]$$

ovvero, unificando le due costanti:

$$\vartheta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\gamma_n x) \sinh(\gamma_n y)$$

Tenendo infine conto della quarta condizione al contorno si ricava:

$$\vartheta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\gamma_n x) \sinh(\gamma_n l)$$

Nel caso, ora che la funzione $\theta(x)$ sia sviluppabile in serie di Fourier, si arriverà alla seguente relazione:

$$\vartheta(x, y) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh\left(\frac{\pi n}{L} y\right)}{\sinh\left(\frac{\pi n}{L} l\right)} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \int_0^L \vartheta(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx$$

Se, invece, la funzione $\theta(x)$ fosse in realtà una costante T (ovvero si fosse in presenza di un gradino di temperatura), si potrebbe scrivere:

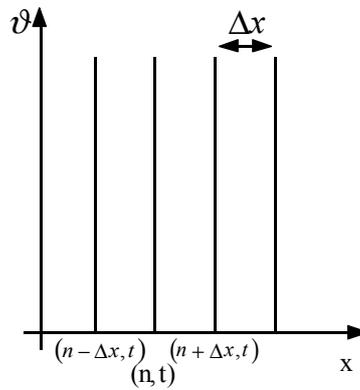
$$\frac{\vartheta}{T} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \cdot \frac{\sinh\left(\frac{\pi n}{L} y\right)}{\sinh\left(\frac{\pi n}{L} l\right)} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$$

Quest'ultima soluzione si esprime in termini di temperatura normalizzata (o ridotta):

$$v^* = \frac{v}{T}$$

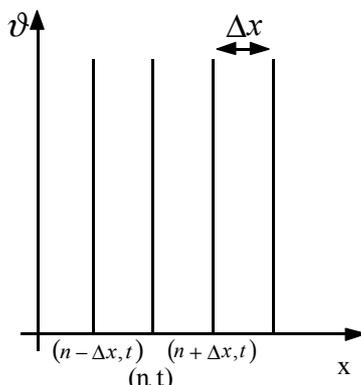
Si cercano dunque soluzioni in termini adimensionali.

Accenniamo, per concludere, al metodo di soluzione che sfrutta le differenze finite e, in particolare, andiamo a considerare il seguente grafico:



Differenze finite. Convezione. Teorema di Buckingham.

Torniamo al caso monodimensionale e consideriamo il seguente grafico:



Nel grafico (nel quale θ rappresenta la temperatura) si è discretizzato il sistema considerando un punto di riferimento e le variazioni di temperatura rispetto a tale punto. Supponiamo di essere in presenza di un sistema variabile nel quale vale la seguente relazione:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho} \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial x^2} \quad (1)$$

Consideriamo il caso in cui sono state fatte delle discretizzazioni tramite elementi uguali per quanto riguarda la posizione (n) e il tempo (t); la successione degli elementi sarà allora del tipo:

$$(\vartheta_{n-\Delta x}, t) \rightarrow (\vartheta_n, t) \rightarrow (\vartheta_{n+\Delta x}, t)$$

Per quanto riguarda, invece, la variazione di tempo, si avrà:

$$(\vartheta_n, t - \Delta t) \rightarrow (\vartheta_n, t) \rightarrow (\vartheta_n, t + \Delta t)$$

Con riferimento alla relazione (1), allora, considerando la variazione temporale ritroviamo il primo membro:

$$\frac{(\vartheta_n, t + \Delta t) - (\vartheta_n, t)}{\Delta t} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

Considerando anche la variazione spaziale possiamo ritrovare tutta la relazione (1); per semplicità di notazione ci conviene porre:

$$\frac{\lambda}{c\rho} = a$$

si avrà così:

$$\frac{(\vartheta_n, t + \Delta t) - (\vartheta_n, t)}{\Delta t} = a \frac{[(\vartheta_{n+\Delta x}, t) - (\vartheta_n, t)] - [(\vartheta_n, t) - (\vartheta_{n-\Delta x}, t)]}{\Delta x^2}$$

ovvero:

$$\frac{(\vartheta_n, t + \Delta t) - (\vartheta_n, t)}{\Delta t} = a \frac{(\vartheta_{n+\Delta x}, t) - 2(\vartheta_n, t) + (\vartheta_{n-\Delta x}, t)}{\Delta x^2} \quad (2)$$

La struttura della relazione è dunque:

$$A = aB$$

La relazione (2) si può dimostrare analiticamente anche sviluppando θ , n e t in serie di Taylor e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al terzo.

Riscriviamo ora la relazione (1) in termini discreti, ottenendo:

$$\Delta \vartheta = \frac{\lambda}{c\rho} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \Delta^2 \vartheta$$

Affinché tale relazione sia verificata i due termini devono essere uguali in termini di calcolo numerico e ciò comporta che siano soddisfatte le condizioni di convergenza. Per calcolare la variazione della variazione ho sommato in modulo due variazioni rispetto al punto di partenza; dato che il passo di integrazione è il medesimo, la variazione dovrà essere, al limite, pari ad $\frac{1}{2}$; dunque, la condizione di convergenza per il sistema sarà:

$$\frac{\lambda}{c\rho} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

Se vale questa relazione allora si ottengono le soluzioni volute. Ovviamente si devono decidere i passi Δt e Δx ed inserirli nel calcolatore. Possono esserci diversi metodi:

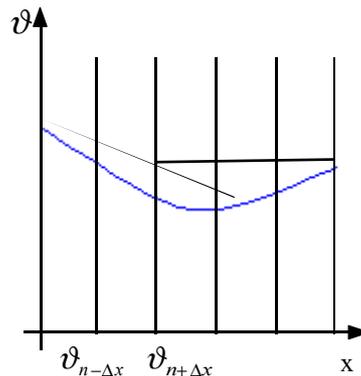
1) Ricaduta di tipo grafico (ormai superata): se l'ultima relazione scritta vale con il segno di uguaglianza, la variazione di temperatura nel tempo sarà

$$(\vartheta_n, t + \Delta t) - (\vartheta_n, t) = \frac{(\vartheta_{n+\Delta x}, t) - (\vartheta_n, t)}{2} + \frac{(\vartheta_{n-\Delta x}, t) - (\vartheta_n, t)}{2}$$

La variazione di temperatura ottenuta è la media delle temperature nell'intervallo $(n-\Delta x, n+\Delta x)$ ovvero:

$$(\vartheta_n, t + \Delta t) = \frac{(\vartheta_{n+\Delta x}, t) + (\vartheta_{n-\Delta x}, t)}{2}$$

Supponendo di avere una certa distribuzione di temperatura iniziale, con quest'ultima relazione posso ricavare il valore della temperatura nella posizione n all'istante $t+\Delta t$; iterando dunque il processo ottengo la distribuzione della temperatura nell'istante $t+\Delta t$, nota quella in t (si ottengono, quindi, le corde che permettono di costruire il seguente grafico).



Vediamo ora dei metodi alternativi (ricordiamo che ci stiamo occupando della sola conduzione e quindi valutiamo la variazione di temperatura e il flusso di calore) per risolvere la variazione della temperatura con il tempo considerando un sistema che sia:

- con scambio di calore per conduzione,
- a regime variabile,
- monodimensionale.

Per determinare la variazione della temperatura in funzione del tempo suppongo che sia:

$$\vartheta(x, t) = T(t)X(x)$$

Con una serie di passaggi puramente algebrici si arriverà alla seguente relazione:

$$\vartheta(x, t) = e^{-\gamma^2 at} [A_1 \sin(\gamma x) + A_2 \cos(\gamma x)]$$

dove siano:

$$\begin{cases} a = \frac{\lambda}{c\rho} \\ \gamma = \text{const} > 0 \end{cases}$$

Le incognite sono allora diventate le due costanti che appaiono nella relazione. Imponiamo ora delle condizioni al contorno che possono essere le seguenti:

$$\begin{cases} \vartheta(t = 0) = f(x) \\ \vartheta(x = 0) = 0 \\ \vartheta(x = L) = 0 \end{cases}$$

Tenendo dunque conto della seconda condizione al contorno si ottiene:

$$A_2 = 0$$

e quindi:

$$\vartheta(x, t) = A_1 e^{-\gamma^2 at} \sin(\gamma x)$$

Utilizzando invece la terza condizione al contorno si ottiene:

$$\gamma L = n\pi$$

dalla quale si ricava:

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{L}$$

Infine, utilizzando la prima condizione al contorno si ottiene:

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\gamma_n x) = f(x)$$

unendo allora le tre condizioni si ottiene:

$$\vartheta(x,t) = \frac{2}{L} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 at} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \right\}$$

Questo è possibile, ovviamente, solo se la $f(x)$ rispetta la sviluppabilità in serie di Fourier ed il $2/L$ iniziale si comprende proprio in questa ottica. Osserviamo che il termine all'esponente è adimensionale ed è detto numero di Fourier:

$$Fou = \frac{at}{L^2}$$

Qualora si abbia:

$$\vartheta(t=0) = f(x) = T = const$$

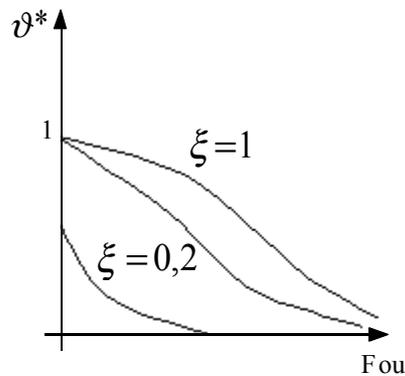
si avrà:

$$\frac{\vartheta}{T} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-(nx)^2 Fou\right\} \left[\frac{1-(-1)^n}{n\pi} \sin(n\pi\xi) \right]$$

dove si è indicato il termine adimensionale:

$$\frac{x}{L} = \xi$$

La grandezza ϑ/T (a volte indicata con il simbolo ϑ^*) prende il nome di temperatura normalizzata, o ridotta ed è una funzione di due quantità adimensionali: ξ e Fou . L'andamento della temperatura normalizzata con il variare del numero di Fourier è rappresentato nel seguente disegno.



Ovviamente ϑ^* può essere al massimo pari ad 1 in quanto, quando non c'è scambio di calore, la temperatura si mantiene costante.

Supponiamo ora di avere un sistema con una distribuzione di temperatura, ad esempio di tipo simmetrico, che sia a contatto con un altro sistema (ad esempio un fluido in movimento). Conosciamo il flusso di calore che passa dal sistema, che scambia calore al suo interno per conduzione, al fluido: complessivamente il sistema scambia calore per convezione. Definiamo a questo proposito la legge di Newton:

$$q = h(\vartheta - T_f)$$

dove vediamo apparire il flusso di calore q , la temperatura del fluido (che indica lo stato del fluido stesso) e il coefficiente h di scambio convettivo. Quando siamo in situazioni di regime, il flusso di calore dovuto alla conduzione è uguale al flusso di calore dovuto alla convezione e ciò si traduce nella seguente relazione:

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = h(\vartheta - T_f)$$

Quando la distribuzione di temperatura è simmetrica si avrà:

$$\{x = L\} \Rightarrow \left\{ \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0 \right\}$$

e questo significa che è possibile ignorare tutta la zona per $x < L$ in quanto, non essendoci in L una differenza di temperatura, non ci sarà neanche scambio di calore e quindi è come se si fosse in presenza di una parete adiabatica. L'equazione di Fourier diventa, allora:

$$a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

Consideriamo allora le seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \vartheta(t=0) = f(x) \\ \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \\ \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=L} = -\frac{h}{\lambda} (\vartheta - T_f) \end{cases}$$

La soluzione di questa equazione differenziale è la seguente:

$$\vartheta = e^{-\gamma^2 at} [A_1 \sin(\gamma x) + A_2 \cos(\gamma x)]$$

Applicando la seconda delle condizioni al contorno indicate si ottiene:

$$A_2 = 0$$

e quindi rimane:

$$\vartheta = A_1 e^{-\gamma^2 at} \sin(\gamma x) \quad (3)$$

Applichiamo ora la terza condizione al contorno vista, dalla quale si ricava:

$$-e^{-\gamma^2 at} B_2 \sin(\gamma L) = -\frac{h}{\lambda} (\vartheta - T_f)$$

dove sia:

$$B_2 = A_2 \gamma$$

Esplicitando la penultima relazione scritta rispetto alla costante si ottiene:

$$B_2 = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\vartheta - T_f}{\sin(\gamma L)} e^{\gamma^2 at}$$

Combinando ora quest'ultima relazione con la relazione (3) si ottiene:

$$B_2 = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{e^{-\gamma^2 at} A_2 \cos(\gamma L) - T_f}{\sin(\gamma L)} e^{\gamma^2 at} = \frac{h}{\lambda} \left\{ A_2 \operatorname{ctg}(\gamma L) - T_f \frac{e^{\gamma^2 at}}{\sin(\gamma L)} \right\}$$

Operando ora una traslazione degli assi che porti a zero la temperatura del fluido si ottiene:

$$B_2 = \gamma A_2 = \frac{h}{\lambda} A_2 \operatorname{ctg}(\gamma L)$$

da cui si ricava:

$$\operatorname{ctg}(\gamma L) = \frac{\gamma \lambda}{h}$$

Moltiplicando e dividendo il secondo membro di quest'ultima relazione per L si ottiene:

$$\operatorname{ctg}(\gamma L) = \frac{\gamma L}{\frac{hL}{\lambda}}$$

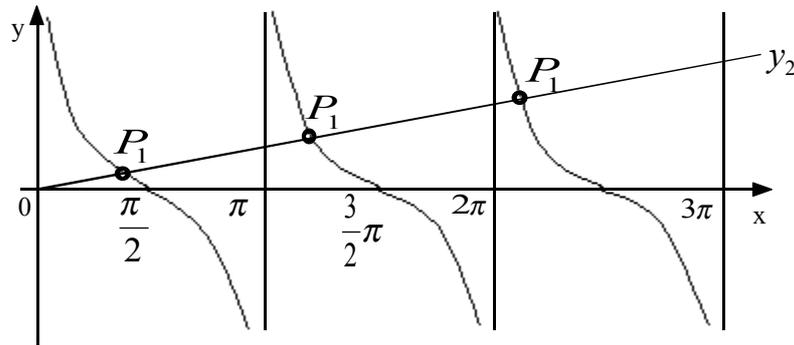
Per ottenere il risultato di questa relazione si sfrutta il metodo grafico intersecando le due seguenti curve:

$$\begin{cases} y_1 = \operatorname{ctg} x \\ y_2 = \frac{x}{\frac{hL}{\lambda}} \end{cases}$$

Si definisce, in particolare il coefficiente angolare della retta, nel modo seguente:

$$Bio = \frac{\lambda}{hL}$$

che prende il nome di numero di Biot.



Il numero di Biot appare quando c'è scambio termico sia per conduzione che per convezione, il numero di Fourier, invece, appare quando lo scambio termico avviene solo per conduzione. Quando abbiamo a che fare con una distribuzione costante di temperatura del tipo:

$$\vartheta(0) = const = T$$

si otterrà:

$$\gamma L \operatorname{tg}(\gamma L) - Bio = 0$$

Le soluzioni vengono ricondotte in termini di temperatura ridotta e si avrà quindi:

$$\vartheta^* = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma^2 at} \frac{\sin(\gamma_n L)}{\gamma_n L + \sin(\gamma_n L) \cos(\gamma_n L)} \cos(\gamma_n x)$$

Moltiplicando e dividendo per L l'argomento dell'ultimo coseno si ottiene:

$$\vartheta^* = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma^2 at} \frac{\sin(\gamma_n L)}{\gamma_n L + \sin(\gamma_n L) \cos(\gamma_n L)} \cos(\gamma_n \xi L)$$

ricordando però che:

$$\begin{cases} \gamma_n = \frac{n\pi}{L} \\ Fou = \frac{at}{L^2} \end{cases}$$

si ricava, sostituendo:

$$\vartheta^* = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n\pi)^2 Fou} D \cos(\gamma_n \xi L)$$

Vediamo ancora, dunque, la dipendenza dai parametri adimensionali:

$$\vartheta^* = \vartheta(Fou, \xi, Bio)$$

Soffermiamoci ora sulla teoria dell'analisi dimensionale grazie alla quale, ipotizzando di conoscere la temperatura in funzione di parametri noti, è possibile trovare relazioni in termini di parametri adimensionali che esprimono la variazione di θ .

Data dunque una parete alla temperatura iniziale ϑ_i e spessore $2L$, supponiamo di farla lambire da entrambi i lati da un fluido alla temperatura $\theta=0$. La temperatura θ sarà funzione del tempo e delle caratteristiche fisiche e geometriche del sistema termodinamico considerato, ovvero si avrà:

$$\vartheta = \varphi(\lambda, c, \rho, x, \vartheta_i, t, h, L)$$

dove sia:

$$\varphi = A \cdot \lambda^a \cdot c^b \cdot \rho^d \cdot x^e \cdot \vartheta_i^f \cdot t^g \cdot h^h \cdot L^i \quad (4)$$

Affinché la relazione sia consistente dal punto di vista fisico, i due termini dell'uguaglianza devono essere omogenei dal punto di vista dimensionale. Assumendo come grandezze fondamentali la lunghezza L , la massa M , il tempo T , la temperatura θ e il calore Q , si potrà scrivere la seguente equazione dimensionale:

$$\vartheta = A(Q^a \cdot L^{-a} \cdot T^{-a} \cdot \vartheta^{-a}) (Q^b \cdot M^{-b} \cdot \vartheta^{-b}) (M^d \cdot L^{-3d}) L^e \cdot \vartheta^f \cdot T^g (Q^h \cdot L^{-2h} \cdot T^{-h} \cdot \vartheta^{-h}) L^i$$

Perché sia verificata la condizione di omogeneità deve risultare verificato il seguente sistema:

$$\begin{cases} 1 = -a - b + f - h \\ 0 = a + b + h \\ 0 = -a - 3d + e - 2h + i \\ 0 = -b + d \\ 0 = -a + g - h \end{cases}$$

che sono, rispettivamente, le dimensioni di θ , Q, L, M e T. Abbiamo dunque cinque equazioni con otto incognite e quindi risolviamo il sistema in funzione di tre incognite (supponiamo che siano e, g ed h). Otterremo così la seguente soluzione:

$$\begin{cases} b = -g \\ d = -g \\ f = 1 \\ a = g - h \\ i = 2g - e + h \end{cases}$$

Sostituendo nella relazione (4) i valori degli esponenti trovati e raggruppando le grandezze con lo stesso esponente si ottiene:

$$\vartheta = A \cdot \lambda^{g-h} \cdot c^{-g} \cdot \rho^{-g} \cdot x^e \cdot \vartheta_i \cdot t^g \cdot h^h \cdot L^{2g-e+h}$$

da cui si ricava:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_i} = A \left(\frac{hL}{\lambda} \right)^h \left(\frac{\lambda t}{c\rho L^2} \right)^g \left(\frac{x}{L} \right)^e = A (Bio)^h (Fou)^g \xi^e$$

I tre esponenti incogniti possono essere ricavati solo per via sperimentale. Occorre pertanto realizzare prove sperimentali rappresentative del sistema che si sta studiando. Per come è stata ottenuta la correlazione tra le grandezze fisiche e geometriche, gli esponenti determinati sperimentalmente sono identici per sistemi fisicamente simili e con identiche condizioni al contorno, in altre parole se in un sistema termodinamico di struttura simile a quello per il quale sono stati determinati gli esponenti, variano le proprietà fisiche o le dimensioni, la distribuzione di temperatura segue la stessa legge. In altre parole, se in un fenomeno intervengono n grandezze fisiche e di esse r possono essere assunte come fondamentali, è possibile determinare (n-r) gruppi adimensionali π_i che si ottengono come rapporto tra ciascuna delle (n-r) grandezze e il prodotto delle r grandezze assunte come fondamentali, elevate ciascuna ad un esponente arbitrario. Questo enunciato va sotto il nome di teorema di Buckingham.

Gli strumenti più moderni e maggiormente aggiornati con la tecnologia odierna, misurano la distribuzione di temperatura sfruttando la radiazione termica che ha una lunghezza d'onda diversa rispetto alla radiazione luminosa (ad esempio la radiazione termica, a differenza della radiazione luminosa, non è in grado di attraversare il vetro).

Convezione.

Torniamo ora ad occuparci della convezione ricordando la relazione seguente:

$$\phi = -K \frac{dT_x}{dx} = h(\vartheta - T_f)$$

che si otteneva uguagliando il flusso convettivo con il flusso conduttivo. h prende il nome di coefficiente di scambio termico convettivo (esprime dunque quanto calore passa dal solido al fluido). Vediamo ora come si può esprimere tale coefficiente h e iniziamo con l'occuparci delle sue unità di misura; sfruttiamo dunque la relazione:

$$\phi = h(\vartheta - T_f)$$

che, sfruttando le unità di misura, può essere indicata nel modo seguente:

$$\left[\frac{W}{m^2} \right] = h[K]$$

dalla quale, ovviamente, si ricava:

$$h = \left[\frac{W}{m^2 K} \right]$$

h , dunque, esprime quanto calore passa ad un fluido da una superficie di 1 metro quadrato quando, tra il solido e il fluido, c'è una differenza di temperatura di 1 kelvin. Il coefficiente h dipende da tanti parametri quali, per esempio:

- il moto del fluido attorno alla parete;
- il campo di velocità del moto;
- la conducibilità del fluido;
- la capacità termica;
- la massa volumica;
- il tipo di superficie; nel caso di superficie liscia, per esempio, il valore di h sarà inferiore rispetto al caso di superficie rugosa. Questo è vero quando il campo di moto del fluido è spinto da una forzante ovvero quando qualcosa lo spinge; quando invece siamo in presenza di uno scambio convettivo naturale, l' h della superficie rugosa non è particolarmente diverso da quella della superficie liscia.

Calcoliamo ora il campo termico mediante l'analisi dimensionale, ovvero determiniamo cosa fa variare h quando un fluido lambisce un solido. In base al breve elenco fatto prima dei parametri che influenzano h si avrà:

$$h = h(\rho, \mu, c_p, \lambda, \bar{w}, D)$$

dove w esprime il campo di moto mentre D si riferisce alle dimensioni geometriche del sistema. Si avrà ovviamente:

$$h = A \cdot \rho^b \cdot \mu^c \cdot c_p^d \cdot \lambda^e \cdot \bar{w}^f \cdot D^g \quad (1)$$

Anche in questo caso scegliamo come grandezze fondamentali la lunghezza L , la massa M , il tempo T e la temperatura θ , si potrà scrivere la seguente equazione dimensionale:

$$h = (M^b \cdot L^{-3b}) (M^c \cdot L^{-c} \cdot T^{-c}) (L^{2d} \cdot T^{-2d} \cdot \vartheta^{-d}) (M^e \cdot L^e \cdot T^{-3e} \cdot \vartheta^{-e}) (L^f \cdot T^{-f}) L^g$$

in quanto era:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Energia} = F \cdot L \\ \text{Potenza} = F \cdot L \cdot T^{-1} \\ \mu = \frac{F \, dy}{A \, dw} = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L^2 \cdot L \cdot L^{-1} \cdot T = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1} \\ c_p = M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot M^{-1} \cdot \vartheta^{-1} = L^2 \cdot T^{-2} \cdot \vartheta^{-1} \\ \lambda = M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot T^{-1} \cdot L^{-1} \cdot \vartheta^{-1} = M \cdot L \cdot T^{-3} \cdot \vartheta^{-1} \end{array} \right.$$

Siccome si ha:

$$h = M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot T^{-1} \cdot L^{-2} \cdot \vartheta^{-1}$$

la consistenza fisica della relazione è verificata qualora si abbia:

$$M \cdot T^{-3} \cdot \vartheta^{-1} = M^{b+c+e} \cdot L^{2d-3b-c+e+f+g} \cdot T^{-c-2d-3e-b} \cdot \vartheta^{-d-e}$$

Quest'ultima relazione si traduce nel seguente sistema:

$$\begin{cases} 1 = b + c + e \\ -1 = -d - e \\ -3 = -c - 2d - 3e - f \\ 0 = 2d - 3b - c + e + f + g \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = b + c + e \\ 1 = d + e \\ 3d + 3e = c + 2d + 3e + f \\ 0 = 2d - 3b - c + e + f + g \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b + c = d \\ e = 1 - d \\ d = c + f \\ 0 = 2d - 3b - c + e + f + g \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + c = d \\ e = 1 - d \\ c = d - f \\ 0 = 2d - 3b - c + e + f + g \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b + d - f = d \\ e = 1 - d \\ c = d - f \\ 0 = 2d - 3f - d + f + 1 - d + f + g \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = f \\ e = 1 - d \\ c = d - f \\ g = f - 1 \end{cases}$$

Combinando i risultati ottenuti mediante questo sistema con la relazione (1) si ottiene:

$$h = A \cdot \rho^f \cdot \mu^{d-f} \cdot c_p^d \cdot \lambda^{1-d} \cdot \bar{w}^f \cdot D^{f-1} = A \cdot \rho^f \cdot \mu^d \cdot \mu^{-f} \cdot c_p^d \cdot \lambda \cdot \lambda^d \cdot \bar{w}^f \cdot D^f \cdot D^{-1}$$

da cui si ricava:

$$\frac{hD}{\lambda} = A \left(\frac{\rho \bar{w} D}{\mu} \right)^f \left(\frac{\mu c_p}{\lambda} \right)^d \quad (2)$$

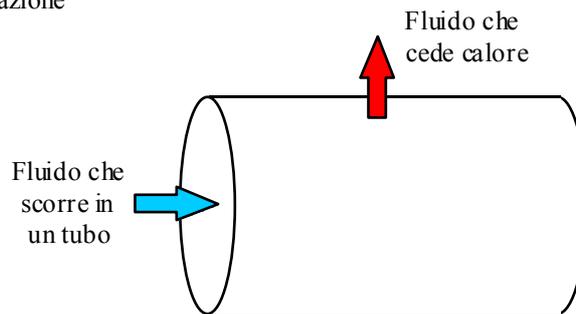
Definendo poi come segue i tre parametri che appaiono nella relazione:

$$\begin{cases} \frac{hD}{\lambda} = Nu \\ \frac{\rho \bar{w} D}{\mu} = Re \\ \frac{\mu c_p}{\lambda} = Pr \end{cases}$$

che prendono, rispettivamente, il nome di numero di Musselt, numero di Reynolds e numero di Prandtl, possiamo riscrivere la relazione (2) nel modo seguente:

$$Nu = A (Re)^f (Pr)^d$$

Tutto questo discorso vale solo per il caso della convezione forzata. Per ottenere una soluzione completa sarebbe necessario ricavare i parametri f, d ed e, per fare questo, avremo bisogno di dati sperimentali. Vediamo alcuni casi sperimentali: nella seguente situazione



Si avrà che, nell'ipotesi che sia:

$$10000 \leq Re \leq 120000$$

varrà la correlazione di Dittus Boelter secondo la quale:

$$Nu = 0,023(Re)^{0,8} (Pr)^{0,3}$$

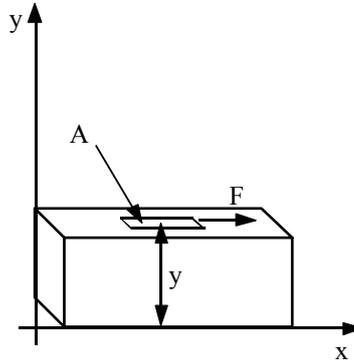
Siccome il numero di Reynolds appare come un parametro determinante, vediamo che cosa tale numero significhi. Ricordiamone innanzitutto la definizione, secondo la quale:

$$Re = \frac{\rho \bar{w} D}{\mu}$$

Ricordiamo ora la relazione elementare secondo la quale:

$$F_i = m_i a = \rho V a = \rho D^2 \frac{D}{Dt} \approx \rho \bar{w}^2 D^2$$

Riconosciamo dunque lo sforzo di taglio esercitato da diversi strati di fluido che scorrono l'uno sopra l'altro; ogni strato si muove con velocità diversa, tanto più si considerano strati localizzati nel centro del fluido e tantopiù le velocità saranno maggiori. Per comprendere meglio tale situazione facciamo riferimento ad una vaschetta contenete del fluido e sopra la quale viene posta una placca.



Applicando alla placchetta una forza tangenziale per imprimerle un certo movimento predeterminato, possiamo osservare che tale forza sarà diversa a seconda del fluido che sostiene la placca: tale caratteristica prende il nome di viscosità. Risulta inoltre sperimentalmente che:

$$\frac{F}{A} = -\mu \frac{d\bar{w}}{dy}$$

Si otterrà dunque:

$$F = -\mu \frac{d\bar{w}}{dy} A$$

ovvero:

$$F_v = -\mu \bar{w} D^2 D^{-1}$$

Consideriamo ora il seguente rapporto:

$$\left| \frac{F_i}{F_v} \right| = \frac{\rho \bar{w}^2 D^2}{\mu D^2 D^{-1} \bar{w}} = \frac{\rho \bar{w} D}{\mu}$$

Possiamo dunque osservare come il numero di Reynolds esprima il rapporto tra le forze d'inerzia del moto del fluido e le forze viscosse associate a diversi filetti di fluido:

- quando prevalgono le forze viscosse il fluido ha un moto laminare;
- quando prevalgono le forze d'inerzia abbiamo un moto turbolento e c'è diffusione di quantità di moto lungo il condotto e perpendicolarmente al condotto.

Il numero di Reynolds, dunque, ci dice se il moto è laminare o turbolento; in generale si avrà:

$Re \leq 2000$	Moto laminare
$2000 \leq Re \leq 4500$	Transizione
$Re \geq 4500$	Moto turbolento

Ovviamente questi valori vanno valutati a seconda del tipo di fluido utilizzato in quanto c'è dipendenza dalla viscosità.

Sforzo di taglio τ . Fluidi newtoniani e plastici. La viscosità. I tubi. Convezione naturale. Regime stazionario.

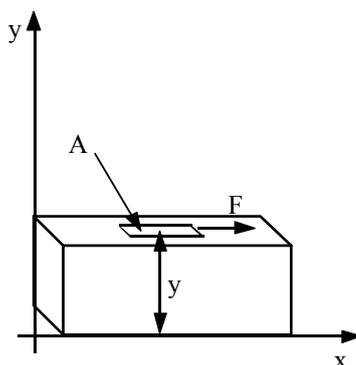
Lo sforzo di tagli è già stato precedentemente definito tramite la seguente relazione:

$$\tau = \frac{F}{A}$$

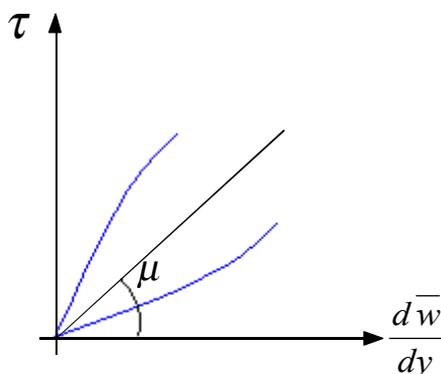
ovviamente può essere considerato in tutte le direzioni (x, y e z) oppure rispetto ad una sola direzione; in questo ultimo caso si avranno relazioni del tipo:

$$\tau_x = -\mu \frac{d\bar{w}_x}{dy}$$

dove, ovviamente, μ prende il nome di viscosità. Ricordiamo a questo proposito l'immagine che già avevamo visto nella lezione precedente e che viene di seguito riproposta:



Il fatto che lo sforzo di taglio rispetto ad x sia proporzionale alla derivata della velocità rispetto ad y suggerisce che ci sia un gradiente di velocità in tale direzione. Quando la proporzionalità alla quale si è accennato è diretta allora si dice che il fluido è Newtoniano. Ovviamente non tutti i fluidi sono newtoniani; esistono infatti i fluidi plastici che subiscono delle deformazioni prima di iniziare lo scorrimento.



Un esempio significativo può essere il sangue: quando, infatti, le dimensioni dei vasi sono decisamente maggiori delle dimensioni dei globuli, il sangue si comporta come un fluido newtoniano; quando, invece, le dimensioni dei vasi sono molto simili alle dimensioni dei globuli, il sangue si comporta come un fluido plastico perché, prima di iniziare lo scorrimento, i globuli devono mettersi in fila e deformarsi leggermente (quando le resistenze del circolo periferico sono troppo elevate, i globuli possono anche danneggiarsi). Tale fenomeno fa sì che nel microcircolo la circolazione sia detta a tappi perché si muovono quantità discrete di sangue.

Dal punto di vista dimensionale, la viscosità è così rappresentata:

$$[\mu] = \frac{[\tau_x]}{\left[\frac{dw}{dy}\right]} = \frac{\frac{[M][L][T]^{-2}}{[L]^2}}{\frac{[L][T]^{-1}}{[L]}} = [M][L]^{-1}[T]^{-1}$$

e quindi, per quanto riguarda le unità di misura:

$$[\mu] = \frac{Pa}{\frac{m/s}{m}} = \frac{N/m^2}{\frac{m/s}{m}} = Pa \cdot s$$

Solitamente questa unità viene indicata con il termine Poise; nella vecchia letteratura si trova anche lo stoke come unità di misura (era quella riferita al sistema pratico).

Concentriamoci ora su cosa accade all'interno dei tubi; facciamo dunque l'analisi dello stato di moto con il numero di Reynolds (Re). Consideriamo lo sviluppo dello strato limite del fluido: se siamo in moto laminare lo strato limite si sviluppa tramite rapporti

$$\frac{x_i}{D_i}$$

dove al numeratore vediamo apparire la lunghezza in cui si sviluppa completamente lo strato limite mentre al denominatore c'è il diametro del tubo (idraulico). Nel moto laminare varrà inoltre la relazione:

$$\frac{x_i}{D_i} = 0,005 Re$$

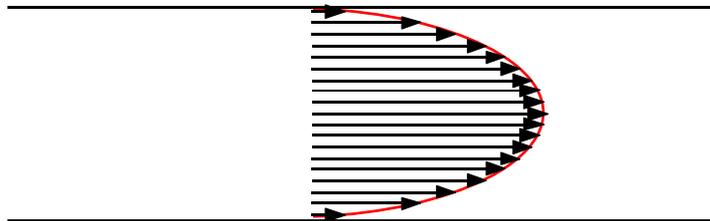
mentre per il moto turbolento si ha un rapporto fisso:

$$\frac{x_i}{D_i} = 10$$

Per calcolare il coefficiente di scambio termico convettivo h si può utilizzare la relazione di Sieder-Tate secondo la quale:

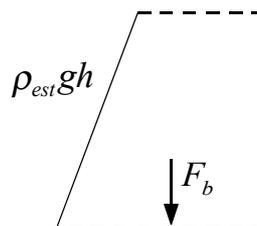
$$Nu = 1,86 \left(Re \cdot Pr \frac{D_i}{L} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0,14}$$

dove Pr sia maggiore di 0,5. In questa relazione vediamo apparire, nell'ultima parentesi, il rapporto tra la viscosità dinamica in corrispondenza della temperatura di miscelamento adiabatico e la viscosità dinamica in corrispondenza alla temperatura della parete. Nell'immagine seguente vediamo un profilo di velocità all'interno di un tubo.



Il fatto che ci siano diverse temperature implica che ci siano anche diversi scambi di energia e quindi la temperatura all'interno del tubo non è uniforme. C'è quindi il bisogno di una temperatura che sia sufficientemente rappresentativa dell'intero fluido e questa è, appunto, la temperatura di miscelamento adiabatico (detta anche bulk temperature). Tale temperatura è quella assunta dal fluido qualora non ci sia scambio termico con l'esterno e il fluido sia completamente miscelato (ovvero qualora non esistano gradienti di temperatura all'interno del fluido stesso). Ovviamente tale temperatura è una nostra astrazione.

Passiamo ora ad occuparci della convezione naturale. Ricordiamo innanzitutto che si parla di convezione quando lo scambio termico avviene attraverso un trasporto di massa. Il moto del fluido può essere forzato (ovvero imposto da qualcuno) oppure naturale, il fluido, cioè, si può spostare anche per effetto di un campo termico. Per comprendere questo discorso possiamo fare riferimento ad un camino chiuso come quello rappresentato di seguito:



Se consideriamo la forza che viene esercitata sulla base osserviamo che l'aria interna sviluppa una forza pari a:

$$F_b = \rho_{int} gh$$

Se consideriamo anche l'aria esterna al camino dobbiamo però tener conto anche di una forza espressa dalla seguente relazione:

$$F_e = \rho_{est} g h$$

All'equilibrio, ovviamente, si avrà:

$$|\rho_{int} - \rho_{est}| g h = 0$$

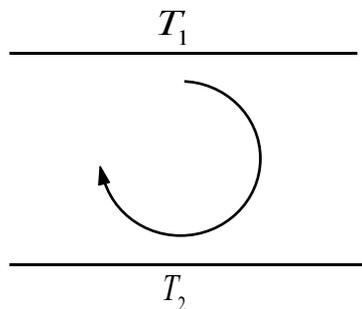
Sappiamo però anche che la densità dell'aria varia con il variare della temperatura e quindi, se la temperatura interna è maggiore rispetto alla temperatura esterna, la densità dell'aria all'interno del camino sarà minore rispetto alla densità dell'aria all'esterno del camino (in quanto l'aumento della temperatura porta ad un aumento del volume massico che è l'inverso della massa volumica). Quando allora, in una situazione come questa, apriamo il camino, avremo che, siccome la temperatura interna è maggiore della temperatura esterna, si crea uno squilibrio nelle forze prima viste e la massa esterna di aria innesca una circolazione d'aria che segue la risultante R così definita:

$$R = F_e - F_b$$

Quando siamo in presenza di due lastre piane parallele che delimitano un condotto, se c'è una differenza di temperatura ovvero se si ha (con riferimento all'immagine seguente):

$$T_1 > T_2$$

allora si innescano dei moti vorticosi come, appunto, quelli mostrati nell'immagine seguente:



Qualora invece si avesse:

$$T_1 < T_2$$

allora l'aria leggera sarebbe sopra e quella pesante sotto e quindi non si avrebbero moti convettivi; dunque, non sempre dei gradienti di temperatura innescano nei fluidi un moto convettivo tale discorso vale per ogni fluido e non solo per l'aria). Il fenomeno della conduzione naturale è molto importante anche per quanto riguarda, per esempio, il posizionamento dei chip elettronici (non è infatti sempre possibile mettere ovunque una ventola per il raffreddamento). Vediamo ora come stabilire il coefficiente di scambio termico convettivo h (sempre attraverso relazioni adimensionali come visto in precedenza). In questo caso si avrà:

$$h = h(\alpha, T, \rho, \mu, \dots)$$

dove i puntini stanno per tutti gli altri parametri che già avevamo visto nel caso della convezione forzata, α è invece il coefficiente di dilatazione isobaro. Tenendo conto anche della dipendenza di ρ da T si arriverà, in modo molto simile a quanto visto in precedenza, ad una relazione del tipo:

$$Nu = const \cdot (Gr)^a (Pr)^b$$

dove con Gr si intende il numero di Grasciov che è così definito:

$$Gr = \frac{1}{\mu^2} \rho^2 \alpha g \Delta T D^3$$

dove ΔT è la differenza di temperatura tra il solido e il fluido, α raccoglie dei termini dovuti al galleggiamento ed alla dilatazione, g è l'accelerazione di gravità, D il diametro del tubo (o comunque la lunghezza lungo la quale avviene lo scambio termico). E' importante osservare che, mentre nella conduzione il valore di λ è una costante, nel caso della convezione, h varia con il variare delle condizioni.

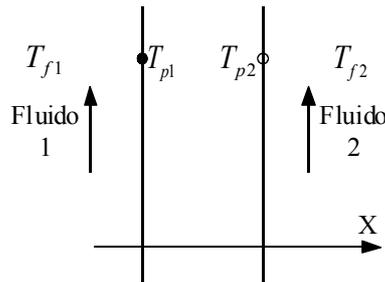
Occupiamoci ora del regime stazionario e facciamo riferimento alla prima immagine della pagina seguente nella quale vediamo una parete a facce piane parallele lambita da due fluidi a temperatura diversa. Definiamo nel modo seguente la temperatura del film, ovvero la temperatura dello strato limite di fluido che lambisce la parete:

$$T_{film} = \frac{T_m + T_p}{2}$$

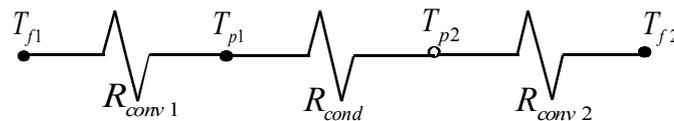
Nel caso in cui, con riferimento alla prima immagine della pagina seguente, si avesse:

$$T_{f1} > T_{p1} > T_{p2} > T_{f2}$$

ci sarebbe un flusso termico nella direzione delle x. Sfruttando l'analogia elettrica, possiamo definire, con riferimento alla seconda immagine di questa pagina, la resistenza R tra il fluido 1 e il fluido 2.



Come si nota nell'immagine seguente si parla di resistenza convettiva e di resistenza conduttiva; la resistenza termica equivale alla resistenza convettiva tra il solido e il fluido.



Per quanto riguarda il calore scambiato avremo allora un dato specifico per la superficie che è il seguente:

$$\dot{Q}_s = h(T_f - T_p)$$

che complessivamente diventa:

$$\dot{Q} = hS(T_f - T_p)$$

L'equivalenza elettrica è ovviamente da costruire con la relazione:

$$I = G\Delta V$$

Possiamo dunque definire la resistenza convettiva nel modo seguente:

$$R_{conv} = \frac{1}{hS}$$

In una situazione come questa il calore viene scambiato, in serie, prima per convezione, poi per conduzione e, infine, ancora per convezione; consideriamo dunque le tre seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \dot{Q}_1 = h_1 S (T_{f1} - T_{p1}) \\ \dot{Q}_{cond} = \frac{\lambda S}{s} (T_{p1} - T_{p2}) \\ \dot{Q}_2 = h_2 S (T_{p2} - T_{f2}) \end{cases}$$

Ricaviamo dunque la differenza di potenziale (che in questa situazione coincide con la differenza delle temperature) e sommiamo membro a membro, ottenendo:

$$T_{f1} - T_{f2} = \left(\frac{1}{h_1 S} + \frac{s}{\lambda S} + \frac{1}{h_2 S} \right) \dot{Q}$$

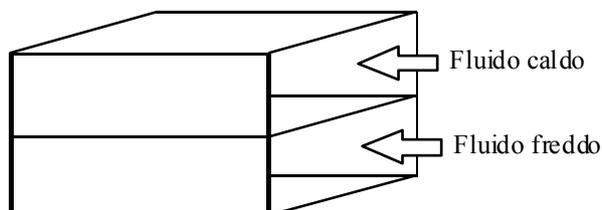
La resistenza termica sarà dunque:

$$R_{termica} = \frac{1}{h_1 S} + \frac{s}{\lambda S} + \frac{1}{h_2 S}$$

Un discorso assolutamente identico sarebbe stato possibile nel caso di un tubo all'interno del quale scorre un fluido ed all'esterno del quale scorre un altro fluido oppure anche nel caso di un fluido che scorre all'interno di un tubo e di un altro fluido che scorre, perpendicolarmente al primo, all'interno di una corona circolare formata da due tubi concentrici all'esterno dei quali viene posto un isolante (bisogna tra l'altro osservare che non ci deve essere troppo isolante perché quando h scende S sale e si giunge ad un raggio critico oltre il quale non è più conveniente mettere l'isolante).

Scambiatori di calore.

Uno scambiatore è un qualsiasi apparecchio che permette di scambiare calore da un sistema termodinamico ad un altro; alcuni esempi di scambiatori di calore sono quelli presenti in un generico frigorifero che ricevono il calore dall'interno del frigorifero e lo riversano all'esterno. Una volta stabilito cosa sono gli scambiatori di calore dobbiamo stabilire come funzionano. A livello schematico uno scambiatore di calore può essere visto come una coppia di pareti che separano due fluidi che si scambiano calore. Vediamo allora una schematizzazione di uno scambiatore. Come prima cosa dobbiamo precisare che uno scambiatore lavora sempre sfruttando due fluidi: un fluido caldo e un fluido freddo.



Uno scambiatore si dice a correnti parallele se i due fluidi si muovono con correnti parallele; se, inoltre, i due fluidi entrano dallo stesso lato dello scambiatore, lo scambiatore viene detto equicorrente. Se, invece, un fluido entra in un lato e un fluido entra nell'altro, allora lo scambiatore si dice controcorrente. Esistono poi (e si pensi al radiatore dell'auto) scambiatori a correnti incrociate. Noi ci occuperemo, principalmente, di scambiatori di calore a correnti parallele. Iniziamo allora con il rappresentare uno scambiatore di calore equicorrente dal punto di vista termodinamico: individuiamo un volume di controllo all'interno dello scambiatore e vediamo quali grandezze possono essere considerate. Sia per quanto riguarda il fluido caldo che per quanto riguarda il fluido freddo dobbiamo parlare di portata, temperatura, entalpia ed entropia. Supponiamo inoltre che le perdite di carico siano trascurabili (ciò significa supporre che ogni fluido ha una sua pressione che rimane costante). Concentriamoci ora su alcuni bilanci il primo dei quali può senza dubbio essere il seguente:

$$\dot{m}_c (h_{ic} - h_{uc}) = \dot{m}_f (h_{if} - h_{uf})$$

dove con c si indica il fluido caldo, con f si indica il fluido freddo, con i si indica l'ingresso e con u si indica l'uscita. Tenendo conto delle convenzioni di segno possiamo riscrivere la relazione appena vista nel modo seguente:

$$\left| -\dot{m}_c (h_{ic} - h_{uc}) \right| = \left| \dot{m}_f (h_{uf} - h_{if}) \right|$$

Siccome solitamente interessa solo il bilancio in modulo, si considera la relazione

$$\dot{m}_c (h_{ic} - h_{uc}) = \dot{m}_f (h_{uf} - h_{if})$$

Supponiamo ora che il processo sia isobaro, da cui si ricava che:

$$h = c_p t$$

Avrà allora senso anche la seguente relazione:

$$\dot{m}_c c_{pc} (t_{ic} - t_{uc}) = \dot{m}_f c_{pf} (t_{if} - t_{uf})$$

Definiamo ora come segue la capacità termica di portata:

$$C = \dot{m} c_p$$

e quindi, combinando le ultime due relazioni scritte, si ottiene:

$$C_c (t_{ic} - t_{uc}) = C_f (t_{if} - t_{uf})$$

Qualora sia:

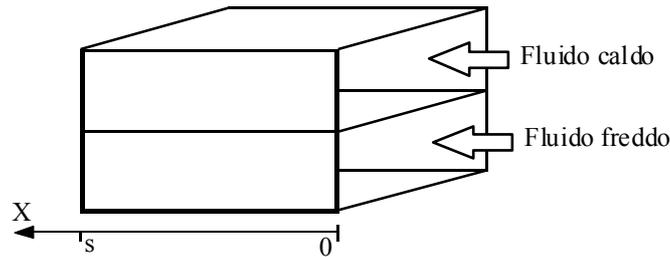
$$C_c \gg C_f$$

il salto termico del fluido freddo sarà maggiore del salto termico del fluido caldo, ovvero:

$$t_{uf} - t_{if} = t_{uc} - t_{ic}$$

Se avessimo uno scambiatore che lavora con il medesimo fluido (sia come fluido caldo che come fluido freddo), per esempio l'acqua, noto il calore scambiato e la temperatura d'ingresso del fluido freddo, potremmo controllare la temperatura di uscita dell'acqua variando la sola portata dell'acqua stessa. Se vogliamo che la temperatura del fluido che cede calore rimanga il più costante possibile possiamo seguire due strade diverse: possiamo usare un fluido in transizione di fase oppure operare sulla capacità termica, ad esempio aumentando la porta del fluido caldo. Ovviamente bisogna anche tener conto dell'entropia dovuta alla non idealità del fluido e l'entropia dovuta al fatto che lo scambio di

calore avviene per salti finiti di temperatura. Vediamo ora l'andamento della temperatura lungo una direzione X all'interno dello scambiatore; facciamo dunque riferimento alla seguente immagine:



Il calore scambiato, in funzione di x, sarà:

$$\dot{Q}_c(x) = \dot{m}_c c_p (T_{ic} - T_{xc})$$

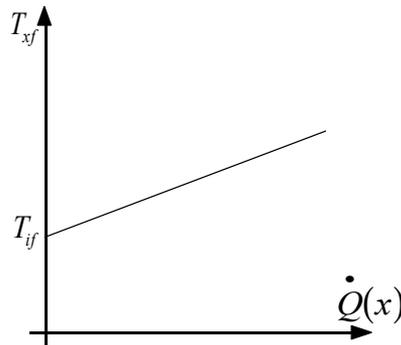
dalla quale relazione si ricava:

$$T_{xc} = T_{ic} - \frac{\dot{Q}(x)}{\dot{m}_c c_p}$$

Un discorso analogo, rifatto per il fluido freddo, ci permetterà di scrivere:

$$T_{xf} = T_{if} + \frac{\dot{Q}(x)}{\dot{m}_f c_p}$$

Dunque il riscaldamento e il raffreddamento dei fluidi all'interno dello scambiatore sono lineari, graficamente si avrà:



Definiamo ora nel modo seguente la differenza tra la temperatura d'ingresso del fluido caldo e la temperatura d'ingresso del fluido freddo:

$$\Delta T_{x=0} = T_{ic} - T_{if}$$

Una medesima differenza può essere calcolata anche per i valori delle temperature in uscita:

$$\Delta T_{x=s} = T_{uc} - T_{uf}$$

Tali due relazioni valgono, ovviamente, nel caso di uno scambiatore equicorrente, nel caso di uno scambiatore controcorrente si avrà invece:

$$\begin{cases} \Delta T_{x=0} = T_{ic} - T_{uf} \\ \Delta T_{x=s} = T_{uc} - T_{if} \end{cases}$$

Il calore viene scambiato dal fluido caldo al fluido freddo per mezzo della superficie di separazione; mettiamoci dunque nel caso in cui si consideri una superficie infinitesima che sia parte dell'intera superficie di separazione; costruiamo il volume di controllo al quale si era accennato in precedenza su tale superficie infinitesima e consideriamo i tre seguenti bilanci:

$$\begin{cases} d\dot{Q}_c = C_c dT_c \\ d\dot{Q}_f = C_f dT_f \\ d\dot{Q}_{tot} = KdS(T_c - T_f) \end{cases} \quad (1)$$

dove le temperature che appaiono nell'ultima relazione del sistema sono quelle valutate in corrispondenza della x in prossimità della quale si trova la superficie infinitesima dS . Dalle prime due equazioni del sistema si ottiene:

$$\begin{cases} dT_c = \frac{d\dot{Q}_c}{C_c} \\ dT_f = \frac{d\dot{Q}_f}{C_f} \end{cases}$$

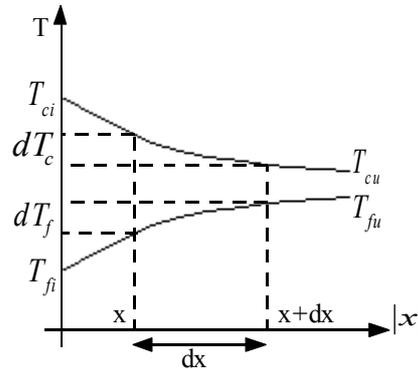
Sottraendo membro a membro tali due relazioni si ottiene:

$$dT_c - dT_f = \frac{d\dot{Q}_c}{C_c} - \frac{d\dot{Q}_f}{C_f}$$

Siccome i due calori scambiati sono uguali in modulo si può manipolare l'ultima relazione scritta in modo da ottenere:

$$|dT_c - dT_f| = d\dot{Q} \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right)$$

Nell'immagine seguente vediamo l'andamento della temperatura dei due fluidi in funzione della x :



Combinando l'ultima relazione scritta con la relazione (1) si ottiene:

$$\frac{dT_c - dT_f}{T_c - T_f} = -KdS \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right)$$

Battezzando p la profondità dello scambiatore di calore si potrà scrivere:

$$dS = p dx$$

e quindi, combinando le due ultime relazioni scritte:

$$\frac{dT_c - dT_f}{T_c - T_f} = -Kp dx \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right)$$

Scambiatori di calore. L'irraggiamento.

Riprendiamo l'ultima relazione scritta nella lezione precedente, secondo la quale:

$$\frac{dT_c - dT_f}{T_c - T_f} = -Kpdx \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right) \quad (1)$$

e riscriviamola nel modo seguente:

$$\frac{d(\Delta T)_x}{\Delta T_x} = - \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right) Kpdx$$

Integrando tale relazione si ottiene:

$$\ln[\Delta T]_i^x = -Kp \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right) [x]_i^x$$

Ricordiamo poi le definizioni che avevamo visto nella lezione precedente secondo le quali:

$$\begin{cases} \Delta T_{x=0} = T_{ic} - T_{uf} \\ \Delta T_{x=s} = T_{uc} - T_{if} \end{cases}$$

Possiamo così riscrivere la relazione (1) come segue:

$$\ln \frac{\Delta T_x}{\Delta T_0} = -Kp \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right) x$$

dalla quale si ricava:

$$\Delta T_x = \Delta T_0 \exp \left\{ -Kp \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right) x \right\} \quad (2)$$

Abbiamo così trovato l'andamento di ΔT con x ; ricordando la lezione precedente, però, vediamo come noi stessi cercando l'andamento della temperatura del fluido caldo in funzione della x ; ricordiamo allora le due relazioni vista la volta scorsa secondo le quali:

$$\begin{cases} dT_c = \frac{d\dot{Q}_c}{C_c} \\ dT_f = \frac{d\dot{Q}_f}{C_f} \end{cases}$$

e dalle quali si ricava:

$$\begin{cases} \frac{1}{C_c} = \frac{T_{ci} - T_{cu}}{\dot{Q}} \\ \frac{1}{C_f} = \frac{T_{fu} - T_{fi}}{\dot{Q}} \end{cases}$$

Ricordiamo poi le due seguenti relazioni (anch'esse ricavate nella scorsa lezione):

$$\begin{cases} T_{xc} = T_{ic} - \frac{\dot{Q}(x)}{\dot{m}_c c_p} \\ T_{xf} = T_{if} - \frac{\dot{Q}(x)}{\dot{m}_f c_p} \end{cases}$$

dalle quali si ricava:

$$\begin{cases} T_{xc} - T_{ic} = -\frac{\dot{Q}(x)}{C_c} \\ T_{xf} - T_{if} = -\frac{\dot{Q}(x)}{C_f} \end{cases} \quad (3)$$

Sottraendo ora membro a membro le due relazioni di quest'ultimo sistema, si ottiene:

$$T_{cx} - T_{ci} - T_{fx} - T_{fi} = -\dot{Q}_x \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right)$$

ovvero:

$$\Delta T_x - \Delta T_0 = -\dot{Q}_x \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right) \quad (4)$$

Quest'ultima relazione può anche essere scritta nel modo seguente:

$$\dot{Q}_x = -\frac{1}{\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f}} (T_{cx} - T_{fx} - \Delta T_0)$$

Combinando questa relazione con l'equazione numero (2) si ottiene:

$$\dot{Q}_x = \frac{1}{\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f}} (\Delta T_0 - \Delta T_x) = \frac{1}{\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f}} \left[\Delta T_0 - \Delta T_0 \exp \left\{ -Kp \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right) x \right\} \right]$$

Combinando poi quest'ultima relazione con la relazione (3) si ricava:

$$T_{cx} = T_{ci} - \frac{\Delta T_0}{C_c \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right)} \left[1 - \exp \left\{ -Kp \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right) x \right\} \right] \quad (5)$$

Ora che abbiamo trovato quello che stavamo cercando vediamo di fare alcune considerazioni importanti: qualora si prenda un fluido in transizione di fase, ovviamente la sua temperatura rimarrà costante; notiamo infatti che, se tale fluido è il fluido caldo, si avrà:

$$C_c \gg C_f$$

e quindi, appunto, combinando le due ultime relazioni scritte:

$$T_{cx} = T_{ci}$$

Uno scambiatore di calore può essere utilizzato come un regolatore della temperatura di uno dei fluidi (la relazione (5) è molto utile proprio a questo scopo). I parametri che influenzano la temperatura del fluido sono tutti quelli contenuti nella relazione (5). Uno scambiatore può anche essere usato per scambiare una certa potenza, cerchiamo quindi l'espressione che mi rappresenta la potenza scambiata da uno scambiatore. A questo proposito è importante, prima di tutto, ricordare la relazione (4) che, considerando l'intero scambiatore, diventa:

$$\Delta T_s - \Delta T_0 = -\dot{Q} \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right)$$

dalla quale si ricava:

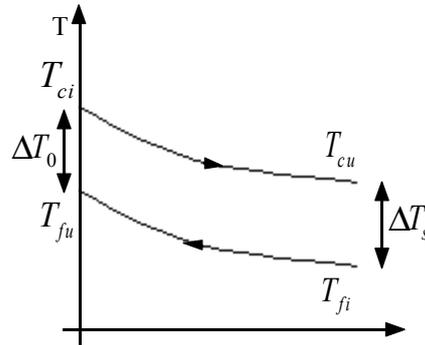
$$\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} = \frac{\Delta T_0 - \Delta T_s}{\dot{Q}}$$

Sostituendo questa relazione nella prima equazione scritta in questa lezione si ricava:

$$\frac{C_f}{C_c} = \frac{T_{ci} - T_{cu}}{T_{fu} - T_{fi}} = \frac{T_{ci} - T_{fi} - \Delta T_s}{T_{ci} - T_{fi} - \Delta T_0} \quad (6)$$

Dal punto di vista grafico ciò si traduce nel primo grafico della pagina seguente. Osservando, infatti, tale grafico si osserva che:

$$\begin{cases} T_{cu} = T_{fi} + \Delta T_s \\ T_{fu} = T_{ci} - \Delta T_0 \end{cases}$$



Si comprende dunque il passaggio dal secondo al terzo membro della relazione (6). A livello teorico sappiamo che:

$$\Delta T_s = \Delta T_0 = 0$$

tutto il calore ceduto dal fluido caldo è assorbito dal fluido freddo. In realtà questa è una condizione irreali; in realtà osserviamo che si ha:

$$\Delta T_s = 0 \tag{7}$$

quando:

$$C_c \ll C_f$$

e questo implica che:

$$\Delta T_0 = K$$

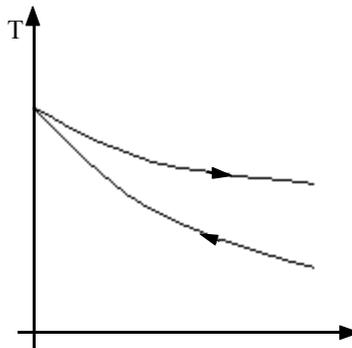
dalla relazione (6) possiamo inoltre ricavare, qualora sia verificata la relazione (7):

$$C_c (T_{ci} - T_{fi}) = C_f (T_{ci} - T_{fi} - \Delta T_0)$$

Nel caso di uno scambiatore controcorrente di lunghezza infinita nel quale si abbia:

$$C_c \gg C_f$$

il grafico che dovremo considerare sarà il seguente:



Come si vede, in questo caso si avrà:

$$\begin{cases} \Delta T_s = K \\ \Delta T_0 = 0 \end{cases}$$

e quindi, in questo caso, dalla relazione (6) si ricava:

$$C_c (T_{ci} - T_{fi} - \Delta T_s) = C_f (T_{ci} - T_{fi})$$

Dunque il calore che il fluido caldo è in grado di cedere al fluido freddo viene diminuito dal termine ΔT_s . Definiamo ora il calore massimo che uno scambiatore di calore controcorrente di lunghezza infinita può scambiare:

$$\dot{Q}_\infty = C_{\min} (T_{ci} - T_{fi})$$

dove C_{\min} è il minore tra C_c e C_f . Usiamo questo limite teorico come termine di paragone e quindi definiamo l'efficienza di uno scambiatore controcorrente come segue:

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}_{reale}}{\dot{Q}_{\infty}}$$

dove, come si è visto:

$$\dot{Q}_{reale} = K_S \frac{\Delta T_s - \Delta T_0}{\ln \frac{\Delta T_s}{\Delta T_0}} = K_S \frac{\Delta T_0 - \Delta T_s}{\ln \frac{\Delta T_0}{\Delta T_s}} \quad (8)$$

Se fosse:

$$C_c = C_f$$

con

$$\Delta T_0 = \Delta T_s$$

la relazione (8) andrebbe affrontata al limite e si avrebbe:

$$\Delta T_{m \ln} = \Delta T_0 = \Delta T_s$$

Senza vedere la dimostrazione abbiamo, invece, che l'efficienza dello scambiatore di calore equicorrente sarà:

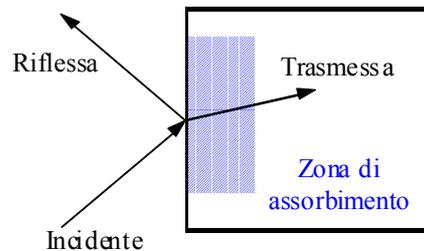
$$\varepsilon = \frac{\Delta T_{\max}}{\Delta T_0}$$

dove al numeratore abbiamo il massimo ΔT che tale scambiatore riesce a creare. Fino ad ora abbiamo sempre parlato di geometrie piane che caratterizzano gli scambiatori; geometrie differenti influenzano la relazione (8) dal punto di vista delle superfici S di contatto e dal punto di vista del K .

Passiamo ora all'ultima forma di scambio di calore: l'irraggiamento. Ogni superficie ad una temperatura superiore agli 0 K emette una radiazione e quindi possiamo parlare di onde elettromagnetiche. Il parametro caratteristico di un'onda elettromagnetica è la lunghezza d'onda λ . Dalla fisica si dimostra che, quando un'onda impatta con la materia che non contiene discontinuità dell'ordine della lunghezza d'onda (in caso contrario si avrebbe scattering) la radiazione può attraversare il sistema (che si dice allora trasparente). Una certa frazione dell'energia E associata all'onda incidente viene trasmessa (τE), una parte viene assorbita (αE) e una parte viene riflessa (ρE). Varrà dunque la seguente relazione:

$$E = \tau E + \alpha E + \rho E$$

Se la radiazione si comporta come la radiazione ottica possiamo considerare la seguente rappresentazione grafica:



Si ricordi che c'è un cambiamento di direzione ogni volta che si incontra una superficie di discontinuità; semplificando l'ultima relazione scritta si ottiene:

$$1 = \tau + \alpha + \rho$$

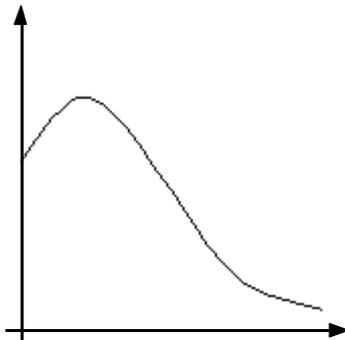
Ovviamente τ , α e ρ non sono costanti ma dipendono dal tipo di materiale e dal tipo di radiazione (oltre che da altri parametri minori). Considerando una lastra di vetro avremo che, in presenza di radiazione visibile, si ha τ quasi uguale ad 1 e quindi α e ρ devono per forza essere piccoli. Passando però, nel caso della radiazione termica, per il vetro τ è praticamente nullo e quindi l'ultima relazione scritta può essere approssimata nel modo seguente:

$$1 = \alpha + \rho$$

Siccome τ , α e ρ dipendono dal tipo di radiazione (e quindi dalla lunghezza dell'onda) vengono dette grandezze (o proprietà) spettrali. E' infine opportuno ricordare che τ , α e ρ dipendono anche dalla direzione, ovvero da una grandezza detta angolo solido (ω).

L'irraggiamento.

Come abbiamo accennato nella lezione precedente le radiazioni elettromagnetiche vengono classificate in funzione della loro lunghezza d'onda; parliamo dunque di ultravioletto, radiazione visibile o infrarosso a seconda della lunghezza d'onda della radiazione. Nel grafico seguente vediamo l'andamento della potenza emessa in funzione della lunghezza d'onda.



Agli inizi del '900 questi grafici non erano ancora stati compresi e si credevano invece validi i grafici derivati dal modello di Rayleigh e Jeans che, per lunghezza d'onda che tendeva a zero, ipotizzavano la catastrofe ultravioletta. I grafici coerenti con la realtà furono compilati solo dopo il lavoro di Planck sulla quantizzazione. Una cosa importante da osservare è che le curve hanno un massimo che si sposta verso l'origine all'aumentare della temperatura; il luogo di tali punti è un'iperbole descritta dalla seguente legge di Wien:

$$\lambda_{\max} T = \text{const}$$

con:

$$\text{const} \cong 2,898 \mu\text{mK}$$

La teoria di Max Planck alla quale si è accennato si basa su un modello che prevede un oggetto che emette in maniera indipendente dalle proprietà specifiche del materiale che lo costituisce, tale oggetto prende il nome di corpo nero ed è capace di assorbire radiazione indipendentemente dalla lunghezza d'onda, dalla direzione e dal materiale. La legge di Planck è la seguente:

$$q_{\lambda cn} = \frac{C_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1}$$

nella quale vediamo apparire due costanti che prendono il nome di costanti di Planck. L'espressione appena data è quella dell'emissività e le sue unità di misura sono le seguenti:

$$[q_{\lambda}] = \frac{W}{m^2(\mu\text{m})}$$

Per ottenere la potenza emessa complessivamente dobbiamo integrare tra 0 e ∞ l'emissività ottenendo:

$$q_{cn} = \int_0^{\infty} q_{\lambda} d\lambda = \sigma_0 T^4$$

Quest'ultima relazione prende il nome di legge di Stefan-Boltzmann e si ha:

$$\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

La q prende anche il nome di potere emissivo totale che si ottiene, come abbiamo visto, integrando il potere emissivo monocromatico. Un sistema termodinamico in equilibrio all'interno di una cavità, se il sistema e la cavità sono entrambi neri, emettono entrambi. Ciò che emette il sistema è assorbito dalla cavità e viceversa (supponiamo ovviamente che le due temperature siano uguali). Se un sistema è in equilibrio allora significa che un corpo nero è in grado di emettere tutto ciò che assorbe; in condizioni di equilibrio termodinamico, dunque:

$$e = a$$

dove e sia il coefficiente di emissione ed a sia il coefficiente di assorbimento. Quest'ultima relazione prende il nome di legge di Kirchhoff e vale solo in condizioni di equilibrio. Passiamo ora dal corpo nero, che è un modello, ad una situazione più vicina ai sistemi reali: il corpo grigio. Il corpo grigio si comporta come il corpo nero ma assorbe ed emette meno energia rispetto al corpo nero.

Ricordiamo ora quanto accennato nella lezione precedente a proposito di assorbimento, riflessione e trasmissione; possiamo dunque affermare che, se la radiazione trasmessa è nulla, ovvero se si ha:

$$\tau = 0$$

allora valeva la relazione:

$$\alpha + \rho = 1$$

Combinando questa espressione con la legge di Kirchoff (dove si consideri, per unicità di notazione che a ed α coincidano), si avrà:

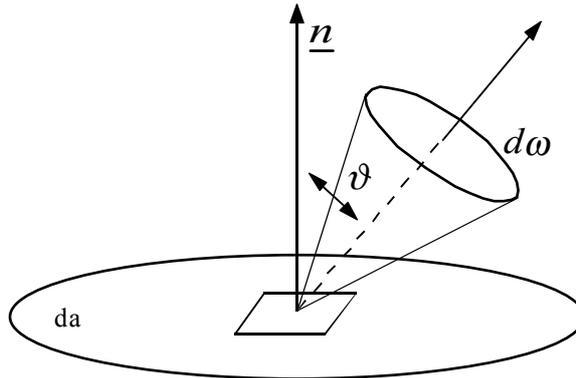
$$\alpha = e = 1 - \rho$$

Dal punto di vista simbolico, dunque, un corpo nero si esprime dicendo che:

$$\alpha = 1$$

e quindi si ha assorbimento perfetto per ogni lunghezza d'onda, temperatura e direzione. Dal punto di vista della radiazione termica i gas sono praticamente sempre trasparenti tranne nel caso della CO_2 e del vapor d'acqua che possono assorbire ed emettere radiazione termica.

L'immagine seguente riguarda l'emissione in relazione alla direzione.



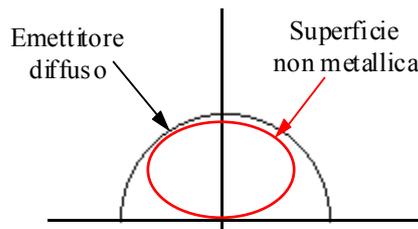
Nell'immagine vediamo un angolo solido $d\omega$ inclinato di un angolo θ rispetto alla normale. Definiamo allora come segue l'intensità monocromatica:

$$\frac{dq_\lambda}{d\omega} \cdot \frac{1}{\cos \vartheta} = I_\lambda$$

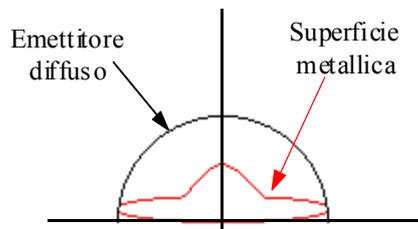
mentre l'intensità integrale sarà:

$$\frac{dq}{d\omega} \cdot \frac{1}{\cos \vartheta} = I$$

Se tali due intensità non dipendono dall'angolo θ si parla di emettitore diffuso o emettitore Lambertiano; le superfici non metalliche hanno il seguente andamento rispetto a θ dell'intensità:

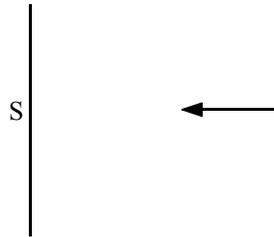


Per quanto riguarda, invece, le superfici metalliche, si avrà:



Per quanto riguarda l'emissione dei corpi reali osserviamo che i corpi solidi e liquidi si ritengono, in generale, emettitori diffusi, opachi e grigi; tra i corpi solidi fanno eccezione il vetro e i cristalli semiconduttori. Alcune sostanze come il

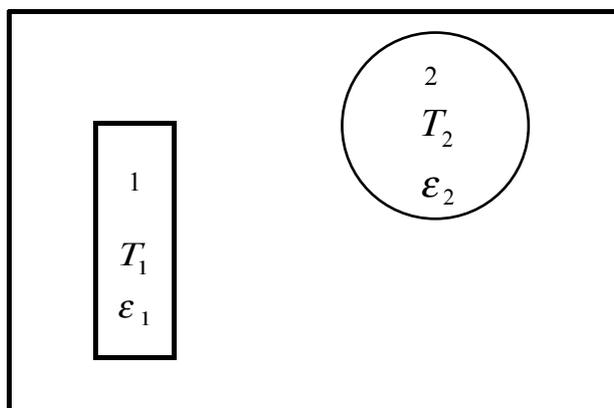
Germanio (Ge), l'antimoniuro di indio (InSb) e il Cadmio telluro di Mercurio (CdHgTe) vengono usate per costruire lenti che selezionano alcune bande di infrarosso (soprattutto se questi materiali vengono raffreddati fino a circa 70 K). Ci occupiamo, infine, della radiazione vista da un sensore (si introduce a questo proposito il termine radiosità). Ovviamente l'energia totale sarà pari alla somma dell'energia emessa e dell'energia riflessa. Nella situazione seguente, quindi:



si avrà:

$$q = e\sigma_o T^4 + (1 - e)\sigma_0 T_{amb}^4$$

Supponiamo, invece, di avere un sistema come quello rappresentato in figura:



In questo caso si avrebbe:

$$q_{1 \rightarrow 2} = \epsilon_1 \sigma_0 T_1^4 F_{12}$$

dove F rappresenta il fattore di forma (o di vista) ed esprime la parte di energia che dal sistema 1 va al sistema 2 a causa del posizionamento spaziale. Si avrà:

$$q_2 = a_2 q_{1 \rightarrow 2} = e_2 q_{1 \rightarrow 2}$$

poiché si ricorda che, nel caso di corpo grigio, il coefficiente di assorbimento e il coefficiente di emissione sono uguali. Si ha inoltre:

$$q_{2riflesso} = (1 - e_2) \epsilon_1 \sigma_0 T_1^4 F_{12}$$

Ciò che arriva ad 1 da 2 dipende da ciò che 2 emette e da ciò che 2 riflette di quello che gli era arrivato da 1. Le cose dunque si complicano e vengono riassunte dai fattori di forma, che vediamo tabulati in tabelle. Se i sistemi sono diversi il flusso netto di calore scambiato sarà:

$$q_{12} = q_{1 \rightarrow 2} - q_{2 \rightarrow 1}$$

In equilibrio si avrà, ovviamente:

$$q_{12} = 0$$

L'equazione generale che bisogna considerare è la seguente:

$$q_{12} = \frac{q_{1cn} - q_{2cn}}{(1 - e_1) \frac{1}{e_1 s_1} + \frac{1}{s_1 F_{12}} + (1 - e_2) \frac{1}{e_2 s_2}}$$

Nel caso particolare di due superfici piane che abbiano la medesima superficie si avrà:

$$F_{12} = 1$$

e quindi l'equazione generale diventa:

$$q_{12} = \frac{q_{1cn} - q_{2cn}}{\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - 1}$$

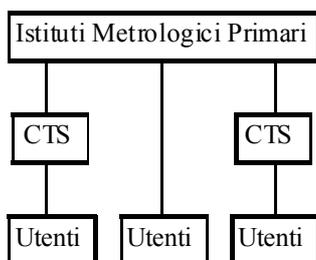
Tra due superfici nere affacciate si ha invece:

$$q_{12} = \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4)$$

Seminario:
“Taratura di strumenti radioprotezionistici”

Dott. Caresana
21 Aprile 1999

L'importanza di un centro di taratura per strumenti di tipo radioprotezionistico si comprende facilmente pensando all'importanza della valutazione dei rischi che una persona corre quando si trova immersa in un campo di radiazioni ionizzanti. L'unità di misura che quantifica il danno si ottiene definendo l'esposizione, ovvero la carica prodotta dalla ionizzazione per unità di massa (si misurerà quindi in Q/m). Per liberare un elettrone dall'aria servono 33,97 eV e questo valore, combinato con l'esposizione, mi permette di ricavare l'energia prodotta dalla radiazione. Per vedere dunque, quanto è forte una radiazione, è necessario misurare una carica ed una massa. Lo scopo dei laboratori come quello che si trova presso il dipartimento di Ingegneria Nucleare del Politecnico di Milano è quello di mantenere la riferibilità delle misure; questo scopo, in Italia, è l'obiettivo degli istituti metrologici che si relazionano con l'utenza direttamente oppure indirettamente tramite centri di taratura secondari; tutta questa struttura prende complessivamente il nome di Sistema nazionale di taratura. Nel diagramma seguente viene riassunta la struttura principale di tale sistema:



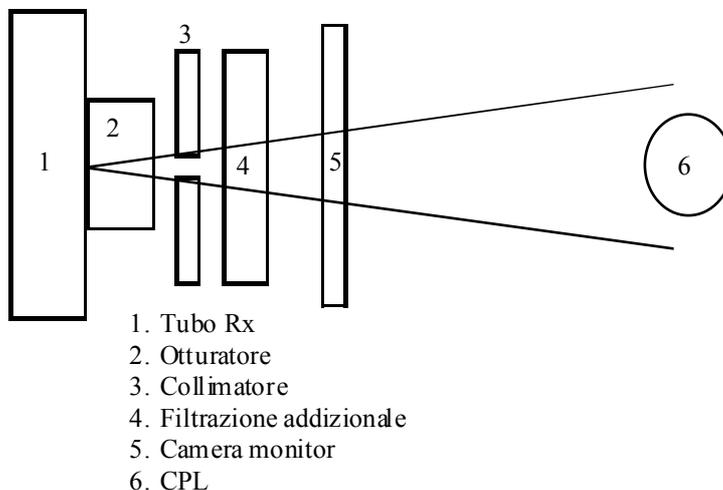
La conformazione di tale struttura è data dalla legge 273/91. Lo scopo del S.N.T. consiste nel disseminare i campioni delle varie grandezze fisiche sul territorio nazionale attraverso una catena ininterrotta di tarature in modo da mantenere la riferibilità di ogni taratura al campione primario. A livello internazionale la riferibilità della misura viene assicurata da intercalibrazioni tra istituti metrologici primari.

Il centro di taratura per radiazioni ionizzanti presso il dipartimento di Ingegneria Nucleare è dunque inserito in questa struttura. Nella prima immagine della pagina seguente vediamo una piantina del centro.

Le finalità principali del centro sono:

- 1) la produzione di fasci di radiazione X di media energia (60-300kV) a norma ISO 4037;
- 2) la produzione di fasci di radiazione da Co_{60} , Cs_{137} e Am_{241} a norma ISO 4037.

Nell'immagine seguente vediamo uno schema relativo alla taratura della camera monitor:



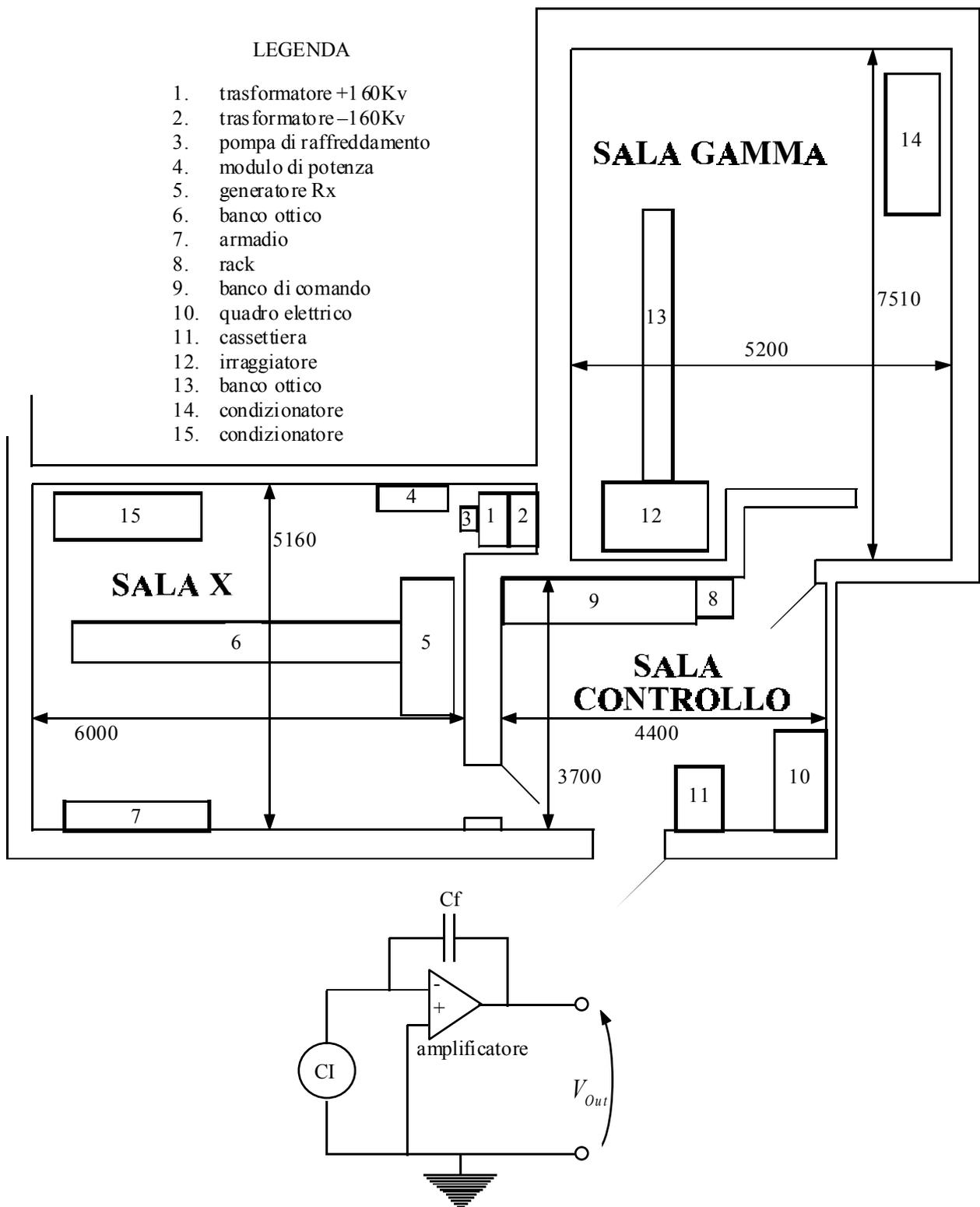
La camera monitor non è altro che una camera a ionizzazione nella quale viene misurata l'esposizione; tipicamente vengono misurate correnti nell'ordine dei pico-ampere. Con la sigla CPL si intende invece il campione di prima linea che garantisce la riferibilità della misura. La taratura della camera monitor permette di andare in seguito a definire il fattore di taratura che è il rapporto tra il valore vero e il valore letto.

Il sistema di misura della carica avviene invece tramite uno strumento schematizzato nella seconda immagine della pagina seguente. La carica si ottiene allora applicando la seguente relazione:

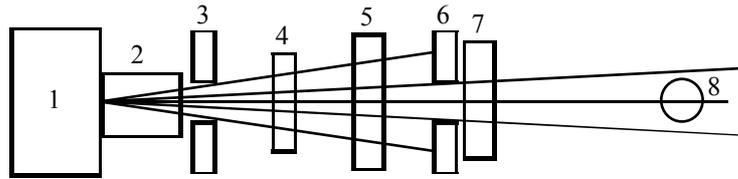
$$Q = C_f V_{Out}$$

dove vediamo apparire la grandezza detta capacità di feedback.

Prima di vedere le principali definizioni che interessano in questo seminario vediamo un ultimo schema relativo alla caratterizzazione dei fasci a norma ISO 4037 che appare nella seconda immagine della pagina seguente.



- Possiamo ora dunque vedere le principali definizioni relative all'incertezza di una taratura; possiamo dunque parlare di:
- incertezza tipo, che è l'incertezza del risultato di una misurazione espressa come scarto tipo;
 - valutazione dell'incertezza di categoria A: si tratta di un metodo di valutazione dell'incertezza che sfrutta l'analisi statistica di serie di osservazioni;
 - valutazione dell'incertezza di categoria B: è un metodo di valutazione dell'incertezza che sfrutta metodi diversi dall'analisi statistica di serie di osservazioni;
 - incertezza tipo composta: si tratta dell'incertezza del risultato di una misurazione allorché il risultato sia ottenuto mediante i valori di un certo numero di altre grandezze; essa è uguale alla radice quadrata positiva di una somma di termini, che sono le varianze e le covarianze di quelle grandezze, pesate secondo la variazione del risultato della misurazione al variare di esse;



1. Tubo Rx
2. Otturatore
3. Primo collimatore
4. Filtrazione addizionale
5. Camera monitor
6. Secondo collimatore
7. Filtri per misura del HVL
8. Camera a ionizzazione

- incertezza estesa: è una grandezza che definisce, intorno al risultato di una misurazione, un intervallo che ci si aspetta comprendere una frazione rilevante della distribuzione di valori ragionevolmente attribuibili al misurando;
- fattore di copertura: si tratta di un fattore numerico utilizzato come moltiplicatore dell'incertezza tipo composta per ottenere un'incertezza esatta.

Concentriamoci sull'incertezza tipo e, in particolare, andiamo a considerarne la valutazione; come prima cosa dobbiamo considerare il modello di misurazione, ciò significa che il misurando Y viene determinato attraverso la misura di altre n grandezze attraverso una relazione funzionale f ; si avrà quindi:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Sulla base del modello della misurazione si ricava la stima del misurando utilizzando stime delle grandezze di ingresso; le stime del misurando verranno fatte sulla media di Y :

$$y = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m y_k = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk})$$

Le incertezze di misura associate alle grandezze di ingresso prendono il nome di incertezze tipo. L'incertezza di misura associata al misurando prende il nome di incertezza tipo composta.

Vediamo ora la valutazione di categoria A dell'incertezza tipo. Il valore medio di una variabile casuale viene stimato effettuando n misure della variabile stessa:

$$q = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m q_k$$

Le singole variazioni di q_k differiscono a causa di variazioni casuali delle grandezze di influenza. La varianza sperimentale delle osservazioni, che stima la varianza delle distribuzioni di probabilità di q , è data da:

$$s^2(q_k) = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (q_k - \bar{q})^2$$

$s(q_k)$ rappresenta lo scarto tipo sperimentale che caratterizza la dispersione dei valori q_k attorno al loro valore medio.

$$s^2(\bar{q}) = \frac{s^2(q_k)}{m}$$

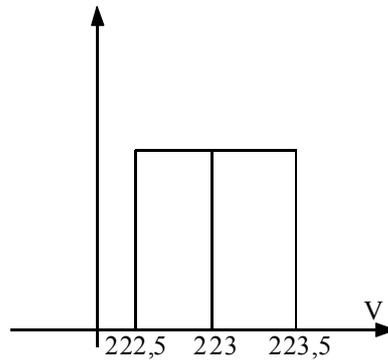
rappresenta la varianza sperimentale della media. La radice quadrata positiva rappresenta lo scarto tipo sperimentale della media.

Per quanto riguarda, invece, la valutazione di categoria B dell'incertezza tipo, si è già accennato al fatto che tali valutazioni derivano da un giudizio scientifico basato su tutte le informazioni disponibili sulla variabilità delle variabili casuali:

- dati di misure precedenti,
- conoscenze ed esperienze documentate del laboratorio,
- specifiche tecniche della strumentazione,
- certificati di taratura,
- dati di letteratura.

L'uso dell'insieme delle informazioni disponibili per tale valutazione richiede capacità sperimentali acquisibili esclusivamente attraverso l'esperienza. La corretta valutazione delle incertezze di categoria B è particolarmente importante nel caso in cui la valutazione di categoria A si basa su un ridotto numero di osservazioni. La valutazione delle incertezze di categoria B si basa sulla corretta valutazione della distribuzione di probabilità dei valori che possono essere assunti dalla variabile casuale; Tanto per fare un esempio possiamo pensare di misurare con un voltmetro una

tensione di 223 V: la scelta della distribuzione sarà arbitraria e poniamo che si scelga, in base alle osservazioni fatte, una distribuzione che ha il seguente andamento:



L'incertezza può allora essere definita come la semiampiezza dell'intervallo moltiplicata per la radice quadrata di 3. La determinazione dell'incertezza tipo composta si basa sulla correlazione delle grandezze di ingresso:

$$s(x_i, y_i) = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

dove $s(x_i, y_i)$ rappresenta la stima della covarianza. Se:

$$s(x_i, y_i) = 0$$

le variabili non sono correlate. Bisogna sottolineare che, di solito, la correlazione non esiste o è comunque debolissima. L'incertezza tipo composta è allora la seguente:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} s(x_i, x_j)$$

L'incertezza tipo è composta quindi da due addendi: il primo, sempre positivo, tiene conto degli elementi di non correlazione mentre il secondo tiene conto degli elementi di correlazione.

Ci occupiamo ora dell'incertezza associata alla lettura di uno strumento di taratura. Si avrà:

$$M_c = (M - M_f) \cdot K_p \cdot K_T \cdot K_H \cdot K_d \cdot K_R \cdot K_S \cdot K_{np} \cdot K_{Tmis}$$

dove sia:

M	La lettura
M_f	La lettura di fondo
K	I termini correttivi

Componendo secondo la legge di propagazione delle incertezze si ottiene la stima dell'incertezza tipo composta $u_c(M_c)$ effettuata su valutazioni di categoria B:

$$u_c(M_c) = M_c \sqrt{\left(\frac{u_c(M)}{M - M_f} \right)^2 + \left(\frac{u_c(M_f)}{M - M_f} \right)^2 + \left(\frac{u_c(K_p)}{K_p} \right)^2 + \left(\frac{u_c(K_T)}{K_T} \right)^2 + \left(\frac{u_c(K_H)}{K_H} \right)^2 + \left(\frac{u_c(K_d)}{K_d} \right)^2 + \left(\frac{u_c(K_R)}{K_R} \right)^2 + \left(\frac{u_c(K_S)}{K_S} \right)^2 + \left(\frac{u_c(K_{np})}{K_{np}} \right)^2 + \left(\frac{u_c(K_{Tmis})}{K_{Tmis}} \right)^2}$$

Nel caso in cui lo strumento da tarare sia dotato di un'indicazione analogica o digitale, la stima delle incertezze tipo composte $u_c(M)$ e $u_c(M_f)$ viene effettuata considerando altre quattro componenti di incertezza associate a grandezze di ingresso per cui non si può definire una dipendenza funzionale con il misurando, esse sono:

- $u(\text{scala})$: è una stima dell'incertezza tipo associata alla risoluzione della scala. E' basata sull'assunzione di una distribuzione di probabilità rettangolare la cui ampiezza è generalmente uguale all'unità di formato. Salvo diversa indicazione desunta dal manuale dello strumento;
- $u(\text{isteresi})$: è una stima dell'incertezza tipo associata all'isteresi dello strumento. E' basata sull'assunzione di una distribuzione di probabilità rettangolare la cui ampiezza può essere valutata da misure in successione prima crescente e poi decrescente;

- u(linearità): è una stima dell'incertezza tipo associata alla linearità della scala. E' basata sull'assunzione di una distribuzione di probabilità rettangolare la cui ampiezza può essere valutata in base a deviazioni da una risposta idealmente lineare;
- u(parallasse): è una stima dell'incertezza tipo associata alla parallasse di lettura. Si applica solo su strumenti a lettura analogica. E' basata sull'assunzione di una distribuzione di probabilità rettangolare la cui ampiezza può essere valutata in base ad osservazioni dell'indice da diversi angoli. Può essere omessa nel caso di strumenti con la scala dotata di specchio.

L'incertezza tipo composta $u_c(M)$ è data dalla relazione precedentemente vista, analogamente vale per $u_c(M_f)$ con l'ovvia modifica della notazione:

$$u_c(M) = \sqrt{u^2(\text{scala}) + u^2(\text{linearità}) + u^2(\text{isteresi}) + u^2(\text{parallasse})}$$

L'incertezza tipo composta è relativa ad una stima effettuata in base a considerazioni di categoria B; la valutazione delle incertezze di categoria A si ottiene effettuando un numero di misurazioni M_c non inferiore a 10 e determinando il relativo scarto tipo. Si definisce quindi un'incertezza tipo composta

$$u_c(\overline{M}_c)$$

associata a

$$\overline{M}_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_c^i$$

Vediamo ora di applicare quanto detto genericamente fino ad ora al caso specifico del laboratorio radiazioni ionizzanti. Valutiamo dunque l'incertezza associata alla misura del Kerma in aria con il campione di prima linea del laboratorio. La misura viene effettuata secondo l'espressione seguente:

$$K_a = (Q_c - Q_f) \cdot N_k \cdot K_p \cdot K_T \cdot K_H \cdot K_d \cdot K_R \cdot K_S \cdot K_{np} \cdot K_{Tmis}$$

dove sarà:

Q_c	L'indicazione, in termini di carica integrata sulla camera a ionizzazione
Q_f	La carica di fondo integrata sulla camera a ionizzazione
N_k	Il fattore di taratura della camera a ionizzazione
K_p	Il fattore di correzione relativo alla differenza tra il valore della pressione durante le misure e quello di riferimento
K_T	Il fattore di correzione relativo alla differenza tra il valore della temperatura durante le misure e quello di riferimento
K_H	Il fattore di correzione relativo alla differenza tra il valore di umidità relativa durante le misure e quello di riferimento
K_d	È un fattore unitario che non influisce sul calcolo di K_a . Viene introdotto per tener conto, nel calcolo delle incertezze, dell'incertezza tipo associata alla disuniformità radiale del campo di radiazione
K_R	È un fattore unitario che non influisce sul calcolo di K_a . Viene introdotto per tener conto, nel calcolo delle incertezze, dell'incertezza tipo associata al posizionamento
K_S	È il fattore di correzione per le perdite dovute alla ricombinazione ionica
K_{np}	È il fattore di correzione per le dimensioni finite del rivelatore
K_{Tmis}	È un fattore unitario che non influisce sul calcolo di K_a . Viene introdotto per tener conto, nel calcolo delle incertezze, dell'incertezza tipo associata al tempo di irraggiamento

Si avrà allora:

$$u_c(K_a) = K_a \sqrt{\left(\frac{u_c(Q_c)}{Q_c - Q_f}\right)^2 + \left(\frac{u_c(Q_f)}{Q_c - Q_f}\right)^2 + \left(\frac{u(N_k)}{N_k}\right)^2 + \left(\frac{u_c(K_p)}{K_p}\right)^2 + \left(\frac{u_c(K_T)}{K_T}\right)^2 + \left(\frac{u(K_H)}{K_H}\right)^2 + \left(\frac{u(K_d)}{K_d}\right)^2 + \left(\frac{u(K_R)}{K_R}\right)^2 + \left(\frac{u(K_S)}{K_S}\right)^2 + \left(\frac{u(K_{np})}{K_{np}}\right)^2 + \left(\frac{u(K_{Tmis})}{K_{Tmis}}\right)^2}$$

L'incertezza tipo composta è relativa ad una stima effettuata in base a considerazioni di categoria B; la valutazione dell'incertezza di categoria A si ottiene effettuando un numero di misurazioni di K_a non inferiore a 10 e determinando il relativo scarto tipo. Si definisce quindi un'incertezza composta

$$u_c(\bar{K}_a)$$

associata a:

$$\bar{K}_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_a^i$$

che è data dalla radice quadrata positiva della somma in quadratura dell'incertezza di categoria A e della maggiore tra le incertezze di categoria B calcolate per ogni singola misura.