

## Indice delle esercitazioni

(Ing. Vercesi)

Esercitazione numero 1	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Il sistema internazionale S.I.</li> <li>• Esperienza di Joule.</li> </ul>	3 Marzo 1999
Esercitazione numero 2	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Massa molare, volume molare, numero di moli e frazione molare.</li> <li>• Convenzioni.</li> </ul>	10 Marzo 1999
Esercitazione numero 3	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Equazioni sperimentali per i gas reali.</li> <li>• Calori specifici esatti.</li> </ul>	19 Marzo 1999
Esercitazione numero 4	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Trasformazioni con i gas ideali.</li> </ul>	24 Marzo 1999
Esercitazione numero 5	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Trasformazioni per i sistemi chiusi.</li> <li>• Calori specifici.</li> <li>• Teorema di Bernoulli.</li> <li>• Il coefficiente di Joule-Thompson.</li> </ul>	31 Marzo 1999
Esercitazione numero 6	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La potenza.</li> <li>• Il lavoro utile e il lavoro di pulsione.</li> <li>• Cicli termodinamici.</li> <li>• Il rendimento.</li> <li>• La velocità del suono.</li> <li>• Motori per uso aerodinamico.</li> </ul>	14 Aprile 1999
Esercitazione numero 7	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Velocità del suono.</li> <li>• Transizioni di fase.</li> </ul>	28 Aprile 1999
Esercitazione numero 8	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Transizioni di fase.</li> <li>• Efflussi negli ugelli.</li> </ul>	5 Maggio 1999
Esercitazione numero 9	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Rendimenti.</li> <li>• Cicli.</li> </ul>	12 Maggio 1999
Esercitazione numero 10	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Trasmissione del calore.</li> <li>• La geometria piana e cilindrica.</li> <li>• Ciclo frigorifero combinato.</li> </ul>	19 Maggio 1999
Esercitazione numero 11	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Trasmissione del calore.</li> <li>• Condizionamento.</li> <li>• Scambiatori di calore.</li> </ul>	26 Maggio 1999
Esercitazione numero 12	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Scambiatori di calore.</li> <li>• Raggio critico di isolamento.</li> <li>• Alette.</li> </ul>	2 Giugno 1999

### Il sistema internazionale S.I. Esperienza di Joule.

Iniziamo subito con il dire che un sistema coerente di unità di misura è composto da campioni e che una misura, fondamentale o derivata, è definibile tramite confronto con tali campioni. Nel corso di Fisica Tecnica si utilizzeranno esclusivamente le grandezze espresse nel sistema internazionale (S.I.). Vediamo dunque quali sono le grandezze fondamentali necessarie in questo corso e come la norma del Sistema Internazionale ne codifica la rappresentazione:

- Lunghezza. Nel S.I., così come anche nel Sistema Tecnico (S.T.) l'unità di misura della lunghezza, che è una grandezza fondamentale, è il metro (m).
- Tempo. Nel S.I., così come nel S.T., l'unità di misura del tempo, anch'essa grandezza fondamentale, è il secondo (s).
- Massa. Nel S.I. l'unità di misura scelta per la massa, grandezza fondamentale, è il chilogrammo (kg). Nel S.T. la massa non è una grandezza fondamentale ma una grandezza derivata (in particolare la grandezza fondamentale di partenza è il chilogrammo-forza) e si usa, come unità di misura l'UMT (unità di massa tecnica). Ovviamente il S.I. propone la visione più giusta poiché la massa è una proprietà fondamentale della materia mentre la forza peso dipende dal sistema di forze nel quale l'oggetto è immerso.
- Forza. Nel S.I. la forza non è una grandezza fondamentale ma una grandezza derivata dalle grandezze fondamentali massa, lunghezza e tempo secondo la ben nota relazione:

$$F = m \frac{d^2 l}{dt^2}$$

L'unità di misura scelta dal S.I. per rappresentare la forza è il newton (N) che, ovviamente, risulta così definito:

$$N = kg \frac{m}{s^2}$$

Nel S.T. la forza, invece, è una grandezza fondamentale e l'unità di misura ad essa assegnata è il chilogrammo-forza (kgf).

- Energia. Nel S.I. l'unità di misura scelta per l'energia è il joule (J)
- Potenza. Nel S.I. l'unità di misura scelta per la potenza è il watt. Siccome la potenza è una grandezza derivata che può essere definita tramite la relazione:

$$P = \frac{E}{t}$$

appare ovvio che il Watt viene definito tramite la relazione:

$$W = \frac{J}{s}$$

- Massa volumica. La massa volumica è quello che fino a pochi anni fa era chiamata densità; nel S.T. questa grandezza non si usa mentre nel S.I. la sua unità di misura viene definita come segue:

$$\rho = \frac{kg}{m^3}$$

- Peso specifico. Il peso specifico è una grandezza che nel S.I. non si usa ma che viene usata nel S.T. nel quale ha una unità di misura definita come segue:

$$\pi = \frac{kgf}{m^3}$$

- Pressione. Nel S.I. la pressione è una grandezza derivata definita tramite la seguente relazione:

$$p = \frac{F}{A}$$

dove A è una superficie. Appare allora evidente che l'unità di misura della pressione nel S.I., il pascal (Pa), sarà definito nel modo seguente:

$$Pa = \frac{N}{m^2}$$

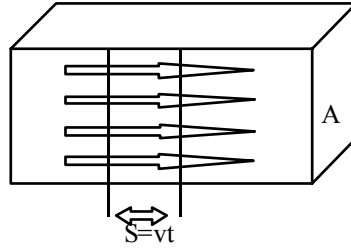
Nel S.T., invece, l'unità di misura della pressione sarà definito in questo modo:

$$[p] = \frac{kgf}{m^2}$$

- Portata. Questa grandezza è anche detta flusso di massa. Per capire di che cosa stiamo parlando possiamo riferirci alla figura della pagina seguente, definendo la massa volumica con il simbolo  $\rho$  possiamo allora esprimere la portata tramite la seguente relazione:

$$\bar{m} = \frac{m}{t} = \frac{\rho V}{t} = \frac{\rho AS}{t} = \rho Av$$

e quindi l'unità di misura della portata sarà espressa nel modo seguente:



$$\bar{m} = \frac{kg}{m^3} m^2 \frac{m}{s} = \frac{kg}{s}$$

- Conduttività termica. Accenniamo ora solo brevemente a questa grandezza che esamineremo solo più avanti. La conduttività termica è la grandezza K che appare nella seguente relazione:

$$\vec{Q} = -KS\vec{\nabla}T$$

dove vediamo apparire un gradiente della temperatura. Da tale relazione è ovvio che la definizione della conduttività termica potrà essere la seguente:

$$K = \frac{\vec{Q}}{S\vec{\nabla}T}$$

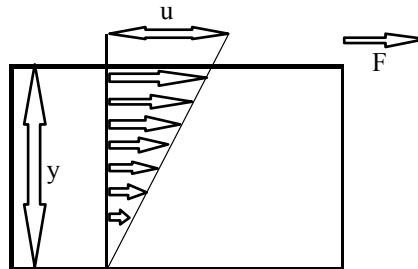
e quindi l'unità di misura legata a tale grandezza sarà la seguente:

$$\frac{W/m^2}{K/m} = \frac{W}{mK}$$

- Viscosità Dinamica. L'equazione relativa alla viscosità dinamica è la seguente:

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{u}{y} = \mu \frac{du}{dy}$$

dove u è la velocità ed y la distanza tra gli strati di fluido. In tale relazione, che comprendiamo meglio considerando la figura seguente



e che vale soltanto per campi di velocità limitato, vediamo apparire il coefficiente di viscosità dinamica  $\mu$  che è la forza per unità di superficie necessaria per mantenere una differenza unitaria di velocità tra due strati paralleli di fluido posti a distanza unitaria. Se siamo in un campo di moto laminare,  $\mu$  non dipende dalla velocità (dipenderà soltanto dalla temperatura) e il fluido in questione si dice newtoniano. Dalla definizione di  $\mu$  e dalla relazione precedente possiamo ricavare la seguente relazione:

$$\mu = \mu(T) = \frac{F/A}{du/dy}$$

Sfruttando questa relazione si può trovare l'unità di misura della viscosità dinamica nel S.I.

$$\frac{N}{m^2} \cdot \frac{s}{m} \cdot m = \frac{Ns}{m^2} = \frac{kg}{ms} = Pas$$

Vediamo ora alcuni esempi di conversione tra le unità di misura appartenenti al S.I. e altre unità di misura spesso utilizzate anche se non approvate dall'S.I. Iniziamo con alcune unità di misura riguardanti l'energia.

- Una unità di misura molto utilizzata per l'energia è la caloria (cal); spesso viene utilizzato, soprattutto il suo multiplo Kcal. Il fattore di conversione con le unità S.I. è il seguente:

$$1cal = 10^{-3} Kcal = 4,186J$$

- Una seconda unità di cui si fa molto uso nei discorsi energetici è il chilowatt per ora (kWh) la cui relazione di conversione con le unità S.I. è la seguente:

$$1kWh = 10^3 W \cdot 3600s = 3,6 \cdot 10^6 J = 3,6 \cdot 10^3 kJ = 3,6MJ$$

Sfruttiamo questo esempio per osservare che la norma del S.I. impone di passare a multipli e sottomultipli caratterizzati da potenze di 10 che variano di 3 in 3.

- L'unità inglese riservata al calore è la British thermic unit (Btu) la cui relazione di conversione con le unità S.I. è la seguente:

$$1Btu = 1054,5J$$

- A livello internazionale, prevalentemente per scopi economici, viene anche utilizzata la tonnellata equivalente di petrolio (tep) che misura la quantità di calore prodotta da una tonnellata di petrolio. La sua relazione di conversione con le unità S.I. è la seguente:

$$1tep = 10Gcal = 41,86GJ$$

- Prima di vedere la prossima unità energetica esprimiamo la relazione di conversione tra l'unità della forza nel S.T. e la sua corrispondente nel S.I.:

$$1kgf = 9,806N$$

- Possiamo a questo punto analizzare una unità di misura ancora utilizzata sostanzialmente per motivi storici: il cavallo vapore (CV) la cui relazione di conversione in unità del S.I. è la seguente:

$$1CV = 75kgf \cdot \frac{m}{s} = 9,81 \frac{J}{kgfm} = 735W$$

- Il corrispettivo inglese dei cavalli vapore è l'horse power. Questo è leggermente diverso dai CV e la sua relazione di conversione in unità del S.I. è la seguente:

$$1hp = 550poundf \cdot \frac{ft}{s} = 746W$$

Vediamo ora alcune unità di misura riguardanti la pressione.

- Spessissimo, a causa delle dimensioni molto piccole del pascal, la pressione viene misurata in bar, la cui relazione di conversione con le unità S.I. è la seguente:

$$1bar = 10^5 Pa$$

- Un'altra unità di misura usata storicamente per la pressione è il torricelli la cui relazione di conversione con le unità del S.I. è la seguente:

$$1torr = 153,32Pa$$

- Spesso sui manometri la pressione viene indicata anche in termini inglesi e quindi in pound square inch (psi). La relazione di conversione con le unità del S.I. sarà quindi:

$$1psi = \frac{4,458N}{6,452 \cdot 10^{-4} m^2} = 0,6894 \cdot 10^4 Pa$$

Vediamo ora alcune relazioni di conversione relative alla temperatura (che nel S.I. si misura in kelvin).

- La scala delle temperature maggiormente utilizzata quotidianamente è la scala Celsius (o scala centigrada) che differisce dalla scala kelvin per una traslazione dell'origine. La relazione di conversione tra queste due scale sarà dunque la seguente:

$$t(^{\circ}C) = T(K) - 273,15$$

- Esiste ovviamente anche una scala di temperatura utilizzata nei paesi anglofoni detta scala Fahrenheit la cui relazione di conversione con la scala centigrada è la seguente:

$$t(^{\circ}F) = \frac{9}{5} t(^{\circ}C) + 32$$

- Storicamente importante anche la scala Rankine, la cui relazione di conversione con la scala kelvin è:

$$t(^{\circ}R) = T(K)$$

Concludiamo questa breve rassegna con il coefficiente di viscosità dinamica prima visto: è molto facile trovare come unità di misura il Poise, questo perché un centesimo di poise corrisponde perfettamente con il coefficiente di viscosità dinamico dell'acqua a temperatura ambiente (20 gradi centigradi). La relazione di conversione con le unità del S.I. sarà la seguente:

$$1 \text{ poise} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cms}} = 0,1 \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$$

Cambiamo ora decisamente argomento e vediamo l'esperienza di Joule che ha messo in luce la corrispondenza tra calore e lavoro. Per far questo soffermiamoci innanzitutto ad osservare come la definizione del lavoro infinitesimo abbia la seguente struttura generale:

$$dL = Adb$$

Se pensiamo, infatti, alla definizione di lavoro data in meccanica dei corpi, la relazione generale diventa:

$$dL = FdS$$

analogamente, pensando alla definizione di lavoro in meccanica dei fluidi, si ottiene:

$$dL = pdV$$

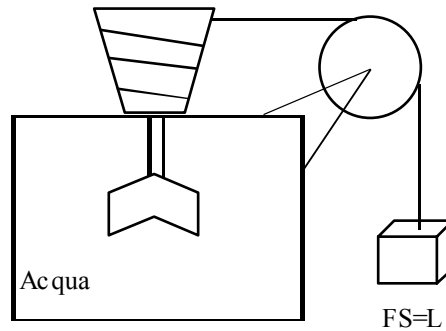
oppure ancora, pensando al lavoro svolto in un campo elettrico, si ha:

$$dL = Vdq$$

Il lavoro, dunque, implica due enti ed ha un valore assoluto; per quanto riguarda, invece, l'energia, questa appartiene ad un solo ente ed ha uno zero di riferimento. Ricordiamo ora la relazione della meccanica razionale che lega il lavoro alla variazione di energia cinetica e di energia potenziale:

$$dL = dE_p + dT$$

Consideriamo ora l'esperienza di Joule, rappresentato nella figura seguente, nel quale dell'acqua viene scaldata sfruttando del lavoro puramente meccanico (le due palette che girano a causa del grave che cade).



Dobbiamo osservare che, essendo, alla fine dell'esperienza il liquido fermo esattamente come all'inizio dell'esperienza, non c'è variazione di energia cinetica, ovvero si ha:

$$dT = 0$$

non sono presenti, inoltre, elementi che ci suggeriscono una variazione dell'energia cinetica, quindi avremo anche:

$$dE_p = 0$$

Ricordando dunque l'equazione prima vista che deriva dalla meccanica razionale, saremmo portati a dire che:

$$dL - dE_p - dT = 0$$

Invece, a causa del riscaldamento dell'acqua nel contenitore, si osserva una variazione nell'energia del sistema e quindi dovremo scrivere:

$$dL - dE_p - dT = dU$$

Questo esperimento ci porta a dover introdurre quindi un ulteriore termine che tenga conto della variazione di temperatura: avremo dunque, introducendo il calore massico:

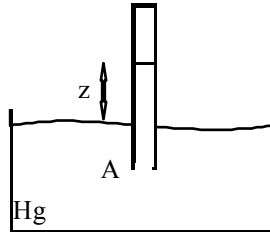
$$dL = dU = c_m d\vartheta$$

dove  $d\vartheta$  rappresenta la variazione di temperatura. In questo modo si definisce il calore come una forma di energia che quindi dovrà rientrare nel principio di conservazione dell'energia. Un discorso assolutamente analogo può essere fatto tramite una altra esperienza nella quale si ha un sistema contenente, per esempio, acqua e diviso in due parti tenute inizialmente separate e a temperature diverse. Quando le due parti del sistema vengono mescolate, la zona che si trovava a temperatura minore subisce un innalzamento della sua energia interna perché aumenta la sua temperatura. Tutto ciò è però accompagnato da una variazione nulla di energia cinetica e di energia potenziale nonché da una quantità di lavoro nulla. Questo significa che bisogna inserire una nuova forma di energia, responsabile della variazione di energia interna citata e che è, appunto, il calore.

Si faccia riferimento al barometro di Torricelli rappresentato nella figura seguente. Sapendo che la colonna di mercurio si solleva ad una distanza  $z$  dal pelo libero nel resto della bacinella e conoscendo la densità del mercurio  $\rho$ , valutare la pressione atmosferica. I dati numerici sono i seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{Hg} = 13590 \frac{kg}{m^3} \\ g = 9,806 \frac{m}{s^2} \end{array} \right.$$

Il problema può essere risolto tramite un semplicissimo bilanciamento di forze. Se pensiamo infatti alla colonna di mercurio contenuta nel tubo di vetro, questa sarà sottoposta alla propria forza peso, alla pressione di vapore contenuta nella zona del tubo nella quale non c'è il mercurio stesso e dalla pressione atmosferica che, per la legge di Stevino, si propaga inalterata fino alla superficie indicata con la lettera A.



L'espressione di bilancio sarà allora:

$$\sum F = -p_{Atm} A + p_{vap} A + \rho_{Hg} g z A = 0$$

Semplificando dunque per la superficie A e tenendo conto che la pressione di vapore è praticamente nulla e quindi trascurabile, rimane la seguente relazione:

$$-p_{Atm} + \rho_{Hg} g z = 0$$

Esplicitando quest'ultima relazione rispetto alla pressione atmosferica e sostituendo i valori numerici si ottiene il valore richiesto (si ricordi che, a pressione atmosferica, la colonnina di mercurio sale di circa 76cm):

$$P_{Atm} = \rho_{Hg} g z = 101300 \frac{N}{m^2} = 101300 Pa = 1,013 bar = 1013 mbar$$

Valutiamo ora l'altezza che avrebbe raggiunto la colonna di liquido se, invece del mercurio, fosse stata usata dell'acqua; si deve tener conto che la densità dell'acqua è differente da quella del mercurio ed è:

$$\rho_{H_2O} = 1000 \frac{kg}{m^3}$$

Ovviamente, anche usando l'acqua, la pressione di vapore risulta trascurabile e si deve ottenere lo stesso risultato di prima; uguagliando dunque la pressione misurata con il mercurio e quella misurata con l'acqua e semplificando i termini comuni si ottiene:

$$\rho_{Hg} z_{Hg} = \rho_{H_2O} z_{H_2O}$$

Esplicitando rispetto all'altezza richiesta ed inserendo i valori numerici si ottiene:

$$z_{H_2O} = \frac{\rho_{Hg} z_{Hg}}{\rho_{H_2O}} = 10,33 m$$

Siccome la pressione dell'atmosfera a livello del mare è una pressione molto usata negli esperimenti, viene definita una unità di misura della pressione detta atmosfera e così espressa:

$$1 atm = 1013 bar$$

**Massa molare, volume molare, numero di moli e frazione molare. Convenzioni.**

Un argano di potenza 8kW funzione per 20 minuti e solleva un grave di 10000kg inizialmente fermo a terra. Stabilire a che altezza arriva il grave.

Come prima cosa uniformiamoci al S.I. e quindi trasformiamo il tempo in secondi:

$$t = 20 \text{ min} = (20 \text{ min}) \left( 60 \frac{\text{s}}{\text{min}} \right) = 1200 \text{ s}$$

Ricordiamo ora la relazione che esprime la potenza in funzione del lavoro e del tempo:

$$P = \frac{W}{t}$$

Da questa relazione possiamo dunque esprimere il lavoro svolto dal sistema nella seguente forma:

$$W = Pt$$

Il lavoro svolto dal grave può anche essere espresso come la sua variazione di energia potenziale gravitazionale, ovvero:

$$W = mgh$$

Uguagliamo ora le due espressioni trovate per il lavoro ottenendo:

$$mgh = Pt$$

Dalla quale si ricava:

$$h = \frac{Pt}{mg} = \frac{(8 \cdot 10^3 \text{ W})(1200 \text{ s})}{(10^4 \text{ kg}) \left( 9,806 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)} = 97,899 \text{ m}$$

Esprimere in chilocalorie (kcal) 1 cavallo-ora (CVh)

Trasformiamo prima la grandezza assegnata in unità facenti parte dell'S.I.

$$1 \text{ CVh} = (1 \text{ Cv}) \left( 735 \frac{\text{W}}{\text{Cv}} \right) (1 \text{ h}) \left( 3600 \frac{\text{s}}{\text{h}} \right) = 2646 \text{ kJ}$$

Sfruttiamo ora le relazioni di conversione per ottenere le unità di misura scelte:

$$1 \text{ CVh} = 2646 \text{ kJ} = \frac{2646 \cdot 10^3 \text{ J}}{4,186 \frac{\text{J}}{\text{cal}}} = 63,211 \text{ kcal}$$

In un recipiente adiabatico rigido, nel quale sono contenuti 100 litri di acqua, c'è un resistore di resistenza 100 Ohm che opera con una differenza di potenziale di 220V. Stabilire il tempo necessario per innalzare la temperatura da 20 a 60 gradi centigradi. Siano noti il calore specifico dell'acqua a volume costante e la densità dell'acqua tra i 20 e i 60 gradi centigradi:

$$\begin{cases} c_V = 1 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}} \\ \rho_{\text{H}_2\text{O}} = 991 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \end{cases}$$

Siccome non può esserci variazione di volume non potrà esserci neppure lavoro, il primo principio della termodinamica può essere dunque scritto nella forma seguente:

$$\Delta U = Q$$

La massa dell'acqua presente nel contenitore può essere calcolata come segue:

$$m = \rho_{\text{H}_2\text{O}} V = \left( 991 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) (100 \text{ l}) \left( 0,001 \frac{\text{m}^3}{\text{l}} \right) = 99,1 \text{ kg}$$

Valutiamo ora il calore scambiato sfruttando la relazione:

$$Q = mc_V \Delta T = (99,1 \text{ kg}) \left( 10^3 \frac{\text{cal}}{\text{kg}^\circ\text{C}} \right) \left( 4,186 \frac{\text{J}}{\text{cal}} \right) (40^\circ\text{C}) = 16593,304 \text{ kJ}$$

Si può a questo punto valutare la potenza elettrica dissipata dal resistore tramite la relazione:

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{(220V)^2}{100\Omega} = 484W$$

Esprimiamo ora la potenza in funzione dell'energia, che in questo caso coincide con il calore, e del tempo; si otterrà così, esplicitando rispetto al tempo e uguagliando tale potenza con la potenza elettrica dissipata dal resistore:

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{16593,304kJ}{484W} = 34283,686s$$

Il tempo impiegato per scaldare tale massa d'acqua si aggira, dunque, sulle 10 ore.

Prima di vedere i prossimi esercizi definiamo il numero di moli come la massa di un composto divisa per la sua massa molare e la frazione molare di un composto come il numero di moli di un certo composto diviso per il numero di moli totali della miscela.

In un recipiente di 55 centimetri cubici nel quale sono contenuti 50 grammi di acqua vengono aggiunti 10 grammi di sale da cucina e 15 grammi di zucchero. Valutare il numero di moli dei componenti, la frazione molare di ciascun elemento e il volume molare totale. Siano note le masse molari dell'acqua, del sale e dello zucchero:

$$\begin{cases} MM_{H_2O} = 18 \frac{g}{mol} \\ MM_{NaCl} = 58,454 \frac{g}{mol} \\ MM_{C_{12}H_{12}O_{11}} = 342 \frac{g}{mol} \end{cases}$$

Valutiamo il numero di moli dell'acqua sfruttando la seguente relazione:

$$\frac{50g}{18 \frac{g}{mol}} = 2,778mol_{H_2O}$$

Per quanto riguarda, invece, il numero di moli di sale, si avrà:

$$\frac{10g}{58,454 \frac{g}{mol}} = 0,171mol_{NaCl}$$

Il numero di moli di zucchero sarà, invece:

$$\frac{15g}{342 \frac{g}{mol}} = 0,044mol_{C_{12}H_{12}O_{11}}$$

Il numero di moli totale sarà ovviamente dato dalla somma del numero di moli delle varie specie:

$$2,778mol_{H_2O} + 0,171mol_{NaCl} + 0,044mol_{C_{12}H_{12}O_{11}} = 2,993mol_{Tot}$$

Possiamo dunque valutare la frazione molare dell'acqua sfruttando la seguente relazione:

$$\frac{2,778mol_{H_2O}}{2,993mol_{Tot}} = 0,928 \Rightarrow 92,8\%$$

Per quanto riguarda, invece, la frazione molare del sale, si avrà:

$$\frac{0,171mol_{NaCl}}{2,993mol_{Tot}} = 0,057 \Rightarrow 5,7\%$$

La frazione molare dello zucchero sarà, invece:

$$\frac{0,044mol_{C_{12}H_{12}O_{11}}}{2,993mol_{Tot}} = 0,015 \Rightarrow 1,5\%$$

Il volume molare totale, infine, sarà dato dalla relazione:

$$\frac{55cm^3}{2,993mol} = 18,376 \frac{cm^3}{mol}$$

Per poter scrivere in modo completo il primo principio della termodinamica dobbiamo segnalare quale convenzione si sceglie relativamente ai segni del calore e del lavoro entrante e uscente. Le due convenzioni più usate sono la convenzione motoristica (che considera positivo il lavoro uscente e il calore entrante) e la convenzione dei conti



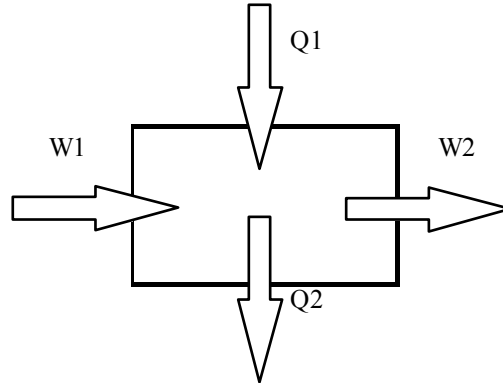
correnti (che considera positivo il lavoro e il calore entranti). Utilizzando la convenzione motoristica il primo principio della termodinamica si scriverà nel modo seguente:

$$\Delta U = Q - W$$

Utilizzando, invece, la convenzione dei conti correnti il primo principio avrà la seguente forma:

$$\Delta U = Q + W$$

Valutare, con entrambe le convenzioni di segno, la variazione nell'energia interna del sistema rappresentato in figura:



Dove siano noti anche i seguenti valori numerici:

$$\begin{cases} |W_1| = 350J \\ |W_2| = 600J \\ |Q_1| = 1000J \\ |Q_2| = 550J \end{cases}$$

Con la notazione motoristica la variazione di energia interna è data dalla relazione:

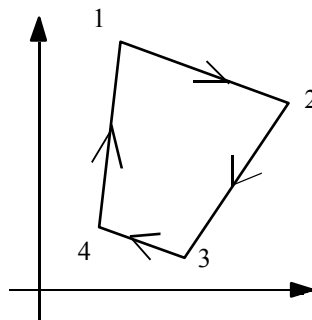
$$\Delta U = Q - W = (Q_1 - Q_2) - (W_2 - W_1) = (1000J - 550J) - (600J - 350J) = 200J$$

Con la notazione dei conti correnti, invece, la variazione di energia interna è data dalla relazione:

$$\Delta U = Q + W = (Q_1 - Q_2) + (W_1 - W_2) = (1000J - 550J) + (350J - 600J) = 200J$$

Si osservi che l'energia interna è una variabile di stato e quindi il valore numerico della sua variazione non cambia con il cambiare della convenzione di segno utilizzata.

Si consideri la trasformazione ciclica generalmente indicata nel grafico seguente:



Supposto che l'energia interna del punto 1 sia l'energia di riferimento e sia nulla, completare la seguente tabella (nella quale sono state omesse tutte le unità di misura che, però, sono J):

Trasformazione	$Q$	$W$	$\Delta U$	$U_{Fin}$
Da 1 a 2	?	0	1390	?
Da 2 a 3	0	395	?	?
Da 3 a 4	-1000	?	-1000	?
Da 4 a 1	0	?	?	?

Utilizziamo la convenzione motoristica nella quale il primo principio della termodinamica ha la seguente forma:

$$\Delta U = Q - W$$

Applicando dunque il primo principio in questa forma alla prima riga della tabella si ottiene:

$$1390 = Q - 0$$

Dalla quale ovviamente si ricava che:

$$Q = 1390$$

Ricordiamo ora che il punto 1 è stato scelto con un'energia interna di riferimento nulla; si avrà quindi:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = U_2 - 0 = 1390$$

Dalla quale si ricava che:

$$U_2 = 1390$$

Applichiamo ora il primo principio alla seconda riga della tabella, ottenendo:

$$\Delta U = 0 - 395 = -395$$

Una volta trovata la variazione di energia interna e ricordando quanto trovato prima, avremo:

$$-395 = U_3 - 1390$$

Dalla quale, ovviamente, si ricava:

$$U_3 = 995$$

Soffermiamoci sulla quarta riga della tabella: applicando il primo principio si ottiene:

$$-1000 = -1000 - W$$

Possiamo dunque vedere che il lavoro deve essere nullo. Per quanto riguarda, invece, l'energia interna dello stato finale, si avrà:

$$-1000 = U_4 - 995$$

Dalla quale si ricava:

$$U_4 = -5$$

Per quanto riguarda, infine, l'ultima riga della tabella, ricordiamo nuovamente che l'energia interna dello stato 1 è considerata l'energia di riferimento ed è posta uguale a zero, questo ci permette, conoscendo l'energia dello stato 4, di valutare la variazione di energia:

$$\Delta U = 0 - (-5) = 5$$

Ora, applicando il primo principio, si ottiene:

$$5 = 0 - W$$

Da questa si ricava che:

$$W = -5$$

La tabella completata avrà dunque la seguente forma:

Trasformazione	$Q$	$W$	$\Delta U$	$U_{Fin}$
Da 1 a 2	1390	0	1390	1390
Da 2 a 3	0	395	-1390	995
Da 3 a 4	-1000	0	-1000	-5
Da 4 a 1	0	-5	5	0

Preso la convenzione motoristica, si calcoli la variazione di energia interna, il calore e il lavoro scambiato da un sistema che subisce una trasformazione che lo porta dallo stato 1 allo stato 2 indicati nel grafico seguente. Il passaggio dallo stato 1 allo stato 2 avviene in quattro modi diversi:

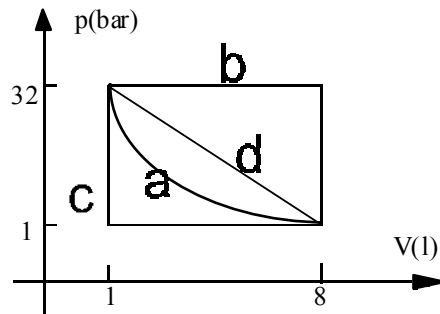
a) attraverso una trasformazione adiabatica quasi-statica caratterizzata dalla relazione:

$$pV^{\frac{5}{3}} = \text{const}$$

b) attraverso una trasformazione prima isobara e poi isometrica

c) attraverso una trasformazione prima isometrica e poi isobara

d) attraverso una trasformazione che collega con una linea retta lo stato 1 e lo stato 2



a) Ricaviamo innanzitutto la costante che appare nella relazione definitiva:

$$p_1 V_1^{\frac{5}{3}} = p_2 V_2^{\frac{5}{3}} = 32 \cdot 1^{\frac{5}{3}} = 1 \cdot 8^{\frac{5}{3}} = 32$$

Dunque la legge caratteristica di questa trasformazione è la seguente:

$$pV^{\frac{5}{3}} = 32$$

Siccome si tratta di una trasformazione adiabatica il calore scambiato è nullo e quindi il primo principio si riduce nella forma seguente:

$$\Delta U = Q - W = -W = -\int_1^2 p dV$$

Esplicitiamo ora la pressione in funzione del volume, ovvero:

$$p = \frac{32}{V^{\frac{5}{3}}} = 32V^{-\frac{5}{3}}$$

Sostituendo dunque questa forma della pressione nell'espressione del lavoro si ottiene:

$$W = \int_1^8 32V^{-\frac{5}{3}} dV = 32 \left[ -\frac{3}{2} V^{-\frac{2}{3}} \right]_1^8 = -\frac{3}{2} 32 \text{bar} \left( 8^{-\frac{2}{3}} l - 1^{-\frac{2}{3}} l \right) \left[ 10^5 \frac{\text{Pa}}{\text{bar}} 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{l} \right] = 3600 \text{J}$$

La variazione di energia interna sarà dunque:

$$\Delta U = -W = -3600 \text{J}$$

b) In questo caso il lavoro svolto dal sistema sarà diverso da zero solo nel primo tratto nel quale il volume cambia; questo rende anche molto semplice l'integrale che mi dà il lavoro, poiché si ha:

$$W = \int_1^2 p dV = p \int_1^8 dV = p[V]_1^8 = 32 \text{bar} (8l - 1l) \left[ 10^5 \frac{\text{Pa}}{\text{bar}} 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{l} \right] = 22400 \text{J}$$

Tenendo dunque conto che l'energia interna è una funzione di stato e che quindi la variazione di energia interna è indipendente dal percorso seguito dalla trasformazione, la variazione di energia interna sarà la stessa del caso precedente e il calore scambiato si potrà valutare per differenza:

$$Q = \Delta U + W = -3600 \text{J} + 22400 \text{J} = 18800 \text{J}$$

c) Anche in questo caso il lavoro svolto dal sistema sarà diverso da zero solo nel tratto in cui varia il volume, ovvero nel secondo; si avrà quindi:

$$W = \int_1^2 p dV = p \int_1^8 dV = p[V]_1^8 = 1 \text{bar} (8l - 1l) \left[ 10^5 \frac{\text{Pa}}{\text{bar}} 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{l} \right] = 700 \text{J}$$

Anche in questo caso si andrà a valutare il calore scambiato per differenza, sapendo che la variazione di energia interna è sempre uguale:

$$Q = \Delta U + W = -3600 \text{J} + 700 \text{J} = -2900 \text{J}$$

d) In quest'ultimo caso il lavoro potrà essere valutato integrando la variazione di volume moltiplicata per la pressione media, essendo la linea che descrive la trasformazione una linea retta; si avrà quindi:

$$W = \int_1^2 \bar{p} dV = \bar{p} \int_1^8 dV = \bar{p}[V]_1^8 = \frac{32+1}{2} \text{bar} (8l - 1l) \left[ 10^5 \frac{\text{Pa}}{\text{bar}} 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{l} \right] = 11550 \text{J}$$

*E dunque il calore scambiato sarà:*

$$Q = \Delta U + W = -3600J + 11550J = 7950J$$

*Con questo esercizio abbiamo mostrato a livello quantitativo che il calore e il lavoro non sono funzioni di stato, infatti il loro valore numerico cambia con il cambiare del percorso che unisce due punti.*

**Equazioni sperimentali per i gas reali. Calori specifici esatti.**

Si consideri un sistema costituito da due sottosistemi A e B. Tali sottosistemi sono inizialmente separati fra loro da una parete impervia, rigida ed adiabatica e completamente isolati rispetto all'esterno. La relazione fondamentale, in forma entropica di tale sistema è la seguente:

$$S = c(UVN)^{1/3}$$

Ricavare le equazioni di stato e controllare che la condizione di equilibrio finale a seguito di rimozione del vincolo di adiabaticità porta a:

$$T_A = T_B$$

Come prima cosa esprimiamo la relazione fondamentale in forma energetica, ottenendo:

$$U = \frac{1}{c^3} \frac{S^3}{VN}$$

Ricordiamo ora quanto visto nella lezione numero 2 ed esprimiamo nel modo seguente la temperatura in funzione dell'energia interna:

$$T = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V,N} = \frac{3S^2}{c^3 VN}$$

Sostituiamo ora, in quest'ultima relazione, l'espressione dell'entropia data dalla relazione entropica fornita nel testo; si ottiene così la prima equazione di stato:

$$T = \frac{3}{c} \frac{U^{2/3}}{(VN)^{1/3}}$$

In modo analogo arriviamo ad esprimere anche la pressione e il potenziale chimico; troviamo dunque le altre due equazioni di stato:

$$\begin{cases} p = - \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S,N} = \frac{1}{c^3} \frac{S^3}{V^2 N} = \frac{U}{V} \\ \mu = \left( \frac{\partial U}{\partial N} \right)_{S,V} = - \frac{1}{c^3} \frac{S^3}{VN^2} = - \frac{U}{N} \end{cases}$$

Combinando ora l'equazione di stato relativa alla temperatura con l'equazione di stato relativa alla pressione si ottiene il legame tra p e T:

$$p = \left( \frac{c}{3} \right)^{3/2} \frac{N^{1/2}}{V^{1/2}} T^{3/2}$$

Valutiamo ora l'entropia complessiva del sistema; siccome l'entropia gode della proprietà additiva si avrà:

$$S_{Tot} = S_A + S_B$$

Combinando quest'ultima espressione con la relazione fondamentale in forma entropica fornita nel testo si ottiene:

$$S_{Tot} = c \left[ (U_A V_A N_A)^{1/3} + (U_B V_B N_B)^{1/3} \right] = c (U_A + U_B)^{1/3} \left[ N_A V_A \left( \frac{U_A}{U_A + U_B} \right)^{1/3} + N_B V_B \left( \frac{U_B}{U_A + U_B} \right)^{1/3} \right]$$

La condizione di equilibrio finale è caratterizzata dal fatto che:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

ovvero, essendo:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{S_{Tot}}{c(U_A + U_B)^{1/3}} \\ dx = dU_A \\ dU_A = -dU_B \end{cases}$$

si ottiene:

$$\frac{dS_{Tot}}{dU_A} = \frac{dS_A + dS_B}{dU_A} = \frac{dS_A}{dU_A} - \frac{dS_B}{dU_B} = 0$$

Date le modalità di vincolo dei singoli sottosistemi, si ottiene:

$$\left( \frac{\partial S_A}{\partial U_A} \right)_{V,N} = \left( \frac{\partial S_B}{\partial U_B} \right)_{V,N}$$

ovvero:

$$\frac{1}{T_A} = \frac{1}{T_B} \text{ c.v.d.}$$

In un recipiente adiabatico è contenuta una massa d'acqua pari a 50 kg, a pressione atmosferica costante e mantenuta ad una temperatura di 20 °C. In tale recipiente viene inserita una sfera di rame di 20 cm di diametro avente una temperatura di 600°C. Si valuti la temperatura di equilibrio del sistema, il calore scambiato e la variazione di entropia conoscendo il calore specifico dell'acqua, quello del rame e la densità di quest'ultimo.

$$\begin{cases} c_{H_2O} = 4186 \frac{J}{KgK} \\ c_{Cu} = 389 \frac{J}{KgK} \\ \rho_{Cu} = 8930 \frac{Kg}{m^3} \end{cases}$$

Per risolvere questo problema possiamo utilizzare il potenziale entalpia che, come si è visto, è espresso nel modo seguente:

$$H = U + pV$$

Differenziamo dunque tale relazione ottenendo:

$$dH = dU + pdV + Vdp$$

Siccome, però, come specificato nel testo, la pressione rimane costante, la precedente relazione si può riscrivere come segue:

$$dH = dU + pdV$$

L'introduzione di una sfera di 20 cm di diametro in un contenitore di 50 kg d'acqua provoca una variazione di volume trascurabile; ciò significa che l'ultima relazione scritta si può ridurre ulteriormente giungendo alla seguente forma:

$$dH = dU$$

Siccome il sistema è isobaro, il lavoro svolto dal sistema non può che essere nullo e quindi il primo principio si può esprimere, nella sua forma infinitesima, come segue:

$$dU = dQ$$

Combinando dunque le ultime due relazioni scritte si ottiene:

$$dH = dQ$$

ovvero, passando alla variazione finite:

$$\Delta H = Q$$

Siccome, inoltre, il recipiente è adiabatico, il calore complessivamente scambiato con l'esterno è nullo e quindi si avrà:

$$\Delta H = 0$$

Scomponiamo ora la variazione totale di entalpia nella variazione legata all'acqua e al rame; si avrà così:

$$\Delta H_{H_2O} + \Delta H_{Cu} = 0$$

Per quanto appena visto, questa relazione si può riscrivere come segue:

$$Q_{H_2O} + Q_{Cu} = 0$$

Ricordiamo ora la formula generale che esprime il calore scambiato, secondo la quale:

$$Q = Mc_x \Delta T$$

dove, nel caso in analisi, la x sarà ovviamente la pressione. Combinando dunque le ultime due relazioni scritte si ottiene:

$$M_{H_2O} c_{PH_2O} (T_f - T_{H_2O}) + M_{Cu} c_{PCu} (T_f - T_{Cu}) = 0 \quad (1)$$

Ovviamente si deve intendere che:

$$M_{Cu} = \rho_{Cu} \frac{4}{3} \pi \left( \frac{d}{2} \right)^3 = 37,4 \text{Kg}$$

Esprimiamo ora le temperature in questione in kelvin:

$$\begin{cases} T_{H_2O} = 293 \text{K} \\ T_{Cu} = 873 \text{K} \end{cases}$$

Ricaviamo ora la temperatura finale esplicitandola dalla relazione (1), si otterrà:

$$T_f = \frac{M_{H_2O} c_{PH_2O} T_{H_2O} + M_{Cu} c_{PCu} T_{Cu}}{M_{H_2O} c_{PH_2O} + M_{Cu} c_{PCu}} = 330,7 \text{K} = 57,7 \text{K}$$

Per valutare il calore scambiato complessivamente posso scegliere, indifferentemente, il calore scambiato dall'acqua o quello scambiato dal rame; scegliendo l'acqua si avrà:

$$M_{H_2O} c_{PH_2O} \Delta T = 7890,6 \text{kJ}$$

Calcoliamo ora la variazione di entropia totale e la variazione dei due sottosistemi; per far questo ricordiamo la relazione generale secondo la quale:

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

Per ottenere la variazione finita di entropia si dovrà quindi integrare, ottenendo:

$$S = \int_1^2 dS = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{Mc_P dT}{T} = Mc_P \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = Mc_P \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Nel caso dell'acqua si avrà quindi:

$$\Delta S_{H_2O} = M_{H_2O} c_{PH_2O} \ln \frac{T_f}{T_{H_2O}} = 25333 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

mentre nel caso del rame si avrà:

$$\Delta S_{Cu} = M_{Cu} c_{PCu} \ln \frac{T_f}{T_{Cu}} = -14122 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Dunque la variazione totale di entropia sarà:

$$\Delta S_{Tot} = \Delta S_{H_2O} + \Delta S_{Cu} = 11211 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Il fatto che si sia prodotta entropia indica che la trasformazione è irreversibile.

Completare la seguente tabella ricordando che il peso atomico dell'Azoto è pari a 14 u.m.a.

$N_2$	$\rho$	$v$
$t=0^\circ\text{C}$ $p=1\text{atm}$	?	?
$t=150^\circ\text{C}$ $p=2\text{atm}$	?	?
$t=20^\circ\text{C}$ $p=?$	?	$2,9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$

Innanzitutto osserviamo che la massa molare dell'Azoto molecolare è data dalla seguente relazione:

$$Mm_{N_2} = 2Ma_N = 28 \text{u.m.a.}$$

Consideriamo ora la relazione dei gas perfetti, che può essere facilmente applicata al caso in questione:

$$pV = NRT$$

Siccome nella tabella è richiesto il volume massico, conviene dividere direttamente per la massa l'equazione dei gas perfetti, ottenendo:

$$pv = \frac{1}{Mm} RT$$

Per semplicità definiamo ora la seguente costante derivata dalla costante dei gas:

$$R^* = \frac{R}{Mm} = 297 \frac{J}{kgK}$$

Possiamo ora riscrivere come segue l'equazione dei gas:

$$pv = R^* T \quad (1)$$

dalla quale è semplice ricavare il volume massico:

$$v = \frac{R^* T}{p}$$

Ricordiamo ora il valore SI dell'atmosfera:

$$1atm = 101320 \frac{N}{m^2}$$

e riportiamo in kelvin le temperature indicate:

$$\begin{cases} t = 0^\circ C \Rightarrow T = 273K \\ t = 150^\circ C \Rightarrow T = 423K \\ t = 20^\circ C \Rightarrow T = 293K \end{cases}$$

I due volumi massici richiesti si possono dunque valutare come segue:

$$\begin{cases} v = 0,8 \frac{m^3}{kg} \\ v = 0,62 \frac{m^3}{kg} \end{cases}$$

Conoscendo tutti i volumi massici risulta semplice calcolare le masse volumiche; si avrà allora:

$$\begin{cases} \rho = \frac{1}{v} = 1,25 \frac{kg}{m^3} \\ \rho = \frac{1}{v} = 1,613 \frac{kg}{m^3} \\ \rho = \frac{1}{v} = 344,83 \frac{kg}{m^3} \end{cases}$$

Per calcolare, infine, l'unica pressione richiesta, si può utilizzare la seguente espressione ricavata anch'essa dalla relazione (1):

$$p = \frac{R^* T}{v} = 3 \cdot 10^7 \frac{N}{m^2} = 300bar$$

La tabella completata è dunque la seguente:

$N_2$	$\rho$	$v$
$t=0^\circ C$ $p=1atm$	$1,25 \frac{kg}{m^3}$	$0,8 \frac{m^3}{kg}$
$t=150^\circ C$ $p=2atm$	$1,613 \frac{kg}{m^3}$	$0,62 \frac{m^3}{kg}$
$t=20^\circ C$ $p=300bar$	$344,83 \frac{kg}{m^3}$	$2,9 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{kg}$

Fino ad ora ci siamo sempre occupati dei gas perfetti; i gas reali possono essere trattati sfruttando delle equazioni più complesse di quelle relative ai gas perfetti e spesso di origine sperimentale. Di tali equazioni sperimentali ne esistono diverse che, applicate ad un medesimo problema, possono dare risultati diversi anche se simili. Se per esempio, si ricalcolasse l'ultima pressione richiesta nell'esercizio precedente sfruttando la seguente equazione (detta di Dieterici):

$$p = \frac{RT}{v-b} e^{a/vRT}$$

con



$$\begin{cases} a = 175600 \\ b = 0,0418 \end{cases}$$

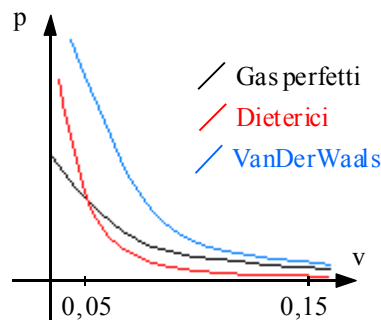
si otterrebbe un valore di 254,4 bar; si avrebbe dunque un valore leggermente minore rispetto a quello trovato usando l'equazione dei gas perfetti. Un valore ancora diverso si otterrebbe usando la seguente equazione di VanDerWaals:

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a^2}{v}$$

con

$$\begin{cases} a = 136900 \\ b = 0,0386 \end{cases}$$

Il grafico seguente mostra la differenza nelle pressioni valutate con le tre equazioni citate.



Concentriamoci ora sul calcolo più dettagliato del calore massico a volume costante. Fino ad ora abbiamo sempre visto come questo fosse composto da un termine pari ad  $\frac{1}{2}R$  per ogni grado di libertà posseduto dalla molecola; così, per i gas monoatomici si aveva:

$$c_V = \frac{3}{2}R$$

poiché il singolo atomo presenta tre gradi di libertà traslazionali (lungo x, lungo y e lungo z). Nel caso dei gas biatomici (o comunque multiatomici lineari) si aveva invece:

$$c_V = \frac{5}{2}R$$

perché, oltre ai tre gradi prima visti, bisognava contare anche due gradi di rotazione attorno a due degli assi. Sfruttando questo metodo, dunque, si teneva conto dei soli gradi di libertà rototraslazionali; per essere maggiormente precisi nel calcolo di tali calori massici bisogna anche tener conto dei gradi di libertà vibrazionali. Risulta dunque utile introdurre la seguente relazione che esprime il contributo dato dai gradi di libertà vibrazionali al calore massico a volume costante:

$$Gdl_{vib} \cdot R = \frac{\left(\frac{T_V}{2T}\right)^2}{Sh^2\left(\frac{T_V}{2T}\right)} \cdot R$$

dove si è introdotta la temperature vibrazionale.

Considerata la molecola triatomica lineare dell'anidride carbonica, si valuti il calore massico complessivo a 47°C sapendo che le temperature vibrazionali di tale sostanza sono le seguenti:

$$\begin{cases} T_{V1} = 960K \\ T_{V2} = 960K \\ T_{V3} = 2000K \\ T_{V4} = 3380K \end{cases}$$

Valutare inoltre l'errore di stima nel caso in cui si usino o meno i gradi di libertà vibrazionali rispetto ai dati sperimentali secondo i quali i calori specifici a 300 e 400 kelvin sono, rispettivamente 28,7 e 33.

Come prima cosa occorre ricordare il valore numerico della costante dei gas perfetti:

$$R = 8314 \frac{J}{\text{kmolK}}$$

Senza tener conto dei gradi di libertà vibrazionali si avrà:

$$c_V = \frac{5}{2} R = 20,785 \frac{J}{\text{kmolK}}$$

Tenendo invece conto dei gradi vibrazionali risulta comodo porre:

$$x = \frac{T_V}{2T}$$

Si ottengono in questo modo i quattro seguenti valori:

$$\begin{cases} x_{960} = 1,5 \\ x_{960} = 1,5 \\ x_{2000} = 3,125 \\ x_{3380} = 5,281 \end{cases}$$

Il contributo al calore massico portato dai gradi vibrazionali è dunque dato dalla seguente relazione:

$$Gdl_{vib} \cdot R = R \cdot \sum_i \frac{x_i^2}{Sh^2 x_i} = 1,071R$$

Dunque, il valore più preciso del calore massico a volume costante sarà il seguente:

$$c_V = \frac{5}{2} R + 1,071R = 29,69 \frac{J}{\text{kmolK}}$$

Basandosi sui valori sperimentali noti ed interpolando linearmente per 320K (il valore che corrisponde ai 47°C), si ottiene:

$$c_V = \left( \frac{33 - 28,7}{400 - 300} \right) 320 + \left[ 33 - \left( \frac{33 - 28,7}{400 - 300} \right) 400 \right] = 29,56$$

Il rapporto tra il valore ottenuto senza tener conto dei gradi vibrazionali e il valore sperimentale sarà quindi:

$$\frac{20,785}{29,56} = 0,7$$

il che implica un errore del 30%; usando anche i gradi vibrazionali, il rapporto tra i due valori è:

$$\frac{29,56}{29,65} = 0,997$$

che implica un errore di solo lo 0,3%.

**Trasformazioni con i gas ideali.**

Utilizzando la relazione dei gas ideali si stabilisca la pressione che si ottiene in una bombola di ossigeno da 200 litri che viene portata a 60°C partendo da una pressione di 200ata e da una temperatura di 20°C. Si stabilisca inoltre la massa in chilogrammi. E' noto che la relazione di conversione tra la grandezza del sistema tecnico e quella SI riguardante la pressione è la seguente:

$$1ata = 10^4 \frac{kgf}{m^2}$$

Come prima cosa trasformiamo le grandezze in questione in unità SI:

$$\begin{cases} V = 200l = 0,2m^3 \\ p = 200ata = 19,62MPa \\ T_i = 293K \\ T_f = 333K \end{cases}$$

Nella situazione iniziale si può scrivere la legge dei gas perfetti come segue:

$$p_i V_i = N_i R T_i \quad (1)$$

mentre, nella situazione finale si avrà:

$$p_f V_f = N_f R T_f$$

Considero ora il rapporto tra le ultime due relazioni scritte, ottenendo:

$$\frac{p_f V_f}{p_i V_i} = \frac{N_f R T_f}{N_i R T_i}$$

Tenendo ora conto del fatto che, durante la trasformazione, il volume e il numero di moli non cambia (ed essendo R una costante), l'ultima relazione scritta si può così semplificare:

$$\frac{p_f}{p_i} = \frac{T_f}{T_i}$$

dalla quale è facile ricavare:

$$p_f = p_i \frac{T_f}{T_i} = 22,3MPa$$

Esplicitiamo ora la relazione (1) rispetto al numero di moli ottenendo:

$$N = \frac{p_i V_i}{R T_i} = 1610mol$$

Ricordiamo ora che la molecola dell'ossigeno è una molecola biatomica e che la massa atomica dell'ossigeno è:

$$Ma = 16uma$$

dunque la massa molare della molecola di ossigeno sarà:

$$Mm = 2Ma = 32uma$$

Conoscendo la massa molecolare dell'ossigeno e il numero di moli presenti si può dunque ricavare facilmente il peso in chilogrammi dell'ossigeno:

$$M = Mm \cdot N = 51,547kg$$

E' importante osservare che, nella realtà, nelle condizioni iniziali imposte, non si è in presenza di gas ma di liquido. Si valutino i parametri di stato, la variazione di entalpia e di entropia, il calore scambiato e il lavoro svolto dall'aria che subisce la trasformazione isobara rappresentata nei due grafici della pagina seguente. Si assuma per l'aria una massa molare pari a:

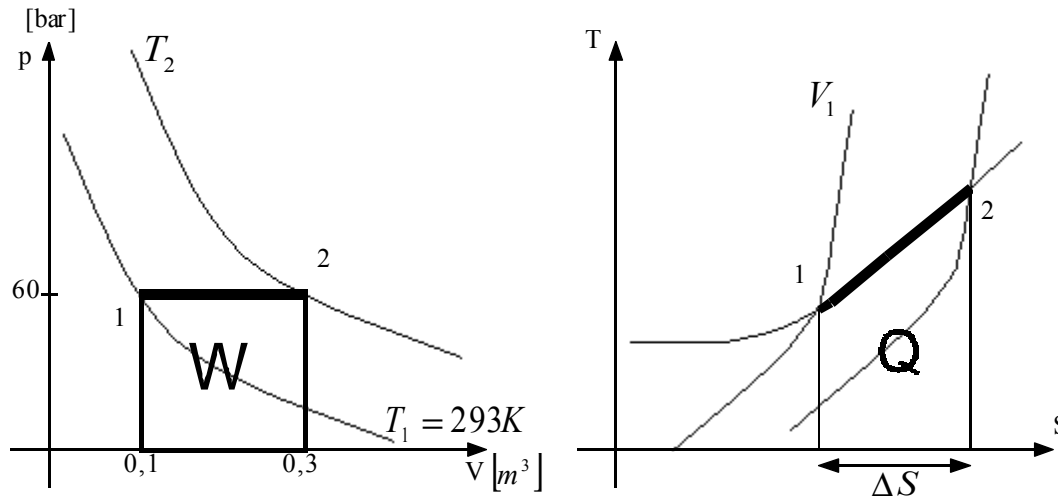
$$Mm = 28,96 \frac{kg}{kmol}$$

Come prima cosa calcoliamo la costante molare dei gas perfetti relativa all'aria che sarà:

$$R^* = \frac{R}{Mm} = \frac{8314 \frac{J}{kmolK}}{28,98 \frac{kg}{kmol}} = 287 \frac{J}{kgK}$$

Sfruttiamo ora la legge dei gas perfetti per ricavare la massa di aria in gioco. Conoscendo la pressione e il volume iniziali (indicati sul grafico) e utilizzando la formula con la costante molare si ottiene direttamente la quantità in chilogrammi sfruttando la seguente forma della relazione:

$$M = \frac{pV}{R^*T} = 7,14\text{kg}$$



Sfruttiamo ora la medesima equazione esplicitandola in modo da ricavare la temperatura ed utilizziamo i dati relativi al punto 2 (sia la massa che la pressione rimangono ovviamente le stesse); ricaviamo così la temperatura relativa alla seconda isoterma presente nella rappresentazione sul piano p,V:

$$T_2 = \frac{pV_2}{R^*M} = 879\text{K}$$

Cerchiamo ora la variazione di entalpia; consideriamo dunque la seguente espressione differenziale di tale potenziale termodinamico:

$$dH = dU + pdV + Vdp$$

Siccome siamo in presenza di una trasformazione isobara la pressione non varia e quindi quest'ultima relazione può essere scritta come segue:

$$dH = dU + pdV$$

Ricordiamo ora la seguente forma del primo principio della termodinamica:

$$dU = dQ - pdV$$

Combinando le ultime due relazioni scritte si ottiene:

$$dH = dQ$$

e quindi, integrando:

$$\Delta H = Q$$

Teniamo ora conto del fatto che l'aria è composta in gran parte di azoto ed ossigeno, entrambe molecole biatomiche, ciò significa che possiamo con ragionevolezza imporre che i calori massici a volume ed a pressione costanti per l'aria sia:

$$\begin{cases} c_V = \frac{5}{2} R^* \\ c_P = \frac{7}{2} R^* \end{cases}$$

Ricordando a questo punto l'espressione legata al calore possiamo ricavare in un sol colpo la variazione di entalpia ed il calore scambiato:

$$\Delta H = Q = Mc_P \Delta T = 4203\text{kJ}$$

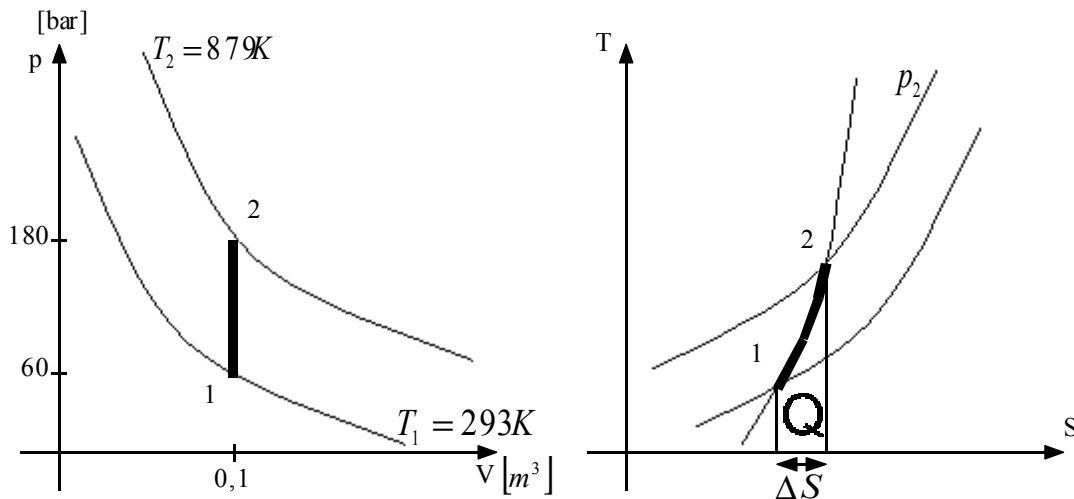
La variazione di energia interna sarà invece la seguente:

$$\Delta U = Mc_V \Delta T = 3003\text{kJ}$$

Sfruttiamo ora le definizioni classiche per ricavare il lavoro svolto e la variazione di entropia, si otterrà così:

$$\begin{cases} W_{1 \rightarrow 2} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p \Delta V = 1200 \text{ kJ} \\ \Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\partial Q}{dT} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{Mc_p dT}{T} = Mc_p \ln \frac{T_2}{T_1} = 7,88 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \end{cases}$$

Si valuti il lavoro svolto, la variazione di energia interna, il calore scambiato, la variazione di entalpia e di entropia nel corso della trasformazione isocora descritta nei due grafici seguenti per la medesima miscela di aria dell'esercizio precedente.



La massa di aria in questione, così come la costante massica dell'aria e i calori massici, è la medesima calcolata nell'esercizio precedente. Siccome si tratta di una trasformazione isocora, non può esserci lavoro e quindi il primo principio della termodinamica si può riscrivere come segue:

$$\Delta U = Q$$

Applicando allora la definizione di calore si ottiene:

$$\Delta U = Q = Mc_v \Delta T = 3002 \text{ kJ}$$

Il calcolo della variazione di entalpia avviene secondo la relazione:

$$\Delta H = Mc_p \Delta T = 4203 \text{ kJ}$$

Per calcolare la variazione di entropia utilizziamo la definizione classica ottenendo:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\partial Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{Mc_v dT}{T} = Mc_v \ln \frac{T_2}{T_1} = 5,62 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Utilizziamo ora quest'ultima relazione per una breve osservazione; riscriviamola innanzitutto in forma più generica:

$$S = Mc \ln T$$

Da questa relazione si può ricavare:

$$\ln T = \frac{S}{Mc}$$

ovvero:

$$T = e^{S/Mc}$$

Comprendiamo dunque come mai, essendo il calore massico a volume costante minore di quello a pressione costante, l'isocora abbia una pendenza maggiore rispetto all'isobara sul piano T,S.

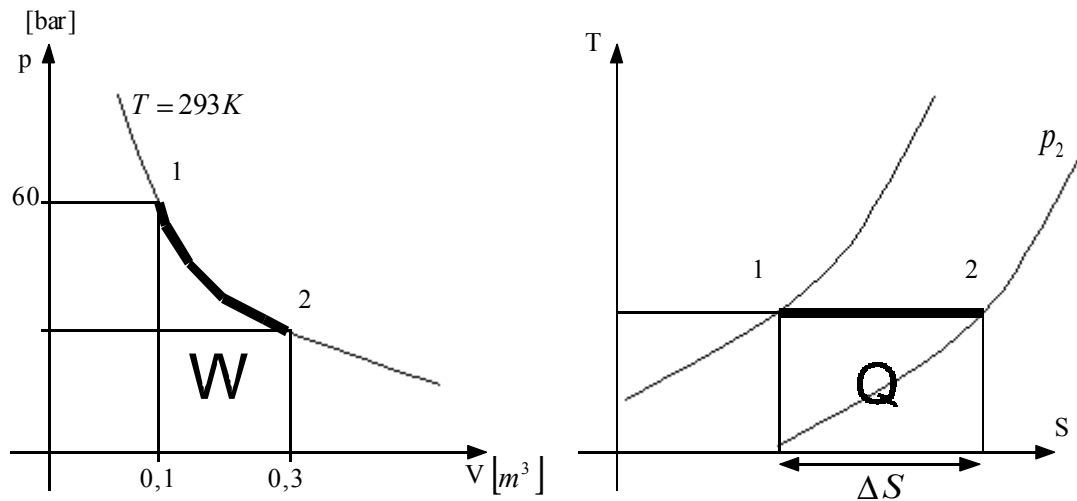
Valutare la pressione dello stato finale, il lavoro svolto, il calore scambiato e la variazione di energia interna e di entropia nella trasformazione indicata isoterma indicata nei due grafici della pagina seguente per la medesima miscela di aria prima vista.

Anche in questo caso la massa di aria, i calori massici e la costante massica sono identici a quelli degli esercizi precedenti. Siccome la temperatura non varia durante la trasformazione, vale la relazione secondo la quale:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_1}{V_2}$$

Da questa relazione appare evidente come sia già possibile ricavare l'unica pressione incognita; si avrà dunque:

$$p_2 = p_1 = \frac{V_1}{V_2} = 20 \text{ bar}$$



Sfruttiamo ora la relazione dei gas perfetti per esplicitare l'espressione della pressione, ottenendo:

$$p = \frac{MR * T}{V}$$

Valutiamo ora il lavoro prodotto tramite la definizione classica:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

Combinando le ultime due relazioni scritte si ottiene:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} \frac{MR * T}{V} dV = MR * T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = MR * T \ln \frac{V_2}{V_1} = 660 \text{ kJ}$$

Osserviamo ora la seguente relazione:

$$dU = c_v dT$$

dalla quale appare evidente che, nel caso di una trasformazione isoterma, la variazione di energia interna è nulla; ciò significa, combinando questa osservazione con il primo principio della termodinamica, che il calore scambiato nella trasformazione è pari al lavoro prodotto e quindi si avrà:

$$Q = W = 660 \text{ kJ}$$

Ricordiamo infine la relazione secondo la quale:

$$\partial Q = T dS$$

dalla quale, esplicitando rispetto alla variazione di entropia, si ottiene:

$$dS = \frac{1}{T} \partial Q$$

e quindi:

$$\Delta S = \int \frac{1}{T} \partial Q = \frac{1}{T} \int \partial Q = \frac{1}{T} Q = 2,25 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Si valuti la temperatura e la pressione finali, la variazione di energia interna, di entropia e di entalpia che caratterizzano la trasformazione adiabatica fatta dall'aria per soddisfare ai grafici della pagina seguente.

Stiamo sempre parlando della medesima massa d'aria e quindi, essendoci le medesime condizioni iniziali degli altri esercizi, i calori massici e la costante ridotta saranno i medesimi. Come prima cosa, dunque, ricordiamo che l'espressione di una trasformazione adiabatica è la seguente:

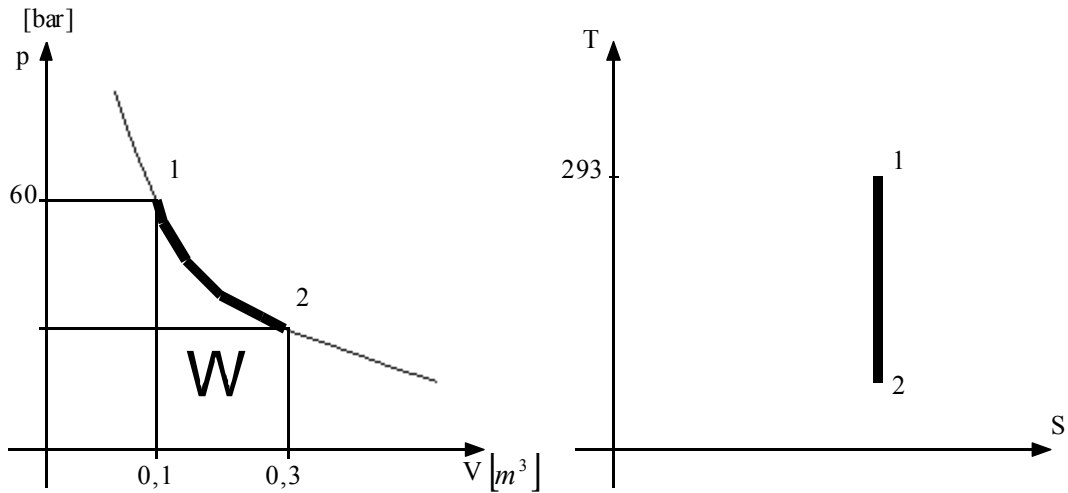
$$pV^\gamma = \text{const}$$

dove sia:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

nel nostro caso, quindi, si avrà:

$$\gamma = 1,4$$



Essendo una trasformazione adiabatica si potrà scrivere che:

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \quad (1)$$

dalla quale si ricava:

$$p_2 = p_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = 12,9 \text{ bar}$$

Si è già visto in precedenza (si veda la lezione numero 7) come, a partire dalla legge dei gas perfetti, sia possibile arrivare alla seguente relazione:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} \quad (2)$$

A partire dalla relazione (1), invece, si può dedurre la relazione seguente:

$$V_1^\gamma = \frac{p_2}{p_1} V_2^\gamma$$

dalla quale si ricava:

$$V_1 = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1/\gamma} V_2$$

Sostituendo dunque quest'ultima relazione nell'equazione (2) si ottiene:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

dalla quale è immediato ricavare la temperatura relativa allo stato finale:

$$T_2 = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 189 \text{ K}$$

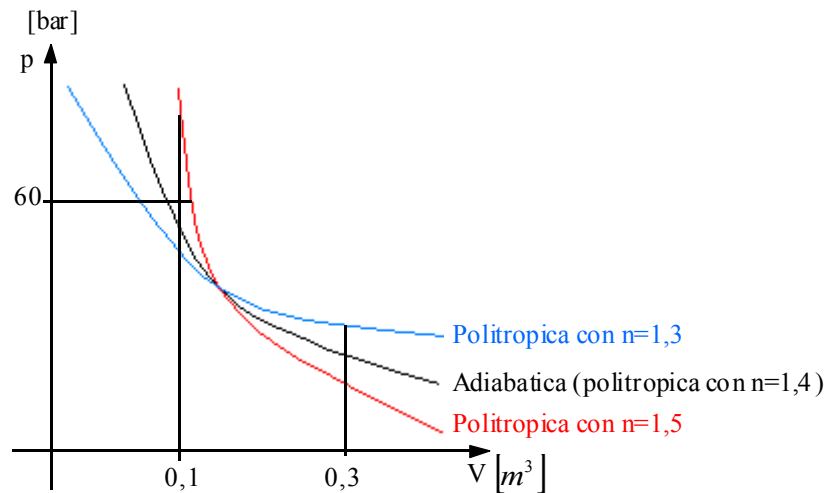
Come si può facilmente osservare dal grafico sul piano T,S, questa trasformazione non prevede variazione di entropia e quindi il calore scambiato sarà nullo; come conseguenza la variazione di energia interna dipenderà completamente dal lavoro svolto; si avrà allora:

$$W = \Delta U = M c_v \Delta T = -532 \text{ kJ}$$

La variazione di entalpia, invece, si ottiene sfruttando la seguente relazione:

$$\Delta H = M c_p \Delta T = -746 \text{ kJ}$$

Si valuti ora la temperatura e la pressione finali dell'aria, il calore scambiato, la variazione di energia interna, la variazione di entalpia, il lavoro svolto e la variazione di entropia legate alle due trasformazioni politropiche con  $n$  pari, rispettivamente ad 1,3 e ad 1,5 rappresentate nel grafico seguente e con le medesime condizioni iniziali viste negli esercizi precedenti.



Nel grafico viene rappresentata anche la trasformazione adiabatica che, come è noto, presenta un esponente pari ad 1,4; ciò permette un confronto relativo alle curve caratteristiche delle trasformazioni.

Innanzitutto osserviamo che, essendo le due trasformazioni in questione delle politropiche, varrà la seguente relazione:

$$p_1 V_1^n = p_2 V_2^n \quad (1)$$

Sfruttando la legge dei gas perfetti sappiamo, inoltre, come sia possibile giungere alla seguente relazione:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} \quad (2)$$

Facendo ora riferimento alla relazione (1) possiamo esplicitare una delle due pressioni nel modo seguente:

$$p_1 = p_2 \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^n \quad (3)$$

Combinando, quindi, le ultime due relazioni scritte, si ottiene:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1}$$

dalla quale si ricava:

$$T_2 = T_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} = \begin{cases} 211 \text{ K} & n = 1,3 \\ 169 \text{ K} & n = 1,5 \end{cases}$$

Torniamo ora a considerare la relazione (3) ed esprimiamola nel modo seguente:

$$p_2 = p_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^n = \begin{cases} 14,4 \text{ bar} & n = 1,3 \\ 11,5 \text{ bar} & n = 1,5 \end{cases}$$

Ricordiamo ora la definizione dell'esponente della politropica, secondo la quale:

$$n = \frac{c_X - c_P}{c_X - c_V}$$

dalla quale si ricava:

$$c_X = c_V \frac{n - k}{n - 1} = \begin{cases} -0,239 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} & n = 1,3 \\ 0,143 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} & n = 1,5 \end{cases}$$

A questo punto possiamo, sfruttando le definizioni, calcolare il calore scambiato come segue:



$$Q = Mc_x \Delta T = \begin{cases} 140 \text{ kJ} & n = 1,3 \\ -127 \text{ kJ} & n = 1,5 \end{cases}$$

La variazione di energia interna verrà invece ricavata sfruttando la seguente relazione:

$$\Delta U = Mc_v \Delta T = \begin{cases} -420 \text{ kJ} & n = 1,3 \\ -635 \text{ kJ} & n = 1,5 \end{cases}$$

La variazione di entalpia, invece, si ricava sfruttando la relazione seguente:

$$\Delta H = Mc_p \Delta T = \begin{cases} -588 \text{ kJ} & n = 1,3 \\ -889 \text{ kJ} & n = 1,5 \end{cases}$$

La variazione di entropia si ottiene tramite la seguente espressione:

$$\Delta S = Mc_x \ln \frac{T_2}{T_1} = \begin{cases} 4,045 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} & n = 1,3 \\ -4,056 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} & n = 1,5 \end{cases}$$

Conoscendo, infine, il calore scambiato e la variazione di energia interna, posso sfruttare il primo principio della termodinamica per ricavare il lavoro svolto come segue:

$$W = Q - \Delta U = \begin{cases} 560 \text{ kJ} & n = 1,3 \\ 508 \text{ kJ} & n = 1,5 \end{cases}$$

Un recipiente rigido, adiabatico ed impermeabile è internamente diviso in due sezioni separate. La prima sezione contiene 1kg di anidride carbonica ad una pressione di 1ata e ad una temperatura di 100°C. La seconda sezione contiene 0,3kg di elio ad una pressione di 3ata e ad una temperatura di 150°C. In un certo istante il setto che separava i due gas viene rimosso e questi possono miscelarsi. Si valuti il volume, la pressione e la temperatura finali della miscela, le pressioni parziali finali, la variazione complessiva dell'entropia ed il contributo a tale variazione apportato dall'entropia di miscelamento. Siano noti, inoltre, i due valori del calore specifico a volume costante per quanto riguarda l'anidride carbonica a 300 e 400 kelvin che, ottenuti sperimentalmente, sono pari rispettivamente 28,7 e 33,7. Osservando il sistema nella sua interezza possiamo notare come, essendo questo contenuto in un recipiente rigido, adiabatico ed impermeabile, prima e dopo la miscelazione non ci sarà nessuna differenza per quanto riguarda il volume, il numero di moli e l'energia interna, sono dunque valide le tre seguenti relazioni:

$$\begin{cases} U_i = U_f \\ V_i = V_f \\ N_i = N_f \end{cases}$$

Se consideriamo, invece, il sistema come composto dai due sottosistemi 1 (l'anidride carbonica) e 2 (l'elio), possiamo osservare come, essendo valida la proprietà di additività per il volume, il numero di moli e l'energia interna, si possono considerare le seguenti tre relazioni:

$$\begin{cases} U = U_1 + U_2 \\ V = V_1 + V_2 \\ N = N_1 + N_2 \end{cases}$$

La temperatura finale del sistema si otterrà sfruttando la seguente relazione:

$$N_1 c_{v1} (T_{i1} - T_f) = N_2 c_{v2} (T_f - T_{i2})$$

dalla quale si ricava:

$$T_f = \frac{N_1 c_{v1} T_{i1} + N_2 c_{v2} T_{i2}}{N_1 c_{v1} + N_2 c_{v2}} \quad (1)$$

Come prima cosa notiamo, dunque, che sono necessari i numeri di moli delle due specie chimiche presenti; per ricavare tale valore è opportuno prima valutare la massa molare dei due gas:

$$\begin{cases} Mm_1 = Ma_c + 2Ma_o \cong 44 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \\ Mm_2 = Ma_{He} \cong 4 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \end{cases}$$

Ora, conoscendo la massa e la massa molecolare dei due gas, si può facilmente ricavare il numero di moli:

$$\begin{cases} N_1 = \frac{M_1}{Mm_1} = 2,27 \cdot 10^{-2} \text{ kmol} \\ N_2 = \frac{M_2}{Mm_2} = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ kmol} \end{cases}$$

Con riferimento alla relazione (1) vediamo come sia necessario ricavare anche il calore specifico a volume costante relativo ai due gas. Per quanto riguarda l'elio, notiamo come questo, essendo un gas monoatomico, presenta un calore specifico a volume costante espresso dalla seguente relazione:

$$c_{V2} = \frac{3}{2} R = 12,471 \frac{\text{kJ}}{\text{kmolK}}$$

Per quanto riguarda, invece, l'anidride carbonica, il calore specifico a volume costante si otterrà tramite una estrapolazione lineare che si basi sui due valori sperimentali che vengono forniti nel testo. Tenendo dunque conto che l'elio è inizialmente ad una temperatura di 423K, il calore specifico a volume costante che stiamo cercando si otterrà con la seguente formula:

$$c_{V1} = \frac{33,7 - 28,7}{400 - 300} 423 + 28,7 - \frac{33,7 - 28,7}{400 - 300} 300 = 34,85 \frac{\text{kJ}}{\text{kmolK}}$$

Sostituiamo ora le ultime quattro relazioni scritte nell'equazione (1) e otteniamo il valore numerico della temperatura finale del sistema in analisi:

$$T_f = \frac{N_1 c_{V1} T_1 + N_2 c_{V2} T_2}{N_1 c_{V1} + N_2 c_{V2}} = 400 \text{ K}$$

Sfruttiamo ora la legge dei gas perfetti relativamente alle due metà del sistema iniziale ed esplicitiamola rispetto al volume, ottenendo:

$$\begin{cases} V_1 = \frac{p_1}{N_1 R T_1} = 0,718 \text{ m}^3 \\ V_2 = \frac{p_2}{N_2 R T_2} = 0,896 \text{ m}^3 \end{cases}$$

Ricordando la proprietà di additività del volume possiamo ricavare come segue il volume complessivo:

$$V_{Tot} = V_f = V_1 + V_2 = 1,614 \text{ m}^3$$

Conoscendo il numero di moli relativo alle due metà del sistema iniziale possiamo ricavare il numero complessivo di moli del sistema nello stato finale usando la relazione seguente:

$$N_{Tot} = N_1 + N_2 = 9,77 \cdot 10^{-2} \text{ kmol}$$

A questo punto, conoscendo il numero totale di moli, il volume complessivo e la temperatura finale, posso ricavare la pressione finale del sistema esplicitando rispetto alla pressione la legge dei gas perfetti relativa all'intero sistema:

$$p_f = \frac{N_{Tot} R T_f}{V_f} = 2,02 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 2,02 \text{ bar}$$

Sfruttando la medesima equazione, nella quale si sostituisca però il numero di moli relativo ai singoli componenti, si possono ottenere le pressioni parziali finali dei due gas:

$$\begin{cases} p_{f1} = \frac{N_1 R T_f}{V_f} = 0,47 \text{ bar} \\ p_{f2} = \frac{N_2 R T_f}{V_f} = 1,55 \text{ bar} \end{cases}$$

Ovviamente si può dimostrare come sia valida la legge di Dalton, infatti si può verificare numericamente come sia:

$$p_{Tot} = p_f = \sum_j p_{fj} = p_{f1} + p_{f2}$$

Dobbiamo ora valutare la variazione complessiva di entropia che si può ottenere tramite la seguente relazione:

$$\Delta S = S_f^{Tot} - S_i^{Tot}$$

Per calcolare l'entropia facciamo riferimento alla seguente formula:

$$S = \frac{N}{N_0} S_0 + N c_V \ln \frac{T}{T_0} + NR \ln \left( \frac{V}{V_0} \frac{N_0}{N} \right)$$

La variazione complessiva di entropia può essere calcolata anche come somma delle variazioni di entropia relative alle due componenti del sistema; si avrà allora, ricordando l'ultima relazione scritta:

$$\Delta S^{Tot} = (S_{1f} - S_{1i}) + (S_{2f} - S_{2i}) = N_1 c_{V1} \ln \frac{T_f}{T_1} + N_1 R \ln \frac{V_f}{V_1} + N_2 c_{V2} \ln \frac{T_f}{T_2} + N_2 R \ln \frac{V_f}{V_2} = 0,526 \frac{kJ}{K}$$

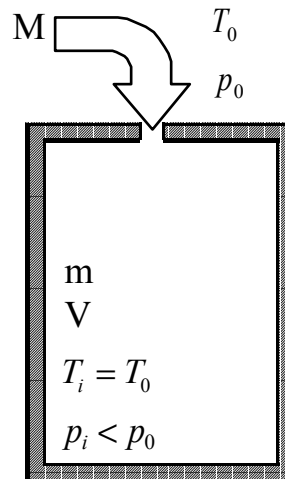
Il contributo alla variazione di entropia apportato dal miscelamento (che prenderà il nome di variazione di entropia di miscelamento) sarà invece dato dalla seguente relazione:

$$\Delta S_{Miscelamento} = N_1 R \ln \frac{N_{Tot}}{N_1} + N_2 R \ln \frac{N_{Tot}}{N_2} = 0,4403 \frac{kJ}{K}$$

Confrontando la variazione complessiva di entropia con il termine dovuto al miscelamento si osserva che quest'ultimo rappresenta il contributo maggiore; ciò è comprensibile osservando che la differenza di pressione e di volume iniziali dei due gas era molto piccola e quindi l'effetto maggiormente significativo che è avvenuto è il miscelamento chimico.

**Trasformazioni per i sistemi chiusi. Calori specifici. Teorema di Bernoulli. Il coefficiente di Joule-Thompson.**

Si consideri un contenitore adiabatico mantenuto a pressione e temperatura ambiente. Al suo interno è contenuta una massa  $m$  di aria ad una temperatura pari a quella esterna ma ad una pressione inferiore rispetto a quella esterna. Sulla superficie del contenitore viene praticato un foro attraverso il quale entra, a cause della differenza di pressione, una massa  $M$  di aria. Si calcoli la massa  $M$  di aria che è entrata, la temperatura finale dell'aria all'interno del contenitore e la variazione di entropia.



Come prima cosa osserviamo che il lavoro compiuto dal gas sarà uguale e opposto al lavoro compiuto dal resto dell'atmosfera, ovvero:

$$dW_{gas} = -dW_{atm} \quad (1)$$

Calcoliamo dunque il lavoro del gas tramite il calcolo del lavoro dell'atmosfera; si avrà dunque:

$$W_{atm} = \int_{V+V_0}^V p dV = p_0 V_0 = MR * T_0 \quad (2)$$

Siccome si tratta di una massa d'aria che entra nel contenitore, stiamo parlando di lavoro di pulsione. Concentriamoci ora sul primo principio secondo il quale si ha:

$$\Delta U_{gas} = Q - W$$

Siccome però il calore scambiato è trascurabile in quanto la variazione è molto rapida, rimane:

$$\Delta U_{gas} = -W$$

ovvero:

$$-W = (M + m)c_V(T_f - T_0)$$

Tenendo allora conto di quest'ultima relazione e della relazione (2), l'uguaglianza (1) può essere riscritta nel modo seguente:

$$MR * T_0 = (M + m)c_V(T_f - T_0)$$

dalla quale si ricava:

$$T_f = \frac{m}{m + M} T_0 + \frac{M}{m + M} \cdot \frac{c_P}{c_V} T_0$$

Definendo poi:

$$k = \frac{c_P}{c_V}$$

che, nel caso di una trasformazione adiabatica ha un valore numerico pari ad 1,4, si ricava:

$$T_f = \frac{m + kM}{m + M} T_0 \quad (3)$$

Si può tra l'altro osservare che:

$$\lim_{m \rightarrow 0} T_f = kT_0$$

Per calcolare la massa di aria  $M$  che è entrata nel contenitore dobbiamo fare riferimento alla differenza di pressione tra l'interno e l'esterno del contenitore stesso. Dividiamo dunque la relazione (3) per la temperatura iniziale, ottenendo:

$$\frac{T_f}{T_0} = \frac{m + kM}{m + M} = \frac{1 + k\left(\frac{M}{m}\right)}{1 + \left(\frac{M}{m}\right)} \quad (4)$$

Sfruttiamo ora l'equazione dei gas perfetti e osserviamo che si avrà:

$$\begin{cases} m = \frac{p_i V}{R^* T_0} \\ m + M = \frac{p_0 V}{R^* T_f} \end{cases}$$

dalle quali si ricava che:

$$\frac{M}{m} = \frac{p_0 T_0}{p_i T_f} - 1 \quad (5)$$

Sostituendo dunque quest'ultima relazione nell'espressione (4) si ottiene:

$$\frac{T_f}{T_0} = \frac{1 + k\left(\frac{p_0 T_0}{p_i T_f} - 1\right)}{1 + \left(\frac{p_0 T_0}{p_i T_f} - 1\right)}$$

Per semplicità di notazione poniamo ora che sia:

$$\begin{cases} \pi = \frac{p_0}{p_i} \\ \mu = \frac{M}{m} \\ \tau = \frac{T_f}{T_0} \end{cases}$$

In questo modo le relazioni (4) e (5) possono rispettivamente essere riscritte nel modo seguente:

$$\begin{cases} \tau = \frac{1 + k\mu}{1 + \mu} \\ \mu = \frac{\pi}{\tau} - 1 \end{cases}$$

Risolviamo l'ultimo sistema scritto eliminando la  $\mu$  e ottenendo di conseguenza:

$$\tau = \frac{k\pi}{\pi + k - 1}$$

che equivale a scrivere:

$$\frac{T_f}{T_0} = \frac{k\left(\frac{p_0}{p_i}\right)}{\left(\frac{p_0}{p_i}\right) + k - 1}$$

Una volta ricavata la  $\tau$  è allora possibile ricavare la  $\mu$  ottenendo:

$$\mu = \frac{\pi - 1}{k}$$

che corrisponde a scrivere:

$$\frac{M}{m} = \frac{\left(\frac{p_0}{p_i}\right)^{-1}}{k}$$

da cui si ricava:

$$M = m \left[ \frac{\left(\frac{p_0}{p_i}\right)^{-1}}{k} \right]$$

Per ricavare, infine, la variazione di entropia, sfruttiamo la seguente relazione:

$$\Delta s = c_v \ln \frac{T_f}{T_i} + R \ln \frac{v_f}{v_i} = c_p \ln \frac{T_f}{T_i} - R \ln \frac{p_f}{p_i}$$

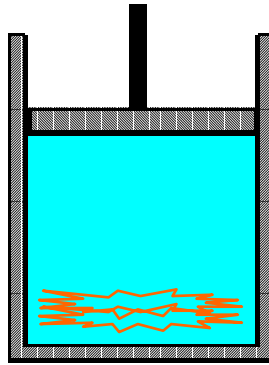
Nel caso in questione si avrà:

$$\Delta S = \Delta S_{est} + \Delta S_{int}$$

ovvero:

$$\Delta S = Mc_p \ln \frac{T_f}{T_0} + m \left( c_p \ln \frac{T_f}{T_0} - R \ln \frac{p_0}{p_i} \right)$$

Si consideri un cilindro adiabatico contenente della paglietta di rame di massa  $m$  e del gas di massa  $M$ . Il gas viene compresso grazie ad un pistone anch'esso adiabatico. Nell'ipotesi che ci sia omotermia tra il gas e il rame e che il tutto avvenga in regime di quasistaticità, valutare che tipo di trasformazione subisce il gas.



Partiamo prima di tutto considerando l'ipotesi di omotermia tra il gas e il rame, dalla quale ricaviamo che:

$$dT_{gas} = dT_{Cu} \quad (6)$$

e quindi:

$$T_{gas} = T_{Cu}$$

A priori si può solo dire che la trasformazione subita dal rame è una trasformazione a volume costante (anche considerando alte pressioni si arriverà a comprimere la paglietta con il pistone prima che la paglietta venga compressa a causa della pressione) e quindi si avrà:

$$c_{Cu} = \frac{1}{m} \left( \frac{\partial Q_{Cu}}{\partial T} \right)_v$$

Il calore scambiato dalla paglietta di rame è dunque dato dalla relazione:

$$\partial Q_{Cu} = mc_{Cu} dT_{Cu} = mc_v dT_{Cu}$$

Per quanto riguarda, invece, il gas, non è possibile dire niente e quindi si avrà:

$$c_{gas} = \frac{1}{M} \left( \frac{\partial Q_{gas}}{\partial T} \right)_x$$

e quindi il calore scambiato dal gas è:

$$\partial Q_{gas} = Mc_{gas} dT_{gas} = Mc_x dT_{gas}$$

Siccome il contenitore e il pistone sono adiabatici non potrà che essere:

$$\partial Q_{Cu} = -\partial Q_{gas}$$

ovvero:

$$mc_V dT_{Cu} = -Mc_x dT_{gas}$$

Combinando quest'ultima relazione con la relazione (6) si ottiene:

$$mc_V dT_{Cu} = -Mc_x dT_{Cu}$$

e quindi:

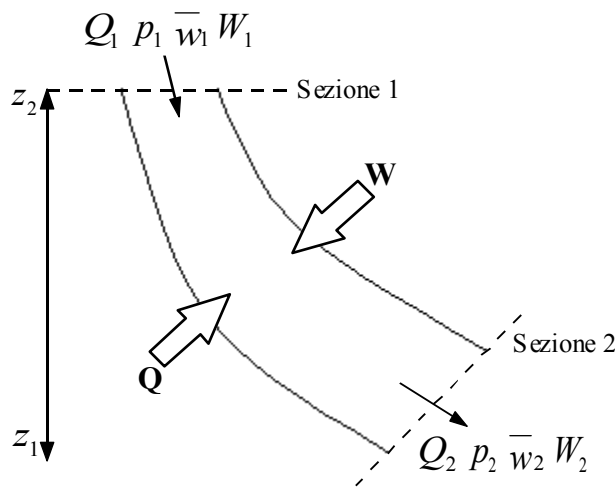
$$mc_V = -Mc_x$$

dalla quale si ricava:

$$c_x = -c_V \frac{m}{M}$$

Il calore specifico a volume costante per il rame è positivo, come conseguenza  $c_x$  risulterà negativo e ciò significa che fornendo calore alla massa di gas la sua temperatura diminuisce in quanto il calore che viene fornito dal pistone al gas viene ceduto alla paglietta di rame.

Si consideri il grafico seguente e si studi la situazione ivi rappresentata.



Come prima cosa estendiamo il primo principio della termodinamica al caso qui rappresentato e consideriamo la seguente relazione:

$$\Delta E_k + \Delta E_p + \Delta U = Q_{Tot} + W_{Tot} \quad (7)$$

dove sia:

$$\begin{cases} \Delta E_k = \frac{1}{2} M (\overline{w_2^2} - \overline{w_1^2}) \\ \Delta E_p = Mg(z_2 - z_1) \\ \Delta U = M(u_2 - u_1) \\ W_{tot} = W_1 - W_2 + W = Mp_1 v_1 - Mp_2 v_2 + W \\ Q_{tot} = Q_1 - Q_2 + Q \end{cases}$$

dove si è definita la portata nel modo seguente:

$$M = \frac{m}{t}$$

Dividiamo ora la relazione (7) per il tempo e combiniamola con le relazioni che appaiono nell'ultimo sistema scritto; si otterrà così:

$$\frac{1}{2} \dot{M} (\overline{w_2^2} - \overline{w_1^2}) + \dot{M} g(z_2 - z_1) + \dot{M} (u_2 - u_1) - \dot{M} (p_2 v_2 - p_1 v_1) = \dot{Q} + \dot{W} \quad (8)$$

Ricordando la seguente espressione dell'entalpia

$$h = u + pv$$

possiamo combinare le ultime due relazioni scritte ed ottenere:

$$\frac{1}{2} \dot{M} (w_2^2 - w_1^2) + \dot{M} g(z_2 - z_1) + \dot{M} (h_2 - h_1) = \dot{Q} + \dot{W}$$

Mettiamoci ora nella situazione in cui si consideri una trasformazione isoentropica per un fluido incomprimibile: si avrà:

$$\begin{cases} ds = 0 \\ dv = 0 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che:

$$du = Tds - pdv = 0$$

e quindi:

$$u_1 = u_2$$

La relazione (8) assume dunque la seguente forma:

$$\frac{1}{2} \dot{M} (w_2^2 - w_1^2) + \dot{M} g(z_2 - z_1) - \dot{M} (p_2 v_2 - p_1 v_1) = \dot{Q} + \dot{W}$$

Mettiamoci nell'ipotesi aggiuntiva secondo la quale:

$$\dot{Q} = \dot{W} = 0$$

da cui deriva:

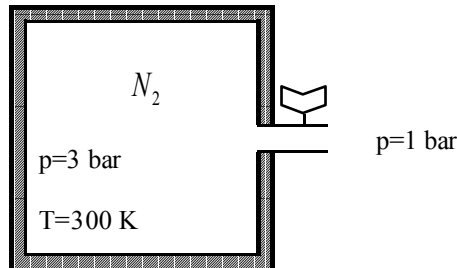
$$\frac{1}{2} \dot{M} (w_2^2 - w_1^2) + \dot{M} g(z_2 - z_1) - \dot{M} (p_2 v_2 - p_1 v_1) = 0$$

Tale relazione può essere riscritta nella seguente maniera:

$$\frac{1}{2} \dot{M} w_2^2 + \dot{M} g z_2 + \dot{M} p_2 v_2 = \frac{1}{2} \dot{M} w_1^2 + \dot{M} g z_1 + \dot{M} p_1 v_1$$

Tale relazione prende anche il nome di teorema di Bernoulli.

Un contenitore chiuso tramite una valvola contiene azoto alla pressione di 3 bar ed alla temperatura di 300 K. Ad un certo istante la valvola viene aperta ed il gas fuoriesce dal contenitore all'esterno dove la pressione è la pressione atmosferica pari ad 1 bar. Valutare la velocità con la quale fuoriesce il gas.



Come prima cosa è necessario osservare che siamo in presenza di una espansione libera e quindi si tratta di una trasformazione isoentropica. Consideriamo dunque il teorema di Bernoulli nella sua forma più generica secondo il quale:

$$\frac{1}{2} \dot{M} w_2^2 + \dot{M} g z_2 + \dot{M} p_2 v_2 + \dot{M} u_2 - \frac{1}{2} \dot{M} w_1^2 - \dot{M} g z_1 - \dot{M} p_1 v_1 - \dot{M} u_1 = \dot{Q} + \dot{W}$$

Nel caso in analisi tale espressione si semplifica in maniera rilevante in quanto si ha:

$$\begin{cases} z_1 = z_2 \\ w_1 = 0 \\ \dot{Q} = 0 \\ \dot{W} = 0 \end{cases}$$

e quindi ci si riduce ad avere:

$$\frac{1}{2} \dot{M} w_2^2 + \dot{M} p_2 v_2 + \dot{M} u_2 = \dot{M} p_1 v_1 + \dot{M} u_1$$

ovvero:



$$\frac{1}{2}w_2^2 + p_2v_2 + u_2 = p_1v_1 + u_1$$

Ricordando poi la relazione:

$$h = u + pv$$

si ottiene:

$$\frac{1}{2}w_2^2 + h_2 = h_1$$

dalla quale si ricava:

$$\bar{w}_2 = \sqrt{2(h_1 - h_2)}$$

Ricordiamo ora la relazione secondo la quale:

$$\Delta h = c_p \Delta T \quad (9)$$

e quindi avremo:

$$\bar{w}_2 = \sqrt{2c_p(T_1 - T_2)}$$

Dobbiamo osservare che la relazione (9) vale solo nel caso di trasformazioni isobare. Noi la utilizziamo perché siamo interessati all'iniziale velocità con la quale il gas fluisce dal contenitore all'atmosfera esterna e quindi ci concentriamo solo su un istante relativamente breve durante il quale si suppone che la pressione non vari in maniera apprezzabile. Ricordando inoltre che:

$$c_p = \frac{7}{2}R$$

si ricava:

$$\bar{w}_2 = \sqrt{7R(T_1 - T_2)}$$

Dobbiamo ora ricavare la temperatura finale. Per fare questo ricordiamo quanto detto sulle trasformazioni politropiche per le quali valeva la relazione:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^m$$

Siccome siamo in presenza di una trasformazione isoentropica tale relazione si modifica nel modo seguente:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-k}{k}}$$

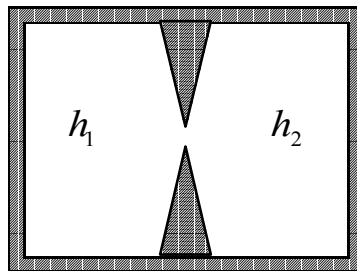
con  $k$  pari ad 1,4; si avrà dunque:

$$T_2 = T_1 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-k}{k}} = 219,18K$$

Ricordando allora che la massa molecolare dell'azoto è pari a 28 si ottiene:

$$\bar{w}_2 = \sqrt{7R(T_1 - T_2)} = \sqrt{7 \frac{8314}{28} (300 - 219,18)} = 409,9 \frac{m}{s}$$

Si consideri il seguente sistema nel quale si suppone che l'entalpia, ad una certa distanza dal restringimento, sia uguale da entrambi i lati del sistema. Studiare quanto avviene con particolare attenzione al comportamento della temperatura nel caso che si sia in presenza di un gas ideale o di un gas reale.



Siccome l'entalpia è considerata uguale da entrambi i lati, possiamo parlare di una laminazione isoentalpica e quindi sarà valida la relazione:

$$h_1 = h_2$$

ovvero:

$$u_1 + p_1 v_1 = u_2 + p_2 v_2$$

Siccome, inoltre, le pareti del sistema sono adiabatiche, varrà anche la seguente relazione:

$$\Delta U = W$$

Ricordiamo ora la definizione del coefficiente di Joule-Thompson che esprime la variazione di temperatura in un sistema come questo e secondo il quale si ha:

$$J = \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_h = \frac{v(\alpha T - 1)}{c_p}$$

Nel caso dei gas ideali, questa relazione deve essere combinata con l'espressione seguente:

$$\alpha = \frac{1}{T} \quad (10)$$

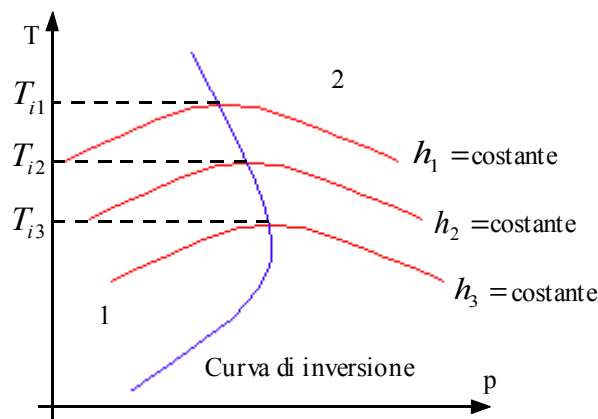
da cui si ricava:

$$J = 0$$

Nel caso dei gas ideali, quindi, la laminazione isoentalpica è una trasformazione isoterma. Nel caso dei gas reali, invece, la relazione (10) si verifica solamente ad una certa temperatura (caratteristica del gas che si sta utilizzando) detta temperatura di inversione; si avrà dunque:

$$\begin{cases} \{T > T_i\} \Rightarrow \{J < 0\} \\ \{T < T_i\} \Rightarrow \{J > 0\} \end{cases}$$

Sfruttando questa proprietà, dunque, è possibile far passare del gas attraverso una strozzatura facendogli diminuire la temperatura. Una rappresentazione grafica di quanto avviene nel caso del gas reale è la seguente:



Nella zona 1 si avrà dunque espansione con riscaldamento mentre nella zona 2 si avrà espansione con raffreddamento.

**La potenza. Il lavoro utile e il lavoro di pulsione. Cicli termodinamici. Il rendimento. La velocità del suono. Motori per uso aerodinamico.**

Come prima cosa ricordiamo che l'espressione della potenza totale è la seguente:

$$\dot{W}_{Tot} = \frac{\dot{W}_u}{\dot{M}}$$

dove al numeratore troviamo il lavoro utile (ovvero il lavoro che va dalla macchina al fluido o viceversa); se poi aggiungiamo il lavoro di pulsione, ovvero il lavoro necessario per spingere il fluido nel condotto, otteniamo:

$$w_u + p_1 v_1 - p_2 v_2 = -\int p dv$$

da cui si ricava:

$$w_u = -\int p dv - p_1 v_1 + p_2 v_2 = \int v dp$$

Supponendo di occuparci di una situazione in cui venga introdotto sia lavoro che calore avremo un'equazione di bilancio del tipo:

$$u_1 + p_1 v_1 + w_u + q = u_2 + p_2 v_2$$

ovvero:

$$h_1 + w_u + q = h_2$$

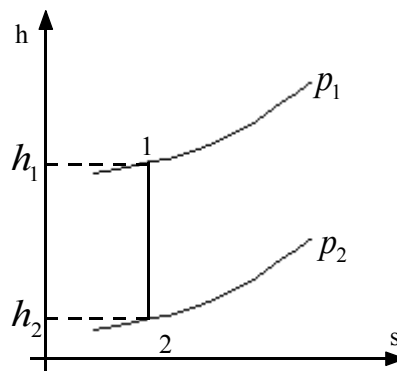
Nel caso, invece, che si sia in presenza di una trasformazione adiabatica, allora non sarà possibile alcuno scambio di calore e quindi si avrà:

$$h_1 + w_u = h_2$$

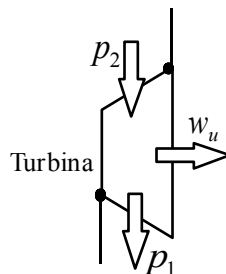
dalla quale si ricava:

$$w_u = h_2 - h_1 \quad (1)$$

Da un punto di vista grafico possiamo allora riassumere quanto detto con il seguente disegno:



Tale grafico rappresenta la seguente situazione:



Qualora invece si entri nella macchina con una pressione inferiore alla pressione di uscita, allora abbiamo ancora un lavoro utile ed una variazione di entalpia ma stiamo parlando di un compressore (se c'è del gas) o di una pompa (se c'è del liquido). Nel piano (p,V) il lavoro utile sarà espresso come si nota nella prima immagine della pagina seguente.

Calcoliamo ora quanto lavoro utile è estraibile da una massa finita ad una temperatura elevata; consideriamo dunque la situazione mostrata nella seconda immagine della pagina seguente. Poniamo dunque che la temperatura più bassa del ciclo sia quasi coincidente con la temperatura della sorgente fredda e anche che la temperatura più alta del ciclo corrisponda con la temperatura della sorgente calda. Avremo dunque:

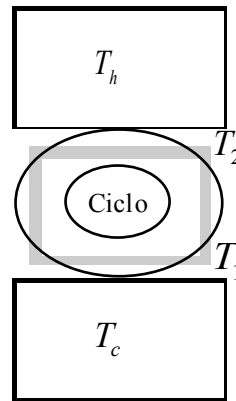
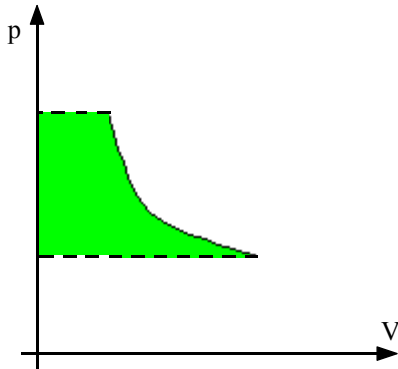
$$W = Q_h - Q_c = \eta_{rev} Q_h$$

Combiniamo ora tale relazione con le seguenti due:

$$\begin{cases} Q_h = Mc_p(T_h - T_2) \\ \eta_{rev} = 1 - \frac{T_c}{T_2} \end{cases}$$

Si ottiene così:

$$W = \left(1 - \frac{T_c}{T_2}\right) Mc_p(T_h - T_2)$$



Se vogliamo ora massimizzare il lavoro utile dobbiamo considerare la seguente derivata:

$$\frac{\partial W}{\partial T_2} = Mc_p T_h T_1 T_2^{-1} - Mc_p = Mc_p \left[ \frac{(T_h T_1)}{T_2^2} - 1 \right]$$

Annullando tale derivata si ottiene:

$$\frac{T_h T_1}{T_2^2} - 1 = 0$$

in quanto sicuramente la massa e il calore specifico non possono essere nulli. Si avrà allora:

$$T_2^2 = T_h T_1$$

e quindi:

$$T_2 = \sqrt{T_h T_1}$$

Questa è una relazione che vale per tutti i cicli reversibili; questa temperatura è appunto quella che mi permette di estrarre il massimo del lavoro utile dal sistema. Per quanto riguarda le situazioni limite osserviamo che, se si avesse:

$$T_2 = T_h$$

allora si avrebbe:

$$\begin{cases} Q_h = 0 \\ W = 0 \end{cases}$$

Saremmo dunque in una situazione di rendimento massimo nella quale, però, non estraendo energia non estraggo nemmeno lavoro. Nel caso invece in cui si avesse:

$$T_2 = T_c$$

allora si avrebbe:

$$\begin{cases} Q_h = \max \\ W = 0 \end{cases}$$

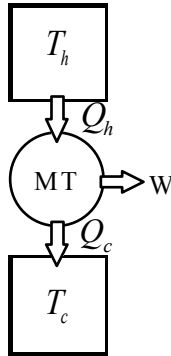
In questo caso il rendimento sarebbe nullo: estraiamo dunque tanta energia ma non siamo in grado di convertirla.

Consideriamo il sistema rappresentato nella pagina seguente e verifichiamo se le quattro trasformazioni proposte nella tabella che segue sono possibili o meno.

Siano dati anche i seguenti valori numerici relativi alle temperature:

$$\begin{cases} T_h = 1000K \\ T_c = 300K \end{cases}$$

	$\dot{Q}_h$ [kcal/h]	$\dot{Q}_c$ [kcal/h]	$ \dot{W} $ [MW]
1	$10^6$	$3 \cdot 10^5$	1
2	$10^6$	$1,4 \cdot 10^5$	1
3	$10^6$	$3 \cdot 10^5$	0,814
4	$10^6$	$5 \cdot 10^5$	0,582



Come prima cosa trasformiamo tutte le grandezze usando le unità di misura del S.I.; si otterrà così:

$$\begin{cases} \dot{Q}_h = 1,163 MW \\ \dot{Q}_{c1} = \dot{Q}_{c3} = 0,349 MW \\ \dot{Q}_{c2} = 0,163 MW \\ \dot{Q}_{c4} = 0,581 MW \end{cases}$$

Dobbiamo ora fare i bilanci di primo e di secondo principio su tutti e quattro i ciclo proposti

1) Nel caso del primo ciclo il bilancio di primo principio prevede che si abbia:

$$W = Q_h - Q_c = 1,163 - 0,349 = 0,814 MW$$

Si nota dunque immediatamente che il ciclo proposto non è realizzabile.

2) Nel caso del secondo ciclo il bilancio di primo principio non contrasta con la realizzabilità del ciclo, in quanto si ha:

$$W = Q_h - Q_c = 1,163 - 0,163 = 1 MW$$

Vediamo allora se anche il bilancio di secondo principio è soddisfatto. Consideriamo dunque la seguente relazione:

$$\Delta S_{Tot} = -\frac{|Q_h|}{T_h} + \frac{|Q_c|}{T_c} = -\frac{1,163}{1000} + \frac{0,163}{300} < 0$$

Siccome la variazione complessiva di entropia risulta negativa (cosa impossibile) siamo indotti a dire che il secondo dei cicli considerati non è accettabile.

3) Concentriamoci sul terzo ciclo; per quanto riguarda il bilancio di primo principio si ha:

$$W = Q_h - Q_c = 1,163 - 0,349 = 0,814 MW$$

e quindi il bilancio di primo principio è verificato. Per quanto riguarda invece il bilancio di secondo principio si avrà:

$$\Delta S_{Tot} = -\frac{|Q_h|}{T_h} + \frac{|Q_c|}{T_c} = -\frac{1,163}{1000} + \frac{0,349}{300} = 0$$

Possiamo dunque dire che questo ciclo è possibile ed è un ciclo totalmente reversibile in quanto la variazione totale di entropia è nulla. Ovviamente un ciclo come questo è irrealizzabile nella realtà.

4) Per quanto riguarda, infine, il quarto dei cicli proposti, il bilancio di primo principio afferma che:

$$W = Q_h - Q_c = 1,163 - 0,581 = 0,582 MW$$

e quindi è verificato. Il bilancio di secondo principio, invece, afferma che:

$$\Delta S_{Tot} = -\frac{|Q_h|}{T_h} + \frac{|Q_c|}{T_c} = -\frac{1,163}{1000} + \frac{0,581}{300} > 0$$

Possiamo dunque dire che questo ciclo è possibile ed è realizzabile nella realtà (essendo un ciclo nel quale c'è produzione di entropia e quindi un ciclo irreversibile).

E' importante osservare che nella tabella sono stati assegnati valori relativi alle potenze ma che questo non crea problemi nella valutazione del bilancio entropico. E' anche importante osservare che il primo principio viene applicato sulla macchina mentre il secondo principio viene applicato alle sorgenti; infatti si ha:

$$\Delta S_{Tot} = \Delta S_{Sorg} + \Delta S_{Mac}$$

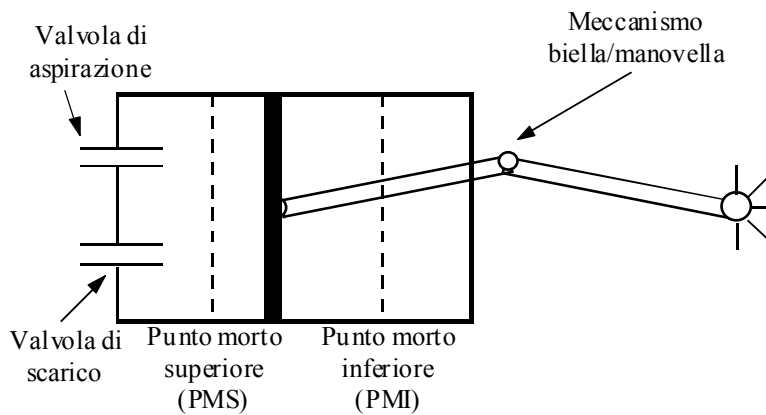
ponendo però:

$$\Delta S_{Mac} = 0$$

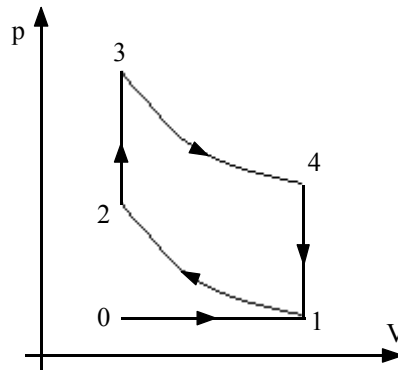
si ricava:

$$\Delta S_{Tot} = \Delta S_{Sorg}$$

Si consideri il ciclo Otto compiuto dal seguente meccanismo:



Tale meccanismo non è altro che la sezione del pistone di un motore; il ciclo compiuto da questo dispositivo è dato nel grafico seguente:



Si avrà allora che:

nel tratto 0→1 si ha una trasformazione isobara nella quale avviene l'aspirazione della miscela di carburante;

nel tratto 1→2 si ha una trasformazione adiabatica durante la quale il pistone comprime il gas fino al PMS;

nel tratto 2→3 si ha una trasformazione isocora nella quale avviene l'effettiva combustione del carburante;

nel tratto 3→4 si è in presenza di una trasformazione adiabatica nella quale si assiste all'espansione del gas fino al PMI;

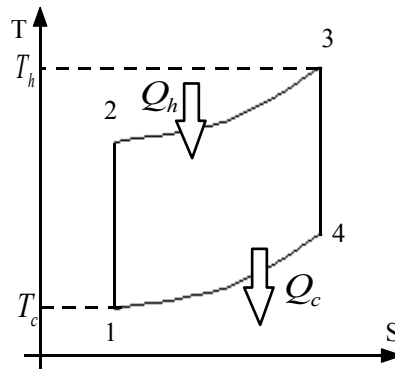
nel tratto 4→1 si ha, infine, una trasformazione isocora nella quale viene aperta la valvola di scarico

Sul piano (T,S) il medesimo ciclo Otto sarà rappresentato come si vede nella prima illustrazione della pagina seguente; dati allora i seguenti dati numerici:

$$\begin{cases} T_c = 300K \\ T_h = 1500K \\ r = 9 \end{cases}$$

(dove con "r" si è indicato il rapporto di compressione) valutare i rendimenti del ciclo assegnato.  
 Osserviamo, prima di tutto, che in generale il rendimento di un ciclo Otto è dato dalla seguente relazione:

$$\eta = 1 - \frac{1}{r^{k-1}}$$



Come prima cosa consideriamo la relazione secondo la quale:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{k-1}$$

dalla quale si ricava:

$$T_2 = T_1 r^{k-1} = 300 \cdot 9^{0,4} = 722K \quad (2)$$

Sfruttiamo poi la proprietà dei cicli simmetrici secondo la quale:

$$T_1 T_3 = T_2 T_4$$

dalla quale si ricava:

$$T_4 = \frac{T_1 T_3}{T_2}$$

Combinando poi questa relazione con la (2) si ottiene:

$$T_4 = \frac{T_1 T_3}{T_1 r^{k-1}} = \frac{T_h}{r^{k-1}} = 623K$$

Ora che conosciamo tutte le temperature possiamo ricavare i calori scambiati tramite le seguenti due relazioni:

$$\begin{cases} Q_h = c_v (T_3 - T_2) = \frac{5}{2} \cdot 287 \frac{J}{kgK} (1500K - 722K) = 558 \frac{kJ}{kg} \\ Q_c = c_v (T_1 - T_4) = \frac{5}{2} \cdot 287 \frac{J}{kgK} (300K - 623K) = -232 \frac{kJ}{kg} \end{cases}$$

dunque il rendimento sarà:

$$\eta = 1 - \frac{232}{558} = 0,585$$

mentre il rendimento del ciclo reversibile è:

$$\eta_{rev} = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 0,8$$

Calcoliamo ora la variazione complessiva di entropia tramite la seguente relazione:

$$\Delta S_{Tot} = -\frac{|Q_h|}{T_h} + \frac{|Q_c|}{T_c} = -\frac{558}{1500} + \frac{232}{300} = 0,401 \frac{kJ}{kgK}$$

Possiamo dunque ricalcolare il rendimento sfruttando la seguente relazione:

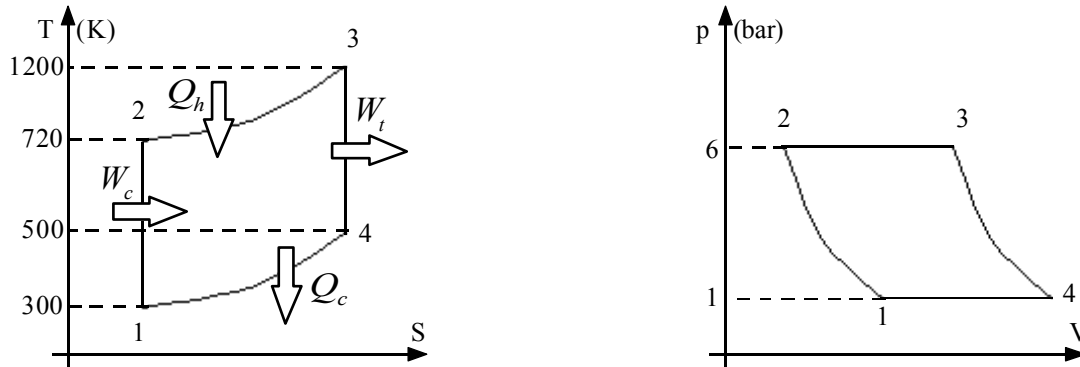
$$\eta^* = \eta_{rev} - \frac{T_c \Delta S}{Q_h} = 0,8 - \frac{300 \cdot 0,401}{558} = 0,585$$

Il rendimento di secondo principio si calcherà allora nel modo seguente:

$$\frac{\eta}{\eta_{rev}} = \frac{0,585}{0,8} = 0,73$$

Tale rapporto mi dice quanto perdiamo a causa dell'irreversibilità ovvero con quanta efficienza si sta sfruttando la sorgente.

Dato il ciclo di Joule rappresentato nei piani (T,S) e (p,V) nei due diagrammi seguenti:



si valuti il rendimento.

Come prima cosa osserviamo come, con i dati forniti dai grafici, sia molto facile trovare il rapporto di compressione che sarà:

$$\rho = \frac{p_2}{p_1} = 6$$

Il rendimento sarà allora:

$$\eta = 1 - \left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{k-1}{k}} = 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} = 0,4$$

Osserviamo che il problema sarebbe stato ben determinato anche se fossero state assegnate solo le temperature estreme; le temperature mancanti, infatti, avrebbero potuto essere ricavate sfruttando le due seguenti relazioni:

$$\begin{cases} T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} = 300K \cdot (6)^{0,286} = 500K \\ T_4 = \frac{T_1 T_3}{T_2} = \frac{300 \cdot 1200}{500} K = 720K \end{cases}$$

Siccome conosciamo tutte le temperature possiamo ricavare i calori scambiati tramite le seguenti due relazioni:

$$\begin{cases} Q_h = c_p (T_3 - T_2) = 1 \frac{kJ}{kgK} (1200 - 500)K = 700 \frac{kJ}{kg} \\ Q_c = c_p (T_1 - T_4) = 1 \frac{kJ}{kgK} (300 - 720)K = 420 \frac{kJ}{kg} \end{cases}$$

Il rendimento potrà allora essere calcolato anche sfruttando la seguente relazione:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|} = 1 - \frac{420}{700} = 0,4$$

Il lavoro complessivo sarà invece dato come segue:

$$W = Q_h - |Q_c| = 280 \frac{kJ}{kg}$$

Calcoliamo ora separatamente il lavoro della turbina (che è un lavoro entrante) e il lavoro del compressore (che è un lavoro uscente); si avrà quindi:



$$\begin{cases} W_t = h_3 - h_4 = c_p (T_3 - T_4) = 1(1200 - 720) = 480 \frac{kJ}{kg} \\ W_c = h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1) = 1(500 - 300) = 200 \frac{kJ}{kg} \end{cases}$$

Si osservi che, ovviamente, facendo la differenza tra questi due valori si ritrova il lavoro complessivo precedentemente identificato. Vediamo ora qual è la variazione complessiva di entropia:

$$\Delta S_{tot} = -\frac{700}{1200} + \frac{420}{300} = 0,817 \frac{kJ}{kgK}$$

Calcoliamo ora il rendimento del ciclo reversibile, che sarà:

$$\eta_{rev} = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{300}{1200} = 0,75$$

Il rendimento del ciclo può allora essere calcolato anche nel modo seguente:

$$\eta^* = \eta_{rev} - \frac{T_c \Delta S}{Q_h} = 0,75 - \frac{300 \cdot 0,817}{700} = 0,4$$

Il rendimento di secondo principio sarà allora:

$$\eta_{II} = \frac{\eta^*}{\eta_{rev}} = \frac{0,4}{0,75} = 0,53$$

Si osservi che, fino a quando la temperatura del punto 4 è maggiore della temperatura del punto 2, è possibile prendere i gas combusti espulsi dal sistema, metterli a contatto con uno scambiatore di calore e sfruttarli come rigeneratori nel tratto 2→3.

Calcolare la velocità del suono relativa all'azoto molecolare ad una temperatura di 27°C ma trattato come se fosse un gas ideale.

La velocità del suono sarà:

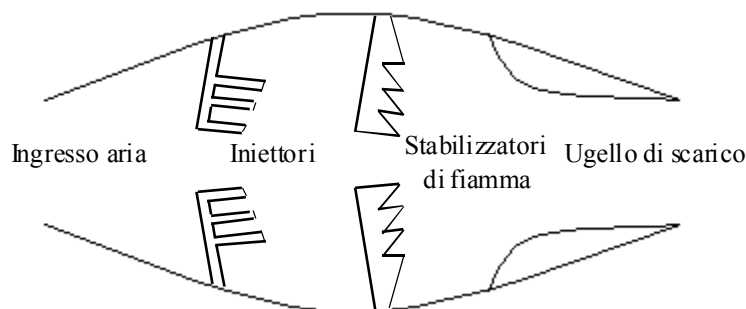
$$c = \sqrt{\gamma R^* T} = \sqrt{\frac{c_p}{c_v} \frac{R}{Mm} T} = \sqrt{1,4 \frac{8,314 J/kmolK}{28 kg/kmol} 300K} = 353,14 \frac{m}{s} = 1270,8 \frac{km}{h}$$

Siccome tale valore dipende dalla temperatura osserviamo che, aumentando l'altitudine, ovviamente diminuirà la temperatura e quindi anche la velocità del suono diminuisce.

Concludiamo accennando ai motori per uso aeronautico. Come prima cosa bisogna sottolineare come esistano sostanzialmente due categorie di motori per tale scopo:

- i motori ad elica esterna, che sfruttano basse accelerazioni con grosse masse di fluido,
- i motori a turbogetto, che invece sfruttano alte accelerazioni.

Nell'immagine seguente vediamo lo schema semplificato di uno stato reattore.



Nelle turbine a gas per la propulsione a getto si utilizza la notevole variazione di velocità di una massa di fluido entrante ed uscente dalla turbina stessa; il lavoro utile della turbina viene tutto spedito al compressore e quindi c'è un disavanzo entalpico non sfruttato in turbina. I motori a turboelica usano il ciclo Joule-Brayton e mandano il lavoro in parte alla turbina ed in parte all'elica.

**Velocità del suono. Transizioni di fase.**

Calcolare la velocità del suono relativa al magnesio ad una temperatura di 0°C e a pressione atmosferica; siano inoltre dati i seguenti valori numerici:

$$\begin{cases} c_p = 28 \frac{J}{molK} \\ v = 0,0147 \frac{l}{mol} \\ \alpha = 181 \cdot 10^{-6} K^{-1} \\ k_T = 3,94 \cdot 10^{-6} atm^{-1} \end{cases}$$

Come prima cosa sarà necessario rifarsi ai valori numerici del S.I., si avrà quindi:

$$\begin{cases} v = 0,0147 \frac{l}{mol} = \frac{0,0147 \frac{m^3}{mol}}{200,61 \frac{kg}{mol}} = 7,33 \cdot 10^{-5} \frac{m^3}{mol} \\ k_T = 3,94 \cdot 10^{-6} atm^{-1} = \frac{3,94 \cdot 10^{-6} atm^{-1}}{1,1015 \frac{bar}{atm}} = 389 \cdot 10^{-11} Pa^{-1} \end{cases}$$

Ricordiamo ora la relazione secondo la quale:

$$c_p - c_v = \frac{Tv\alpha^2}{k_T}$$

da cui si ricava:

$$c_v = c_p - \frac{Tv\alpha^2}{k_T} \cong 25 \frac{J}{molK}$$

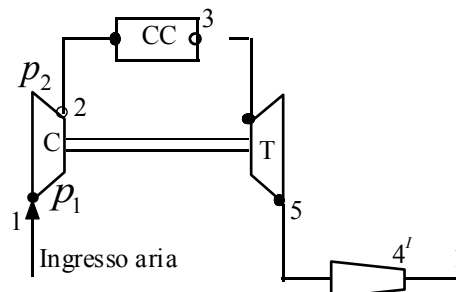
Quindi, nel caso in questione si avrà:

$$\frac{c_p}{c_v} \cong 1,12$$

La velocità del suono sarà allora:

$$c = \sqrt{\frac{1}{k_s \rho}} = \sqrt{\frac{c_p}{c_v} \frac{v}{k_T}} = \sqrt{1,12 \frac{7,33 \cdot 10^3}{389 \cdot 10^{-11}}} = 1452 \frac{m}{s}$$

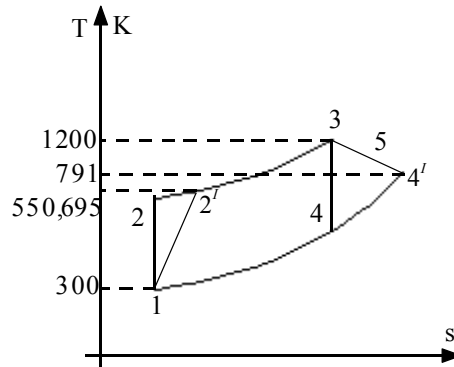
Si consideri il turboreattore schematizzato nell'immagine seguente.



Tale meccanismo funziona sfruttando il ciclo mostrato nella prima illustrazione della pagina seguente. Dati dunque i seguenti valori numerici:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{2'} = 550,695 K \\ T_{4'} = 791 K \\ \eta_{sc} = 0,85 \\ \eta_{st} = 0,8 \\ \dot{m} = 50 \frac{kg}{s} \end{array} \right.$$

si valuti la velocità del suono all'uscita dell'ugello e l'impulso di spinta.



Come prima cosa uguagliamo il lavoro della turbina e il lavoro del compressore ottenendo:

$$\left| \dot{W}_c \right| = \left| \dot{W}_t \right|$$

ovvero:

$$T_3 - T_5 = T_{2'} - T_1$$

da cui si ricava:

$$T_5 = -T_{2'} + T_1 + T_3 = 949 K$$

L'energia cinetica in uscita dall'ugello è pari al salto entalpico tra i punti 5 e 4', ovvero:

$$\frac{1}{2} v_{4'}^2 = c_p \Delta T$$

dalla quale si ricava:

$$v_{4'} = \sqrt{2c_p(T_5 - T_{4'})} = \sqrt{2 \cdot 10^3 \cdot 157 \frac{KJ}{kgK}} = 562 \frac{m}{s}$$

La velocità del suono all'uscita dell'ugello è invece:

$$c_{4'} = \sqrt{c_p R T_{4'}} = \sqrt{1,4 \frac{8314}{29} 791 K} = 563 \frac{m}{s}$$

Possiamo dunque dire di essere in regime transonico.

L'impulso di spinta è invece dato da:

$$I = \dot{m} v = 50 \frac{kg}{s} 562 \frac{m}{s} = 28 kN$$

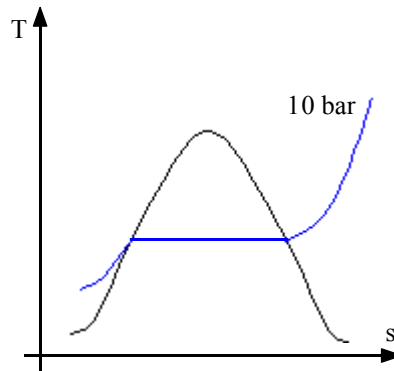
In questo caso l'impulso di spinta è detto impulso a punto fisso perché il motore è fermo; in realtà si dovrebbe infatti utilizzare come velocità la differenza di velocità tra l'aria entrante e l'aria uscente (in questo caso, però, si è posto che l'aria entrante sia ferma in quanto il motore è fermo)

Sono dati 5 kg di vapor d'acqua saturo a 180°C dai quali viene tolto calore isobaricamente. Si considerano due diverse situazioni:

- vengono sottratti 5000 kJ;
- vengono sottratti 12000 kJ.

Stabilire, in entrambi i casi, la situazione finale dell'acqua.

Per risolvere questo esercizio facciamo riferimento al seguente grafico:



Nel caso delle trasformazioni isobare varrà la relazione:

$$\Delta H = Q$$

ovvero:

$$\Delta H = Q = M(h_1 - h_2)$$

da cui:

$$h_2 = h_1 + \frac{Q}{M}$$

dove con  $Q$  si intende il valore assoluto del calore scambiato. Sfruttiamo ora la tabella 1 dell'appendice e troviamo che, in corrispondenza dei 180°C, l'entalpia relativa al vapore saturo è:

$$h_1 = 2778,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Conoscendo allora tale valore di entalpia, la massa del vapore e il calore scambiato avremo nei due casi, rispettivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_2 = 2778 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} - \frac{5000 \text{kJ}}{5 \text{kg}} = 1778 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \\ h_2 = 2778 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} - \frac{12000 \text{kJ}}{5 \text{kg}} = 378 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \end{array} \right.$$

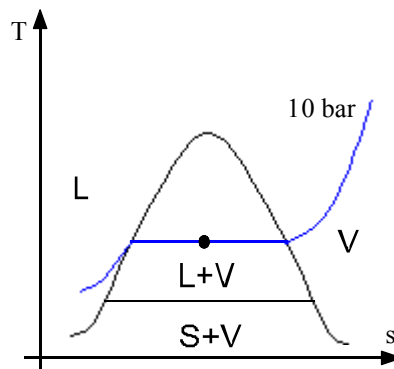
Calcoliamo ora il titolo sfruttando la seguente relazione:

$$x_2 = \frac{h_2 - h_{2\text{liq}}}{h_{2\text{vap}} - h_{2\text{liq}}}$$

Nel primo caso si avrà dunque (sfruttando la medesima tabella 1):

$$x_2 = \frac{1778 - 763}{2778 - 763} = 0,504$$

Dal grafico seguente appare evidente che siamo praticamente a metà del tragitto da liquido saturo a vapore saturo:



Il calcolo dell'entropia sarà il seguente (sfruttando la medesima tabella 1):

$$s_2 = x_2 s_{2vap} + (1 - x_2) s_{2liq} = 0,504 \cdot 6,5857 + (1 - 0,504) 2,1396 = 4,380 \frac{kJ}{kgK}$$

Per quanto riguarda, invece, il volume, si avrà (sfruttando la medesima tabella 1):

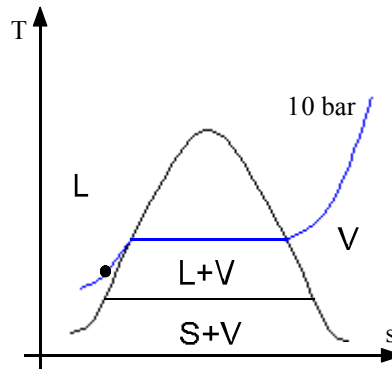
$$v_2 = x_2 v_{2vap} + (1 - x_2) v_{2liq} = 0,504 \cdot 0,19405 + (1 - 0,504) 0,001127 = 0,098 \frac{m^3}{kg}$$

Siccome passiamo da vapore saturo, all'estrema destra della linea azzurra orizzontale, ad una concentrazione corrispondente al punto medio (circa) della medesima linea, comprendiamo molto semplicemente come l'entropia diminuisca.

Mettiamoci ora nel secondo caso per il quale le cose sono leggermente più complicate; se infatti usassimo lo stesso metodo che abbiamo usato per il caso 1) avremmo (sfruttando la medesima tabella 1):

$$x_2 = \frac{h_2 - h_{2liq}}{h_{2vap} - h_{2liq}} = \frac{378 - 763}{2778 - 763} = -0,191$$

Un valore negativo non è ovviamente sensato e quindi dobbiamo affrontare questo caso in maniera diversa. Sfruttando la tabella 1 notiamo che il valore di entropia che abbiamo ottenuto in questo secondo caso (378 kJ/kg), corrisponde ad una temperatura compresa tra i 90°C e i 95°C e questo significa, come mostra il disegno seguente, che si è passati nella zona liquida.



Quello che ci interessa non è dunque il titolo, in questo caso, quanto la nuova temperatura: Per calcolare la temperatura dovremo operare una interpolazione lineare e quindi, sfruttando la tabella 1, si avrà:

$$t_2 = t_{inf} + \frac{t_{sup} - t_{inf}}{h_{liq sup} - h_{liq inf}} (h_2 - h_{liq inf}) = 90 + \frac{95 - 90}{397,96 - 376,92} (378 - 376,92) = 90,257^\circ C$$

Una medesima interpolazione sarà necessaria anche per quanto riguarda l'entropia; si avrà infatti:

$$s_2 = s_{inf} + \frac{s_{sup} - s_{inf}}{h_{liq sup} - h_{liq inf}} (h_2 - h_{liq inf}) = 91,1925 + \frac{1,25 - 1,1925}{397,96 - 376,92} (378 - 376,92) = 1,1955 \frac{kJ}{kgK}$$

Anche in questo caso, per il medesimo discorso fatto prima, la variazione di entropia sarà negativa e maggiore in modulo rispetto al caso precedente.

Consideriamo ora 5 kg di vapor d'acqua saturo che passa da una pressione di 10 bar ad una pressione di 3 bar in due modi diversi:

- ad entropia costante;
- ad entalpia costante.

In questo caso i dati iniziali saranno i seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = 2778 \frac{kJ}{kg} \\ s_1 = 6,586 \frac{kJ}{kgK} \\ v_1 = 0,1944 \frac{m^3}{kg} \end{array} \right.$$

In questo caso il grafico che ci interessa è il primo della pagina seguente. Soffermandoci sul primo caso, utilizziamo la tabella 2 per notare che, in corrispondenza di una pressione di 3 bar (0,3Mpa) come è quella finale, si avrà una temperatura pari a:

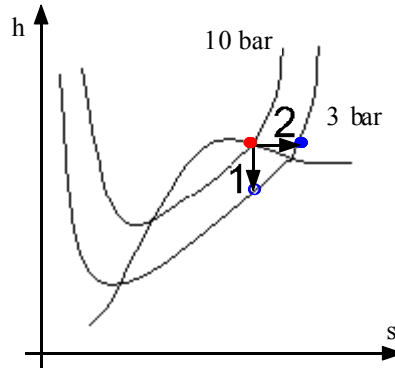
$$t_2 = 133,55^\circ \text{C}$$

Sempre sfruttando i dati che ricaviamo dalla tabella 2 possiamo ricavare il titolo grazie alla relazione seguente:

$$x_2 = \frac{s_2 - s_{2liq}}{s_{2vap} - s_{2liq}} = 0,924$$

Con la medesima tabella ricaviamo anche la seguente relazione per l'entalpia finale:

$$h_2 = x_2 h_{2vap} + (1 - x_2) h_{2liq} = 0,924 \cdot 2725,3 + (1 - 0,924) 561,47 = 2560 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$



Anche in questo esercizio, nel secondo caso non ha senso andare a valutare il titolo perché si finisce nella zona di vapore surriscaldato; sarà dunque interessante andare a valutare la temperatura, il volume e l'entropia, che si otterranno con delle interpolazioni; si avrà dunque:

$$\begin{cases} t_2 = t_{\text{inf}} + \frac{t_{\text{sup}} - t_{\text{inf}}}{h_{\text{liq sup}} - h_{\text{liq inf}}} (h_2 - h_{\text{liq inf}}) = 150 + \frac{200 - 150}{2866 - 2761} (2778 - 2761) = 158,1^\circ \text{C} \\ v_2 = v_{\text{inf}} + \frac{v_{\text{sup}} - v_{\text{inf}}}{h_{\text{liq sup}} - h_{\text{liq inf}}} (h_2 - h_{\text{liq inf}}) = 0,634 + \frac{0,716 - 0,634}{2866 - 2761} (2778 - 2761) = 0,647 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \\ s_2 = s_{\text{inf}} + \frac{s_{\text{sup}} - s_{\text{inf}}}{h_{\text{liq sup}} - h_{\text{liq inf}}} (h_2 - h_{\text{liq inf}}) = 7,078 + \frac{7,312 - 7,078}{2866 - 2761} (2778 - 2761) = 7,116 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \end{cases}$$

Calcolare la massa d'acqua a  $20^\circ\text{C}$  necessaria affinché sia possibile sciogliere 10 kg di ghiaccio ad una temperatura iniziale di  $-10^\circ\text{C}$  operando adiabaticamente a pressione atmosferica.

Siccome si deve operare adiabaticamente si avrà:

$$\Delta H = Q = 0$$

ovvero:

$$\Delta H_{\text{liq}} + \Delta H_{\text{sol}} = 0$$

dalla quale si ricava:

$$m_{\text{sol}} (h_{2\text{sol}} - h_{1\text{sol}}) = -m_{\text{liq}} (h_{2\text{liq}} - h_{1\text{liq}})$$

Convenzionalmente, inoltre, si ha che:

$$h_{2\text{sol}} = h_{2\text{liq}} (t = 0^\circ \text{C})$$

Considerando poi il calore latente di fusione possiamo scrivere:

$$h_{1\text{sol}} = -\lambda - c_p \Delta T = -80 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}} - 95 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}} (10^\circ \text{C}) = -85 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$$

e inoltre si avrà:

$$h_{1\text{liq}} = c_p \Delta T = 1 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}} (20^\circ \text{C}) = 20 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$$

Combinando allora le ultime quattro relazioni scritte si ottiene:

$$m_{liq} = \frac{10\text{kg} \cdot 85 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}}{20 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}} = 42,5\text{kg}$$

**Transizioni di fase. Efflussi negli ugelli.**

Calcolare la situazione finale di un sistema nel quale a 6 kg di acqua a 20°C vengono aggiunti, attraverso una trasformazione adiabatica ed isobara, 4 kg di vapor d'acqua a 150°C ed alla pressione di 1 bar.

Siccome la trasformazione è adiabatica ed isobara si avrà:

$$\Delta H = Q = 0$$

Questa relazione si può riscrivere, sfruttando la proprietà di additività, nel modo seguente:

$$Mh_2 - (M_{liq}h_{1liq} + M_{vap}h_{1vap}) = 0$$

da cui si ricava:

$$h_2 = \frac{M_{liq}h_{liq} + M_{vap}h_{vap}}{M}$$

Ricaviamo ora l'entalpia della frazione liquida dalla relazione:

$$h_{liq} = c_p(t - t_0) = c_p(20^\circ C - 0,01^\circ C) \approx c_p(20^\circ C) = 84 \frac{kJ}{kg}$$

L'entalpia della frazione vapore si può invece ricavare dalla tabella 3. Si avrà dunque:

$$h_2 = \frac{M_{liq}h_{liq} + M_{vap}h_{vap}}{M} = \frac{(6kg)\left(84 \frac{kJ}{kg}\right) + (4kg)\left(2776 \frac{kJ}{kg}\right)}{10kg} = 1161 \frac{kJ}{kg}$$

Sfruttando ora la tabella 2 possiamo ricavare il titolo:

$$x_{liq} = \frac{h_{liq} + h_{2liq}}{h_{2vap} - h_{2liq}} = 0,329$$

e anche la temperatura:

$$t_2 = 99,63^\circ C$$

Per tornare allo stato iniziale sarebbe necessario fornire lavoro e quindi siamo in un processo irreversibile: la variazione di entropia dovuta a tale irreversibilità è la seguente:

$$\Delta S_{irr(1 \rightarrow 2)} = M_2 s_2 - (M_{liq} s_{1liq} + M_{vap} s_{1vap}) = 0,715 \frac{kJ}{K}$$

Ci occupiamo ora degli efflussi negli ugelli. Come prima cosa ipotizziamo l'assenza di attriti e la condizione di adiabaticità; avremo:

$$\dot{Q} = \dot{W} = 0$$

Facendo dunque il bilancio si otterrà:

$$h_2 - h_1 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = 0$$

Se il flusso è isoentropico e il gas è ideale si avrà anche:

$$\frac{s^2 v}{2} = c_p \Delta T = R \frac{\gamma}{\gamma - 1} (T_1 - T_2) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} (pv_1 - p_2 v_2)$$

Imponendo che sia:

$$v_1 = 0$$

si ricava:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} p_1 v_1 \left(1 - \frac{p_2 v_2}{p_1 v_1}\right)} \quad (1)$$

Siccome poi siamo in condizioni di ipotizzata adiabaticità, possiamo utilizzare anche la relazione:

$$pv^\gamma = \text{costante}$$

ovvero:

$$\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$



da cui:

$$v_2 = v_1 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

La relazione (1) si potrà dunque riscrivere come segue:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} p_1 v_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

Valutare la velocità di efflusso da un ugello nel caso in cui siano date i seguenti dati numerici:

$$\begin{cases} p_1 = 200 \cdot 10^3 \text{ Pa} \\ v_1 = 0,72 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \\ \frac{p_2}{p_1} = 0,5 \\ \gamma = 1,4 \end{cases}$$

Applicando la formula prima vista si avrà:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(1,4)}{1,4-1} 200 \cdot 10^3 \cdot 0,72 \left( 1 - 0,5^{\frac{1,4-1}{1,4}} \right)} = 425,55 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

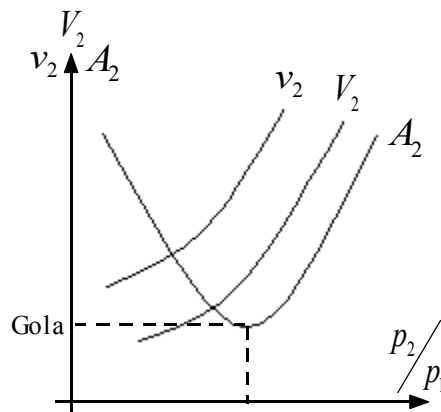
Consideriamo ora la relazione:

$$\frac{A_2}{\dot{m}} = \frac{v_2}{V_2} \quad (2)$$

dove vediamo apparire la sezione e la portata. Si avrà:

$$\begin{cases} \frac{A_2}{\dot{m}} = \min \\ \frac{\dot{m}}{A_2} = \max \end{cases}$$

Dal punto di vista grafico si potrà allora considerare il seguente grafico:



Sfruttando quanto visto in precedenza è possibile riscrivere l'inverso della relazione (2) nel modo seguente:

$$\frac{\dot{m}}{A_2} = \frac{V_2}{v_2} = \sqrt{\frac{2\gamma}{1-\gamma} \cdot \frac{p_1}{v_1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \right]}$$

Ora deriviamo e annulliamo la derivata

$$\frac{d\left(\frac{\dot{m}}{A_2}\right)}{d\left(\frac{p_2}{p_1}\right)} = 0$$

si otterrà così:

$$\begin{cases} \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \frac{T_2}{T_1} = \frac{2}{\gamma+1} \end{cases} \quad (3)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2}{\gamma+1} \quad (4)$$

Valutare la velocità del suono, la temperatura e la pressione di uscita relativamente ad un ugello con le seguenti caratteristiche:

$$\begin{cases} p_1 = 400kPa \\ T_1 = 400K \\ \gamma = 1,4 \end{cases}$$

Applicando la relazione (4) esplicitata rispetto alla temperatura di uscita si ottiene:

$$T_2 = \frac{2T_1}{\gamma+1} = 333,33K$$

Sfruttando invece la relazione (3), anch'essa esplicitata rispetto alla grandezza in uscita, si ha:

$$p_2 = p_1 \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 211kPa$$

Abbiamo ora tutto quello che ci serve per ricavare la velocità del suono:

$$c = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{(1,4)(287)(333,33)} \frac{m}{s} = 365,97 \frac{m}{s}$$

Valutare il rapporto tra le pressioni, il volume massico d'ingresso, la sezione d'ingresso e la temperatura e la pressione di ristagno nel caso di un ugello per il quale siano assegnati i seguenti dati numerici iniziali:

$$\begin{cases} v_1 = 200 \frac{m}{s} \\ T_1 = 550K \\ p_1 = 350kPa \\ \dot{m} = 10 \frac{kg}{s} \\ p_2 = 100kPa \end{cases}$$

Il rapporto tra le pressioni è immediatamente ricavabile; si avrà infatti:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{100kPa}{350kPa} = 0,286$$

Il volume massico d'ingresso, nota la pressione e la temperatura iniziale, si può ricavare sfruttando la legge dei gas perfetti esplicitata rispetto al volume:

$$v_1 = \frac{RT_1}{p_1} = \frac{0,287 \cdot 10^3 \cdot 550K}{350 \cdot 10^3} = 0,4512 \frac{m^3}{kg}$$

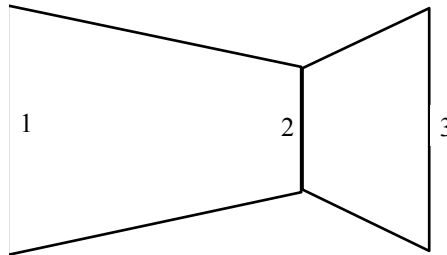
Per ricavare la sezione d'ingresso, nota la portata e tutti gli altri valori di ingresso, si utilizza la relazione (2), ricavando:

$$A = \frac{\dot{m} v}{V} = \frac{10 \cdot 0,4512}{200} = 0,0226 \text{m}^2$$

Infine, la temperatura e la pressione di ristagno si calcolano nel modo seguente:

$$\begin{cases} T_{T1} = T_1 + \frac{v_1^2}{2c_p} = 550\text{K} + \frac{200^2}{2 \cdot 1005} = 569,9\text{K} \\ p_{T1} = p \left( \frac{T_{T1}}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 396,39\text{KPa} \end{cases}$$

Sia dato un ugello strutturato nel modo seguente:



I dati numerici assegnati sono i seguenti:

$$\begin{cases} v_1 = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ T_1 = 550\text{K} \\ p_1 = 350\text{KPa} \\ \dot{m} = 10 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \\ v_3 = 600 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

Calcolare la velocità del suono, il volume massico, la pressione, la sezione e la temperatura all'uscita dell'ugello.

Per ricavare la temperatura all'uscita dell'ugello sfruttiamo la seguente relazione:

$$c_p T_3 + \frac{v_3^2}{2} - c_p T_{T1} = 0$$

dalla quale si ricava, tenendo conto che la temperatura di ristagno sarà la medesima calcolata nell'esercizio precedente;

$$T_3 = 390,8\text{K}$$

A questo punto è possibile calcolare la velocità del suono tramite la seguente relazione:

$$c = \sqrt{\gamma R T_3} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 390,8} = 396,33 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La pressione all'uscita dall'ugello può essere calcolata sfruttando al relazione (3), si avrà allora:

$$p_3 = p_1 \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 105,83\text{KPa}$$

In realtà, sperimentalmente si osserva che esiste un rendimento isoentropico pari al 90% e quindi si avrà:

$$p_3 = 88,07\text{KPa}$$

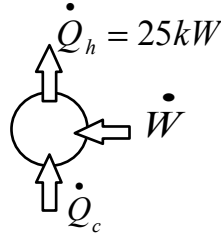
Abbiamo ora tutto quello che ci serve per ricavare il volume massico e la sezione di uscita:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_3 = \frac{0,287 \cdot 10^3 \cdot 390,8}{88,07 \cdot 10^3} = 1,274 \frac{m^3}{kg} \\ A_3 = \frac{\dot{m} v_3}{V_3} = 10 \cdot \frac{1,274}{600} = 0,0212 m^2 \end{array} \right.$$

**Rendimenti. Cicli.**

Una pompa di calore opera tra 330K e 288K. La potenza termica da fornire alla sorgente calda è di 25kW, mentre il rendimento di II principio è di 0,55. Si calcoli la potenza meccanica della pompa di calore.

Come prima cosa consideriamo la seguente schematizzazione:



Ricordiamo ora la definizione dei rendimenti reversibile e di II principio che sono, rispettivamente:

$$\begin{cases} \varepsilon_{rev} = \frac{T_{sup}}{T_{sup} - T_{inf}} \\ \eta_{II} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{rev}} \end{cases}$$

Combinando allora tali due relazioni si ottiene:

$$\varepsilon = \varepsilon_{rev} \eta_{II} = \frac{T_{sup}}{T_{sup} - T_{inf}} \eta_{II} = 4,3$$

Sfruttiamo ora la definizione classica di efficienza secondo la quale:

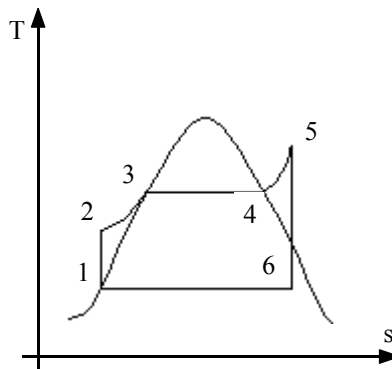
$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}_h}{\dot{W}}$$

dalla quale si ricava:

$$\dot{W} = \frac{\dot{Q}_h}{\varepsilon} = 5,8kW$$

In un ciclo Rankine la turbina è alimentata con una portata di 25 kg/s di vapor d'acqua alla pressione di 125 bar. Conoscendo le caratteristiche del vapore allo scarico ( $x=0,75$ ;  $t=30^\circ C$ ) si calcoli la potenza ideale della turbina e del condensatore.

Anche in questo caso consideriamo come prima cosa la seguente immagine:



Sfruttando ora i dati assegnati e combinandoli con il disegno si ottiene:

$$\begin{cases} p_5 = 125bar \\ x_6 = 0,75 \\ t_6 = 30^\circ C \end{cases}$$

Sfruttiamo ora la tabella 1 e osserviamo che, in corrispondenza dei  $30^\circ C$  si hanno i seguenti dati numerici:

$$\begin{cases} s_{liq} = 0,4369 \\ s_{vap} = 8,4533 \end{cases}$$

Possiamo allora sfruttare questi dati numerici per ottenere l'entropia del punto 6 nel modo seguente:

$$s_6 = x_6 s_{6vap} + (1 - x_6) s_{6liq} = 6,450 \frac{kJ}{kgK}$$

Osservando poi il grafico si ha:

$$s_6 = s_5$$

Interpolando poi i dati della tabella si ottengono i seguenti due risultati:

$$\begin{cases} h_5 = 3333 \frac{kJ}{kg} \\ t_5 = 492,5^\circ C \end{cases}$$

L'entalpia del punto 6 può ora essere calcolata nel modo seguente:

$$h_6 = x_6 h_{6vap} + (1 - x_6) h_{6liq} = 1948 \frac{kJ}{kg}$$

Abbiamo ora tutto quello che ci serve per calcolare quanto veniva richiesto:

$$\begin{cases} \dot{W}_t = 25(h_5 - h_6) = 34624 kW \\ \dot{Q}_c = 25(h_6 - h_1) = 4550 kW \end{cases}$$