

Dissipazioni energetiche. Cause fisiche dell'attrito. Attrito statico.

Dissipazioni energetiche.

Sebbene le macchine siano definite come degli elaboratori di potenza, la loro classificazione viene solitamente fatta basandosi sul compito pratico che la singola macchina è chiamata a risolvere piuttosto che sulle forze chiamate in causa. Una visione di questo tipo trascura però un aspetto di enorme rilevanza: la dissipazione dell'energia.

Cause fisiche dell'attrito.

La causa principale delle dissipazioni energetiche che affliggono qualunque sistema meccanico è senza dubbio l'attrito, la cui causa fisica è da ricercare nelle naturali imperfezioni che caratterizzano due superfici che vengono in contatto e che strisciano l'una sull'altra. In figura 1 viene rappresentato il classico sistema usato per mostrare l'azione dell'attrito: un blocco si muove strisciando su una superficie e risente di una forza che si oppone al suo movimento e che risulta proporzionale alla normale rispetto al piano di scorrimento secondo la nota relazione secondo la quale:

$$T = fN$$

con f che prende il nome di coefficiente di attrito.

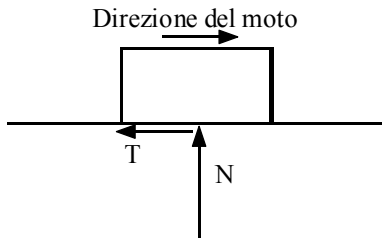


Figura 1

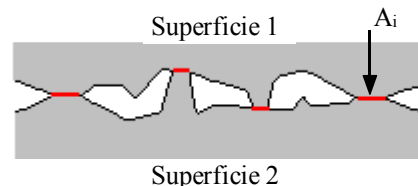


Figura 2

Osservando con occhio critico la relazione scritta per l'attrito, la prima cosa che si può notare è che viene suggerita una legge di proporzionalità diretta, il che deve far subito capire come si sia davanti ad un'approssimazione; appare inoltre quantomeno sospetto che ci sia una totale indipendenza dalla velocità e dall'estensione delle superfici di contatto. Se però, per quanto riguarda la velocità, ci si può limitare ad osservare che una certa dipendenza è effettivamente riscontrabile ma che per alcuni intervalli di velocità è anche assolutamente trascurabile, un discorso un po' più approfondito deve essere fatto a proposito dell'area di contatto. Le irregolarità microscopiche che, come già detto, sono all'origine del fenomeno dell'attrito, fanno sì che la reale superficie di contatto sia solamente dovuta all'incontro di areole microscopiche A_i , come esaurientemente mostrato in figura 2. Come conseguenza, la pressione p potrà essere espressa attraverso la seguente relazione

$$p = \frac{Q}{A_{eff}} = \frac{Q}{\sum_{i=1}^N A_i}$$

dove con Q viene indicato il carico complessivo. Il comportamento della pressione in funzione della deformazione (si pensi ad una sostanza metallica) sarà quello mostrato nel diagramma di figura 3; si nota dunque la presenza di un tratto iniziale nel quale l'aumento del carico tende a schiacciare le areole e quindi ad aumentare la superficie complessiva di contatto.

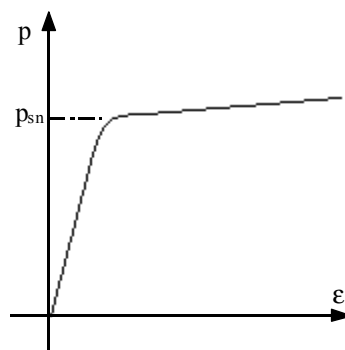


Figura 3

Una volta superata la pressione di snervamento l'andamento è invece molto più costante, il che implica che l'area di contatto è a quel punto costante.

Nelle sostanze metalliche, il calore sviluppato dall'alta pressione porta, in corrispondenza delle areole di contatto, a vere e proprie micro-saldature tra i due pezzi; questo spiega il valore a volte elevato del coefficiente d'attrito; quando poi le due superfici si muovono, le micro-saldature si rompono e il materiale, reso più morbido dal calore sviluppato, oppone minore resistenza allo strisciamento., per questo motivo, una volta avviato il movimento, è necessaria una forza minore per mantenerlo. Bisogna infine ricordare che due superfici a contatto non sono mai perfettamente pulite e l'onnipresente strato di impurità, per quanto modesto, assorbe una parte del carico e forma dei cuscinetti che rendono più difficili le micro-saldature.

Attrito statico.

Il fenomeno dell'attrito statico si ottiene quando viene sviluppata una forza nel tentativo di far strisciare un oggetto sopra un altro, come mostrato in figura 4, ma il moto viene impedito da una forza di reazione espressa nel modo seguente:

$$T = f_s N \quad (1)$$

dove f_s prende il nome di coefficiente di attrito statico (o di aderenza).

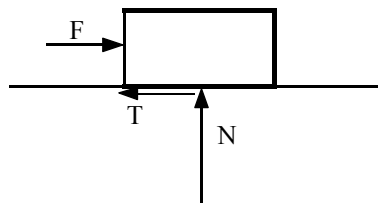


Figura 4

Dal punto di vista numerico, il coefficiente f_s può essere misurato solo sperimentalmente e ha una grande variabilità: il coefficiente di aderenza tra pneumatico e asfalto è, in condizioni ideali, pari a circa 1,3 mentre il coefficiente di attrito tra due blocchetti di misura può arrivare ad oltre 10.

La relazione (1) è ovviamente valida fintanto che si è in assenza di moto e mette dunque in evidenza un limite, espresso dalla relazione conosciuta come prima legge d'attrito, secondo la quale:

$$T \leq f_s N$$

L'attrito statico può allora essere visto come un vincolo virtuale, capace di resistere ad una certa forza; oltre tale limite il vincolo cede e si ha il movimento.

Attrito statico. Attrito radente. Perni. Attrito volvente.

Attrito statico.

Nella lezione precedente si era giunti a paragonare l'attrito statico ad un vincolo virtuale; da un punto di vista grafico tale vincolo viene espresso tramite il cono d'attrito mostrato in figura 1; fino a quando la risultante **R** ottenuta dalla somma dei vettori **N** e **T** è contenuta all'interno della zona evidenziata si ha la garanzia che le forze di attrito riescono ad impedire il movimento.

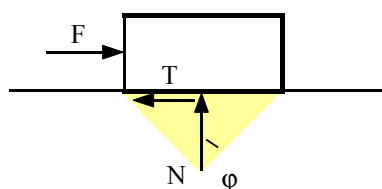


Figura 1

L'angolo φ che individua la semi-ampiezza del cono è legato al coefficiente di attrito statico tramite la seguente relazione:

$$\varphi = \arctan f_s$$

La simmetria del cono d'attrito dipende dall'isotropia del sistema che non è una condizione sempre verificata.

Attrito radente.

Quando la forza applicata al provino di figura 1 supera il limite imposto dall'attrito statico, inizia il movimento che sarà però ostacolato da una forza espressa tramite la seguente relazione:

$$T = f_r N$$

dove f_r prende il nome di coefficiente di attrito radente. La misura di tale coefficiente di attrito tra due corpi si ha praticamente solo per via sperimentale, solitamente misurando la forza necessaria per far iniziare il moto di un oggetto su un altro oppure anche la forza necessaria per mantenere un moto uniforme. Questo tipo di prove è comunque dispendioso e poco affidabile in quanto l'attrito dipende da un numero imprecisabile di parametri (temperatura, umidità, pulizia delle superfici di contatto e altro ancora), molti dei quali non dominabili: per questo motivo la conoscenza dei coefficienti di attrito è sempre da considerarsi superficiale.

Un tipico esperimento volto alla misura del coefficiente f_r è quello schematizzato nella figura 3 dove si nota una molla, munita di una galletta di regolazione, che impone un carico noto su un provino mantenuto fermo. Al di sotto del provino viene mantenuta in moto, con velocità ridotta ma costante, una slitta.

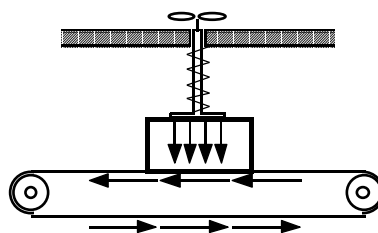


Figura 3

Perni.

L'attrito interviene ovviamente anche nel sistema perno-cuscinetto mostrato in figura 4; come però si può notare dalla schematizzazione di figura 5, nel sistema in questione il contatto avviene idealmente lungo una retta (la linea tratteggiata in figura) e quindi, essendo nulla l'area di contatto, cade la definizione di attrito vista fino ad ora. Nella realtà, invece, i due corpi si deformano leggermente ed esiste un'area di contatto effettiva; per questo motivo, nella pratica, le leggi dell'attrito vengono considerate valide anche in situazioni limite come quella appena descritta. Quando viene imposta una velocità angolare ω al perno, questo ruota inizialmente senza slittare e si arrampica sulla parete interna della guida; ad un certo punto inizia ovviamente lo slittamento. La sezione della struttura di figura 4 viene mostrata in maggior dettaglio in figura 6, dove viene anche evidenziato il cosiddetto cerchio di attrito (in rosso) il cui raggio è solitamente indicato tramite la relazione seguente:

$$\rho = r \sin \varphi$$

Come si può notare dalla relazione che lo definisce, il raggio del cerchio d'attrito è solitamente minore del raggio r del perno (cosa comunque non sempre vera in quanto se per esempio non c'è abbastanza gioco tra perno e cuscinetto, ρ diventa maggiore di r).

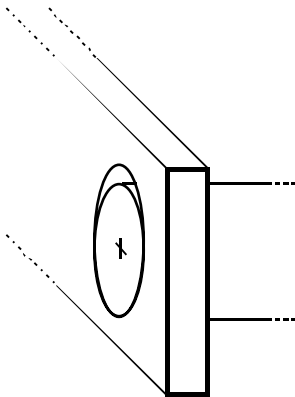


Figura 4

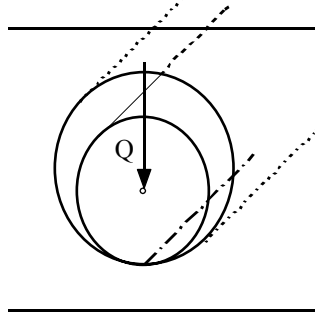


Figura 5

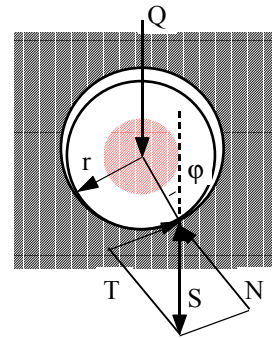


Figura 6

La coppia di attrito, ovvero la coppia che si oppone alla rotazione del perno, può a questo punto essere espressa come segue:

$$M_{att} = Q\rho$$

e si nota quindi che tanto più è piccolo ρ , tanto più piccolo è tale momento. Minimizzare il raggio del cerchio d'attrito diventa dunque una strategia intelligente per la riduzione del momento d'attrito e si giunge così a soluzioni come quella mostrata in figura 7, tipica dell'industria orologiaia, nella quale la zona attiva del perno viene ridotta ad una punta (di diamante negli orologi più costosi)

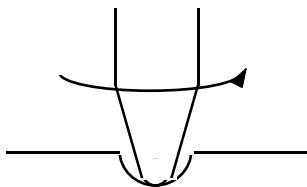


Figura 7

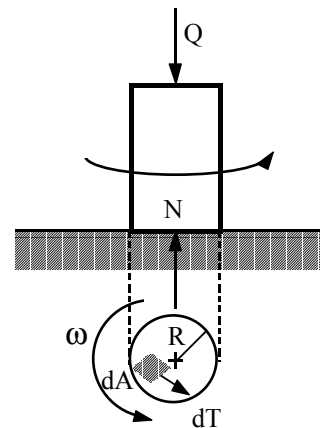


Figura 8

In questa configurazione appare evidente come il carico non sia più perpendicolare all'asse del perno (come mostrato in figura 5) ma sia invece esso stesso assiale; si passa dunque dalla situazione caratteristica del perno rotante asciutto a quella tipica del perno spingente asciutto. I sistemi con carichi assiali sono molto comuni nella meccanica e rappresentano un'ulteriore situazione limite che viene però ugualmente gestita con le formule dell'attrito introdotte fino ad ora. Facendo dunque riferimento alla situazione schematizzata in maniera molto sintetica in figura 8, la forza tangenziale dT agente sull'areola dA evidenziata sulla base del perno sarà esprimibile nel modo seguente:

$$dT = f_r dN = f_r p dA$$

dove p non è altro che la pressione, che dunque può essere espressa come segue:

$$p = \frac{Q}{\pi R^2}$$

mentre l'areola evidenziata sarà ovviamente:

$$dA = 2\pi r dr$$

Il momento di attrito sarà allora:

$$M_{att} = \int_0^R r dT = f_r p \int_0^R 2\pi r \cdot r dr = 2\pi f_r p \frac{R^3}{3} = f_r Q \frac{2}{3} R = T \frac{2}{3} R$$

dove si è posto:

$$T = f_r Q$$

È evidente che in una configurazione come questa l'attrito provochi anche una considerevole usura delle pareti a contatto; si ricorre dunque all'utilizzo di bronzine, il cui utilizzo è mostrato nel particolare rappresentato in figura 9, che non sono altro che innesti nella base, realizzati con un materiale più tenero rispetto a quello del perno, introdotti in modo che l'inevitabile usura ricada quasi esclusivamente su di loro che, facilmente sostituibili, rendono meno problematica l'opera di manutenzione evitando di dover intervenire anche sul pezzo rotante.

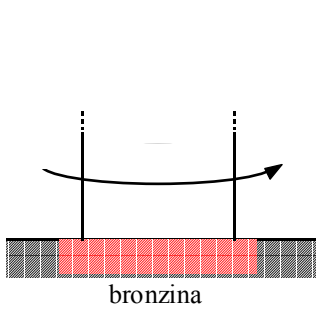


Figura 9

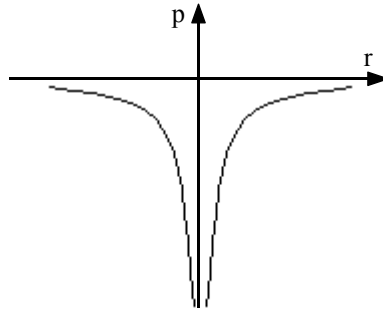


Figura 10

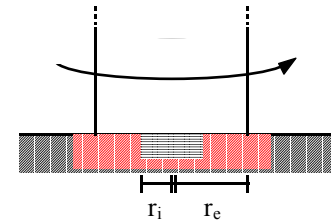


Figura 11

Il consumo del materiale può essere utilizzato come un indicatore del lavoro svolto dalle forze di attrito; nell'ipotesi di Reye, infatti, tale lavoro è proporzionale al volume asportato dalla bronzina

$$L_{att} = kV$$

ovvero, anche:

$$L_{att} = f_r Nv$$

dove con v viene indicata la velocità di strisciamento. Uguagliando le due espressioni del lavoro si ricava allora:

$$f_r Nv = kV$$

ovvero:

$$f_r pvdA = kh dA$$

dove h sia l'altezza della fettina di materiale asportato. Dall'ultima relazione scritta si può ricavare la seguente espressione della pressione:

$$p = \frac{kh}{f_r v} = \frac{kh}{f_r \omega r} = \frac{k_p}{r}$$

L'andamento della pressione è dunque quello mostrato in figura 10 ed è allora evidente come ci sarà un consumo maggiore alle due estremità rispetto al centro. Questo è ovviamente verificato solamente all'inizio, in quanto una volta che le estremità sono erose, il centro si troverà a dover sopportare una pressione maggiore e quindi, complessivamente, si osserva un consumo uniforme. Per motivi tecnici, molto spesso si preferisce mantenere il centro scarico (solitamente tramite un cuscinetto) e quindi il carico complessivo sarà espresso nel modo seguente:

$$Q = \int_A p dA = \int_{r_i}^{r_e} \frac{k_p}{r} 2\pi r dr = k_p 2\pi (r_e - r_i)$$

dove il significato dei due raggi r_e ed r_i è chiaramente espresso in figura 11. L'espressione del momento d'attrito viene allora modificata fino ad ottenere:

$$M_{att} = \int_{r_i}^{r_e} f_r p r dA = f_r k_p 2\pi \int_{r_i}^{r_e} \frac{1}{r} r^2 dr = f_r k_p 2\pi \frac{r_e^2 - r_i^2}{2} = f_r \frac{Q}{r_e - r_i} (r_e - r_i) \frac{r_e + r_i}{2} = f_r Q \frac{r_e + r_i}{2} = Tr_m$$

dove ovviamente sia:

$$r_m = \frac{r_e + r_i}{2}$$

Attrito volvente.

Due approcci possibili per l'eliminazione dell'attrito si basano sul rotolamento oppure sulla lubrificazione; soffermandosi inizialmente sulla ruota si può fare riferimento alla figura 12. Affinché una ruota rotoli è ovviamente necessario che ci sia attrito statico tra la ruota ed il terreno, si parla di attrito statico perché nel punto di contatto non c'è movimento relativo e quindi le forze di attrito non compiono lavoro. Idealmente si avrà un solo punto di contatto mentre

nella realtà sia il terreno che la ruota si deformano (con diversi gradi di deformazione dovuti alle condizioni al contorno). Si supponga quindi inizialmente che tutta la deformazione avvenga a carico della ruota e si faccia riferimento alla figura 13.

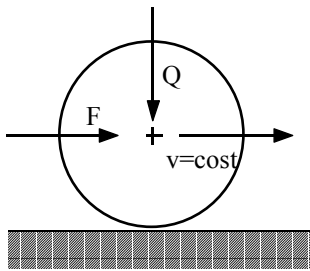


Figura 12

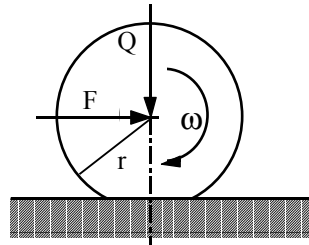


Figura 13

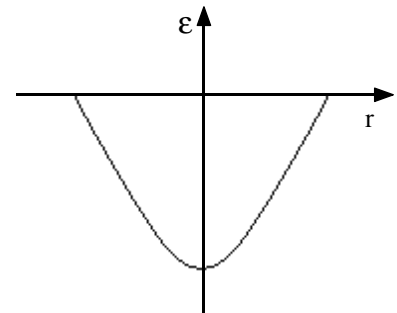


Figura 14

È significativo notare che la deformazione della ruota è simmetrica (si veda la figura 14) mentre non è simmetrica la distribuzione delle pressioni (si veda la figura 15).

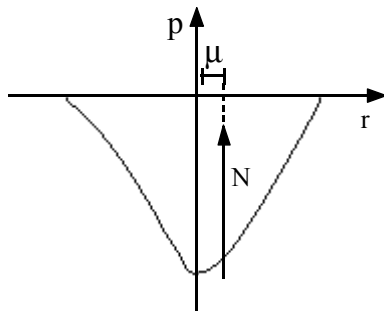


Figura 15

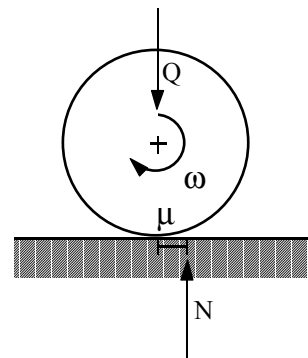


Figura 16

Dall'asimmetria del grafico delle pressioni nasce una coppia esprimibile come:

$$M = \mu N$$

Posta allora l'uguaglianza:

$$Fr = N\mu$$

si ricava:

$$F = \frac{\mu}{r} N = f_v N$$

dove f_v prende il nome di coefficiente di attrito volvente. Dalla figura 16 si può notare come l'attrito volvente non esprime nessuna forza di attrito T in quanto si ha:

$$T = 0$$

mentre si configura un momento espresso come segue:

$$M_m = \mu N = \mu Q$$

Attrito volvente. Cuscinetti a sfera. Lubrificazione untuosa. Lubrificazione idrodinamica.

Attrito volvente.

La definizione di attrito volvente è ricavabile anche a partire da un bilancio energetico; facendo dunque riferimento alla situazione di figura 1 si consideri una forza F tale per cui il centro della ruota mantenga una velocità v costante.

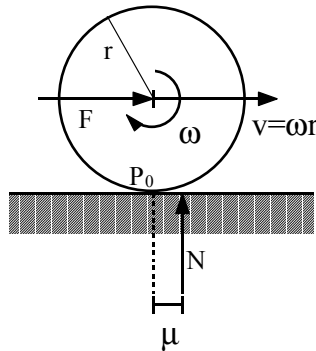


Figura 1

Supponendo che il raggio r della ruota sia costante (ovvero che le deformazioni che originano l'attrito volvente impongano una variazione trascurabile nel raggio) la potenza potrà essere espressa dalla relazione seguente:

$$W = Fv = N\omega\mu$$

ovvero:

$$F\omega r = N\omega\mu$$

da cui:

$$F = \frac{\mu}{r} N = f_v N$$

Un classico sistema nel quale si evidenzia l'attrito volvente è quello mostrato in figura 2, nella quale si può notare una incamicatura d'acciaio di forma cilindrica all'interno del quale sia posta della sabbia (le ruote degli schiacciasassi sono realizzate proprio in questo modo); durante il movimento la sabbia (che non riempie completamente il contenitore) si dispone con un profilo che segue l'angolo di attrito. In questo modo il baricentro della ruota viene spostato.

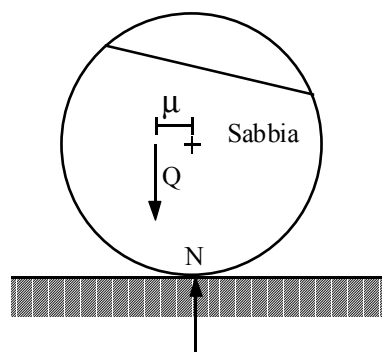


Figura 2

Cuscinetti a sfera.

Per ridurre l'attrito volvente si dovrebbero utilizzare ruote rigide su strade rigide, in questo modo la deformazione sarebbe minimizzata e con esso il fenomeno dell'attrito; uno strumento spesso utilizzato per ridurre l'attrito volvente è il cuscinetto a sfera (che elimina l'attrito volvente senza però risolvere tout court il problema dell'attrito) mostrato in figura 3. Questi meccanismi sono formati sostanzialmente da due anelli, dei quali quello esterno rimane solidale con l'intelaiatura dello strumento e quindi non si muove, l'anello interno è invece solidale con il perno e ruota con esso; le sfere rigide che separano i due anelli sono permesse una deformazione molto contenuta in modo da rotolare senza risentire in maniera eccessiva dell'attrito volvente (le zone di contatto, in giallo in figura, sono infatti molto piccole). L'inconveniente principale dei cuscinetti a sfera è ovviamente legato al consumo del materiale delle sferette che, essendo sempre in contatto tra di loro e dovendo sopportare pressioni molto elevate (in figura 4 si vede l'andamento

della pressione lungo la circonferenza dell'anello, che raggiunge un picco ogni volta che si ha un punto di contatto con una sferetta), giungono prima o poi a rompersi. Quando ciò succede i frammenti della sfera rimangono incastrati tra i due anelli del cuscinetto provocando rumori e vibrazioni. L'unica soluzione possibile è la sostituzione del cuscinetto.

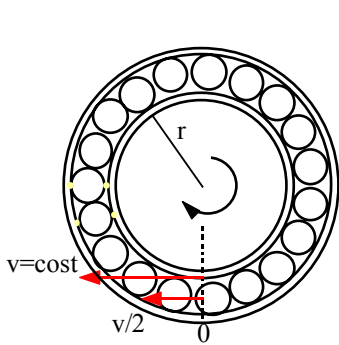


Figura 3

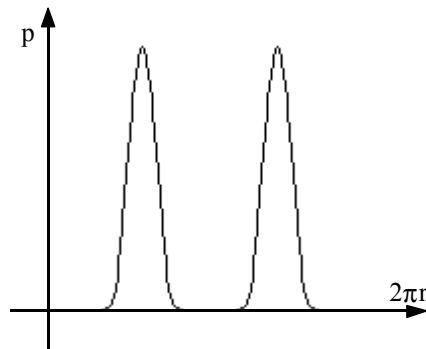


Figura 4

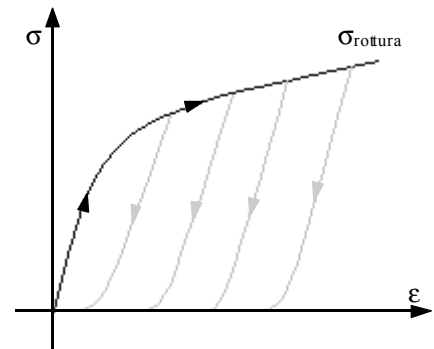


Figura 5

In figura 5 viene mostrato il grafico relativo al comportamento dei cuscinetti a seguito di cicli ripetuti; si osserva dunque che con prove ripetute non si arriva subito alla σ di rottura ma i cicli di isteresi portano alla fine a rompere il pezzo anche senza forze pari a quelle che spezzerebbero il pezzo in un unico ciclo. L'andamento della σ_R in funzione del numero di prove è mostrato in figura 7.

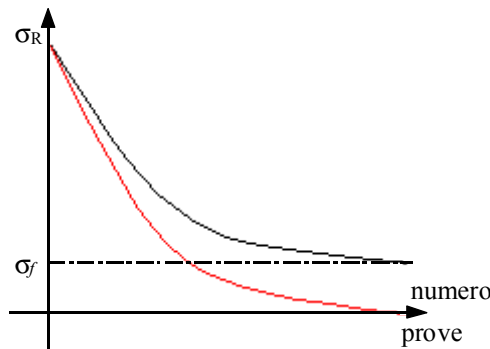


Figura 6

Si nota che quando l'asintoto σ_f è nullo (caso in rosso) è solo una questione di tempo prima che il materiale si rompa, nel caso nero, invece, quando l'asintoto è positivo, si potrà contare su una rottura all'infinito, dove per infinito si intendono circa 10^6 cicli. La longevità di un cuscinetto viene valutata facendo riferimento alla seguente relazione:

$$\sqrt[3]{Qn} = C$$

dove Q è il carico sul cuscinetto, n è il numero dei cicli e C è una costante relativa al fatto che dopo 10^6 cicli, il 90% delle sfere è ancora indenne.

Le strutture dei cuscinetti non si limitano ovviamente a quella mostrata in figura 3; a volte vengono infatti utilizzati dei cuscinetti a rulli invece che a sfere: i cuscinetti a rulli hanno contatto lungo una retta generatrice e non in un punto e possono quindi reggere carichi maggiori. Il punto debole dei cuscinetti a rullo è però legato al fatto che questi non sono in grado di sopportare le azioni assiali (come appare evidente da un raffronto tra le figure 7 e 8) e quindi è necessario un montaggio accoppiato.

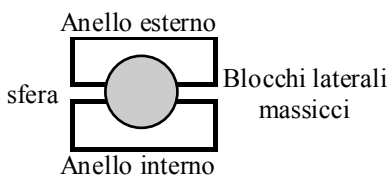


Figura 7

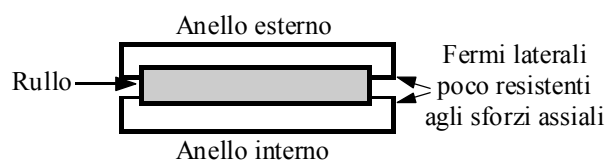


Figura 8

Esistono poi cuscinetti conici (come quello mostrato in figura 9) che però, per reggere bene, devono essere accoppiati con cuscinetti in direzioni differenti; esistono, infine, i cuscinetti reggi-spinta, di cui si vede una rappresentazione in sezione in figura 10.

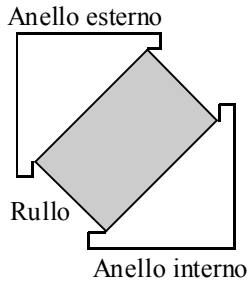


Figura 9

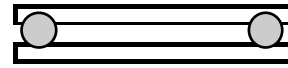


Figura 10

Lubrificazione untuosa.

Il secondo metodo per la riduzione degli attriti consiste nella lubrificazione tramite grassi; questi sono composti da molecole lunghe con un'estremità polare ed una apolare. Le teste polari si legano in maniera marcata alla superficie dell'oggetto, ciò significa che tra due superfici di contatto si formano strati come quelli mostrati in figura 11.

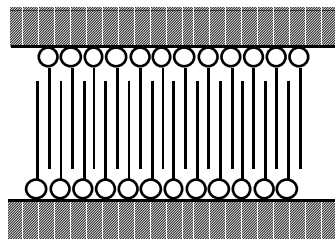


Figura 11

Le code apolari delle molecole funzionano dunque come degli ammortizzatori e quindi non c'è più un contatto diretto tra le asperità ma tra le code stesse. Ovviamente un lubrificante serve a poco quando le asperità sono alte ma anche quando il materiale si scalda; con le alte temperature, infatti, solitamente si abbassa l'untuosità dei materiali lubrificanti.

Lubrificazione idrodinamica.

Tutti i metodi fino ad ora visti relativi alla riduzione delle forze d'attrito si limitavano a ridurre le dissipazioni energetiche dovute a questo fenomeno senza però risolverlo definitivamente; un metodo che riduce invece in maniera molto significativa le dissipazioni energetiche eliminando in maniera definitiva il problema dell'attrito consiste nell'utilizzo della tecnica della lubrificazione idrodinamica. Si consideri dunque un perno inizialmente in quiete all'interno del suo alloggiamento (figura 12). Si supponga che l'inevitabile gioco presente tra la cavità ed il perno (molto esagerato in figura ma solitamente molto piccolo) sia riempito di olio lubrificante. Nel momento in cui il perno inizia a girare si può notare come, prima che le forze di attrito statico siano vinte, questo tende a scalare la parete del suo alloggiamento (come mostrato in figura 13); quando le forze di attrito statico vengono vinte inizia lo strisciamento. Quando il perno ha raggiunto la sua situazione di regime, lo si può ritrovare nella posizione mostrata in figura 14; si nota dunque che è cambiata l'eccentricità del sistema e, cosa più importante, il perno non è più in contatto con la sua guida. In questo modo, non essendoci appunto contatto, l'attrito viene eliminato. Le uniche dissipazione energetiche che rimangono sono allora quelle dovute alla resistenza viscosa imposta dal lubrificante, che comunque sono quasi trascurabili rispetto alle dissipazioni dovute all'attrito.

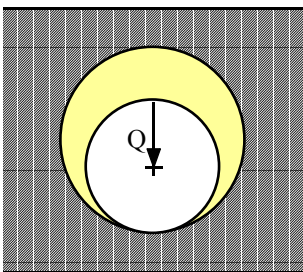


Figura 12

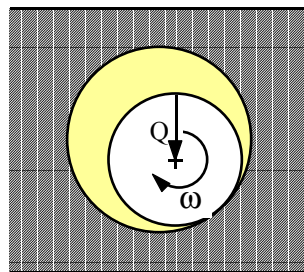


Figura 13

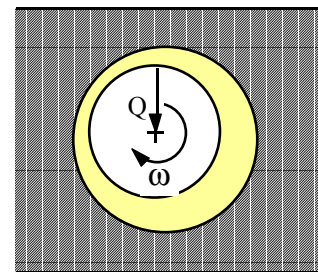


Figura 14

Le cause fisiche di quanto si può osservare sono più comprensibili osservando che, siccome, come si è detto, il gioco tra il perno e la guida (che prende il nome di meato) è molto piccolo, tutti i raggi di curvatura possono essere considerati infiniti; questo significa che perno e guida possono essere visti come un condotto convergente-divergente come quello mostrato in figura 15. Di tutto il condotto, inoltre, si può fare riferimento solo ad un tratto (quello, appunto, evidenziato in figura) e ciò significa che il sistema perno-guida viene alla fine modellizzato attraverso un pattino caratterizzato da

una superficie piana, inclinata di un angolo α rispetto ad una superficie, pure piana, sulla quale scorre con velocità V . Si ritiene che la presenza di abbondante liquido lubrificante generi una condizione di sostentamento, con il pattino che si comporta in modo analogo ad uno sci d'acqua, galleggiando sul velo d'olio.

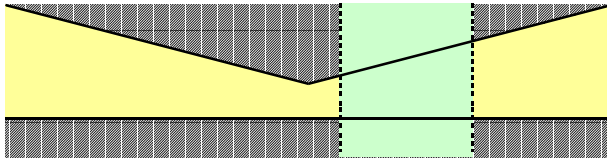


Figura 15

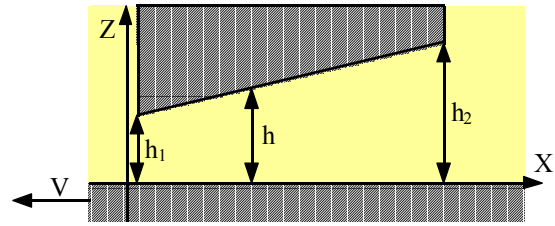


Figura 16

Per osservare cosa accade nella zona compresa tra la superficie del pattino e quella sottostante, è necessario che l'osservatore rimanga solidale con il pattino, vedendo quindi la superficie sottostante animata da una velocità relativa $-V$. Con il suo moto la superficie trascina all'interno dell'interstizio formato dalle due superfici, detto meato, una parte del lubrificante, creando così una portata di lubrificante all'interno del meato stesso. Volendo affrontare il problema in modo estremamente semplificato, al fine di mettere in evidenza quali siano le grandezze che più influenzano il fenomeno, si supponga che il moto del lubrificante all'interno del meato sia unidirezionale lungo l'asse X (si faccia dunque riferimento allo schema di un pattino lubrificato mostrato in figura 16), senza componenti di velocità nelle direzioni Y e Z . Mentre l'ipotesi di assenza di velocità nella direzione Z si giustifica col fatto che le altezze h del meato sono molto piccole e quindi altrettanto piccole saranno le eventuali componenti di velocità in quella direzione, nessuna giustificazione può essere data per quanto riguarda la direzione Y , parallela alla superficie di scorrimento e perpendicolare alla velocità relativa tra pattino e superficie. Solitamente si risolve questa difficoltà facendo l'ipotesi che la dimensione trasversale b del pattino (la sua larghezza, lungo l'asse Y) sia molto maggiore della sua lunghezza l (pattino di larghezza infinita). In questo caso infatti i filetti di fluido saranno impossibilitati a deviare verso i fianchi del pattino e non si avranno perciò fuoriuscite laterali. Se il pattino viene supposto di larghezza infinita perdono di significato le dimensioni trasversali, per cui ci si potrà riferire ad un pattino adimensionalizzato, ovvero di lunghezza unitaria.

Si suppone anche che sia basso il numero di Reynolds

$$Re = \frac{\rho h v}{\mu}$$

dove ρ è la densità del fluido lubrificante, μ la sua viscosità e h rappresenta una dimensione caratteristica del fenomeno, in questo caso identificata nell'altezza del meato; proprio i piccolissimi spessori del meato consentono di ritenere piccolo Re , permettendo di ritenere che il moto del fluido all'interno del meato sia laminare. Ricordando che il numero di Reynolds è costituito dal rapporto fra le forze di massa e quelle viscosive agenti su di un elementino di fluido, quando Re è piccolo si può ritenere che le forze di massa (forze di gravità e forze di inerzia) siano trascurabili rispetto alle forze viscosive e di pressione.

Si ricordi, anche, che la presenza di viscosità è causa della nascita di sforzi tangenziali τ fra filetti di fluido animati da diversa velocità, tali sforzi tangenziali sono legati alle variazioni di velocità dalla legge di Petroff:

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial z} \quad (1)$$

dove z rappresenta una coordinata lungo la direzione normale al vettore velocità, in questo caso diretta lungo l'asse X .

È possibile ora scrivere l'equazione di equilibrio di un elementino di fluido di lati dx , dz , 1 (pattino di larghezza unitaria) posto all'interno del meato sotto l'azione delle sole forze viscosive e di pressione (si faccia riferimento alla figura 17).

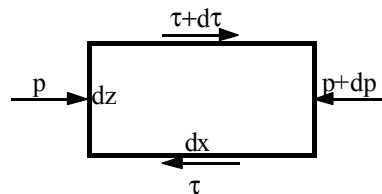


Figura 17

L'aver trascurato le forze di massa permette di ignorare le variazioni di pressione lungo la quota Z , con la conseguenza che la pressione risulta funzione solo della coordinata X , mentre l'assenza di componenti di velocità in direzione Z

rende nulli gli sforzi tangenziali τ agenti sulle facce laterali, presenti invece sulle facce inferiore e superiore. Si ottiene pertanto:

$$dp \cdot dz \cdot 1 = d\tau \cdot dx \cdot 1$$

ovvero:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\tau}{dz}$$

Posto allora:

$$p' = \frac{dp}{dx}$$

e ricordando la legge di Petroff espressa dalla relazione (1) si ottiene:

$$p' = \mu \frac{d^2v}{dz^2}$$

che costituisce un'equazione differenziale a variabili separabili. Essendo p' dipendente solo da X , è immediato integrare rispetto a Z ottenendo la legge di variazione della velocità all'interno di una generica sezione del meato posta a distanza x dall'origine degli assi:

$$v(x) = \frac{p'}{\mu} \cdot \frac{z^2}{2} + Az + B \quad (2)$$

con A e B costanti da determinarsi con le condizioni al contorno. Dal momento che gli straterelli di lubrificante aderenti alle pareti devono avere la stessa velocità della parete, detta $h(x)$ l'altezza del meato nella sezione di ascissa x deve essere:

$$\begin{cases} v = -V & \text{per } z = 0 \\ v = 0 & \text{per } z = h \end{cases}$$

il che consente il calcolo delle costanti:

$$\begin{cases} B = -V \\ A = \frac{V}{h} - \frac{p'h}{2\mu} \end{cases}$$

che, sostituite nella relazione (2) danno:

$$v = \frac{p'}{\mu} \cdot \frac{z^2}{2} + \left(\frac{V}{h} - \frac{p'h}{2\mu} \right) z - V$$

o anche, raccogliendo:

$$v = V \left(\frac{z}{h} - 1 \right) + \frac{p'}{2\mu} (z^2 - hz)$$

Come si vede da quest'ultima relazione, il lubrificante si muove all'interno del meato con un andamento della velocità dovuto alla sovrapposizione di due effetti: il primo (primo addendo del secondo membro dell'ultima relazione scritta) legato al trascinamento dovuto al moto della parete con velocità V che dà origine ad una variazione lineare di velocità lungo Z (si veda il grafico di figura 18), il secondo (secondo addendo) legato ad eventuali variazioni di pressione lungo il meato, con $p' \neq 0$, che origina un andamento parabolico delle velocità del fluido, annullatesi in corrispondenza delle due pareti, per $z=0$ e per $z=h$ (come mostrato in figura 19).

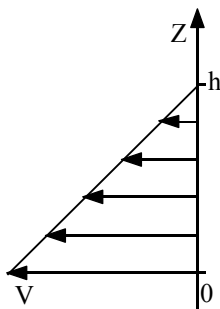


Figura 18

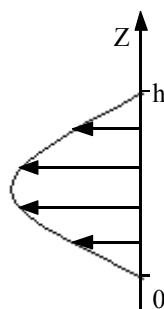


Figura 19

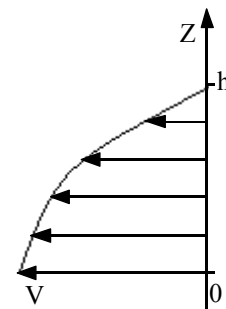


Figura 20

Il profilo complessivo è dunque mostrato qualitativamente in figura 20.

Lubrificazione idrodinamica.

Lubrificazione idrodinamica.

Per effetto dell'andamento $v(x)$ della velocità precedentemente trovato, si ha una portata Q di lubrificante entro il meato, che può essere calcolata (in volume) effettuando l'integrale:

$$Q(x) = \int_0^h v(x) dx = V \left(\frac{h}{2} - h \right) + \frac{p'}{2\mu} \left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} \right) = -\frac{Vh}{2} - \frac{p'h^3}{12\mu}$$

Si osserva dunque che la portata Q è somma di una portata di trascinamento e di una portata di pressione e che la portata di trascinamento, essendo l'altezza h del meato variabile lungo il pattino, risulta funzione di x . D'altra parte, nell'ipotesi di un fluido lubrificante incompressibile e di un suo moto unidirezionale con assenza di fuoriuscite laterali, la portata in volume deve risultare costante in ogni sezione:

$$Q(x) = Q_0$$

e deve quindi nascere all'interno del meato una pressione $p(x)$ variabile tale da generare una portata che compensi le variazioni di quella di trascinamento. La legge $p(x)$ non è a priori nota, ma dovrà essere comunque tale da rispettare le condizioni al contorno, che impongono che le pressioni esistenti alle due estremità del pattino assumano lo stesso valore, solitamente corrispondente alla pressione atmosferica p_a . Si avrà allora:

$$p(0) = p(l) = p_a \quad (1)$$

ed esisterà almeno un punto x_0 interno all'intervallo $(0, l)$ in cui si annulla la derivata della funzione $p(x)$, che assume lo stesso valore agli estremi dell'intervallo (teorema di Rolle). Detta h_0 l'altezza del meato nella sezione di ascissa x_0 , la condizione di costanza della portata porta a scrivere

$$Q(x) = -\frac{Vh}{2} - \frac{p'h^3}{12\mu} = -\frac{Vh_0}{2} = Q_0$$

che consente di ricavare l'espressione:

$$p'(x) = 6\mu V \left(\frac{h_0 - h}{h^3} \right) \quad (2)$$

L'altezza h_0 che compare in quest'ultima relazione può essere calcolata imponendo la condizione espressa dalla relazione (1), dovendo risultare:

$$\int_0^l p'(x) dx = p(l) - p(0) = 0$$

da cui deriva, combinando le ultime due relazioni scritte:

$$\int_0^l \frac{h_0 - h}{h^3} dx = 0$$

e quindi:

$$h_0 = \frac{\int_0^l h^{-2} dx}{\int_0^l h^{-3} dx}$$

Nel caso di superfici piane, $h(x)$ ha un andamento lineare e, dette h_1 ed h_2 le altezze rispettivamente minima e massima del meato, può essere espressa dalla:

$$h(x) = h_1 + \frac{h_2 - h_1}{l} x \quad (3)$$

Ricordando che:

$$\int \frac{dx}{(a + bx)^2} = \frac{1}{b(a + bx)}$$

e che:

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{2b(a+bx)^2}$$

con semplici passaggi si ricava:

$$h_0 = \frac{2h_1h_2}{h_1+h_2}$$

e da questa, tramite la relazione (3), si determina l'ascissa x_0 corrispondente all'altezza h_0 :

$$x_0 = \frac{h_1}{h_1+h_2}l$$

dove, si ricordi, si annulla p' e quindi la pressione raggiunge un massimo (o un minimo). Si può definire parametro caratteristico del meato il rapporto:

$$n = \frac{h_2}{h_1}$$

sempre maggiore di 1, ed esprimere x_0 in funzione di n :

$$x_0 = l \frac{1}{n+1} < \frac{l}{2}$$

mettendo così in evidenza il fatto che la derivata della pressione si annulla sempre in corrispondenza della porzione di meato caratterizzata dalle minori altezze. Dall'espressione (2) di p' si vede come questa risulti positiva (pressione crescente) per $h < h_0$ e negativa (pressione decrescente) per $h > h_0$; la pressione ha dunque un massimo nel punto di ascissa x_0 , il che ha un evidente significato fisico, come mostra la figura 1: in questo modo, infatti, la sovrappressione interna tende a ridurre la portata in ingresso da h_2 e ad aumentare quella in uscita da h_1 , rendendo possibile la costanza della portata in tutto il meato.

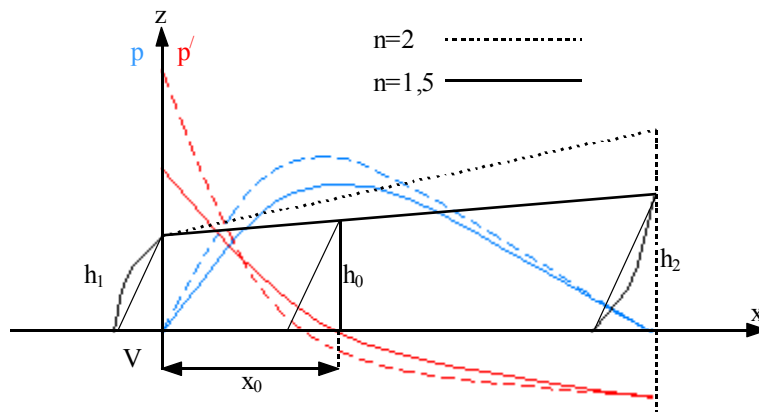


Figura 1

Nota h_0 e tenendo conto della relazione (3), p' dato dalla (2) risulta una funzione completamente nota di x , che integrata consente di ottenere l'andamento della pressione all'interno del meato:

$$p(x) = \int_0^x p'(x) dx$$

I diagrammi di $p'(x)$ e di $p(x)$ sono stati riportati, in figura 1, relativamente a due diverse angolazioni del pattino. L'integrazione della pressione $p(x)$ sull'intera lunghezza del pattino permette il calcolo del carico per unità di larghezza N supportabile dal pattino in condizioni di equilibrio:

$$N = \int_0^l p(x) dx$$

dal quale infine si ricava il carico totale supportabile P moltiplicando N per la larghezza b del pattino:

$$P = bN$$

Si è così visto come sia possibile valutare il carico che il pattino è in grado di sopportare in corrispondenza di un'assegnata geometria del meato, definita dalle altezze h_1 ed h_2 e dalla lunghezza l . Il problema che in realtà bisognerebbe risolvere è l'inverso di quello appena visto: solitamente è noto il carico che insiste sul pattino e si vuol determinare la configurazione assunta dal meato in condizioni di equilibrio.

Per risolvere questo problema conviene definire un meato adimensionale di riferimento, mostrato in figura 2, ottenuto dividendo le altezze h per h_1 e le ascisse x per l . Si ottengono così nuove coordinate η e ξ legate alle vecchie dalle ovvie relazioni:

$$\begin{cases} h = h_1 \eta \\ x = l \xi \end{cases}$$

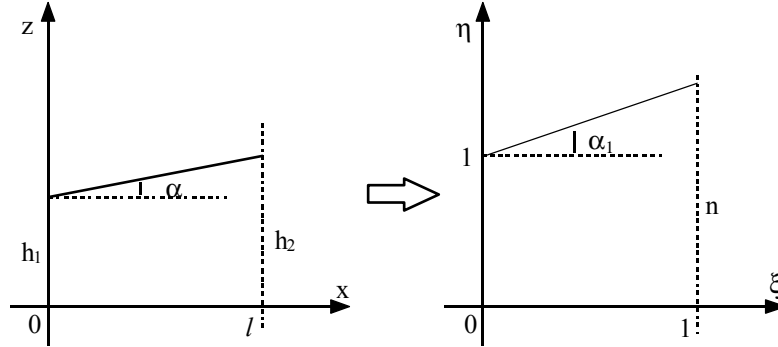


Figura 2

Nel caso di superfici piane, tutte le possibili conformazioni del meato si otterranno al variare di un unico parametro, ad esempio l'angolo α che il pattino forma rispetto alla superficie su cui scorre. In alternativa ci si può riferire al parametro caratteristico n già visto prima, che risulta legato ad α dalla relazione:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h_2 - h_1}{l} = \frac{h_1}{l} (n - 1)$$

Si può notare come nel meato di riferimento

$$n = \frac{\eta_2}{\eta_1} = \eta_2$$

rappresenti direttamente l'altezza dell'imbocco del meato. Riformulando l'espressione (2) in termini delle nuove coordinate η si ottiene:

$$p' = \frac{\mu V}{h_1^2} 6 \left(\frac{\eta_0 - \eta}{\eta^3} \right) = \frac{\mu V}{h_1^2} \phi(\xi, n)$$

questa risulta una funzione nota di ξ , una volta che sia stato fissato il parametro n . Si può allora integrare una prima volta per ottenere l'andamento della pressione e una seconda volta per ottenere la risultante delle pressioni N . Ricordando che:

$$dx = l d\xi$$

si ottiene:

$$\begin{cases} p = \int_0^x p' dx = \frac{\mu V}{h_1^2} l \int_0^\xi \phi(\xi, n) d\xi = \mu V \frac{l}{h_1^2} \psi(\xi, n) \\ N = \int_0^l p dx = \mu V \frac{l^2}{h_1^2} \int_0^1 \psi(\xi, n) d\xi = \mu V \frac{l^2}{h_1^2} A(n) \end{cases}$$

dove $A(n)$ rappresenta il valore dell'integrale, facilmente calcolabile anche con tecniche numeriche per diversi valori del parametro n . L'espressione:

$$N = \mu V \frac{l^2}{h_1^2} A(n)$$

mette chiaramente in evidenza le grandezze fondamentali che intervengono nel caso di sostentamento del pattino su un velo di fluido lubrificante: il carico sopportabile sarà proporzionale (tramite un coefficiente che dipende dalla forma del meato) alla viscosità del fluido, alla velocità V relativa, al quadrato della lunghezza del pattino e inversamente proporzionale al quadrato dell'altezza minima del meato. Dal momento che N è stato calcolato per un pattino di larghezza unitaria, il carico complessivo risulterà anche proporzionale alla larghezza effettiva del pattino. Tutte le grandezze che compaiono nell'ultima relazione scritta (tranne h_1) rappresentano dei parametri e sono perciò da considerare alla stregua di dati del problema, sui quali è possibile intervenire in fase di progetto, ma che risultano

definiti una volta conclusa la fase progettuale. L'unica variabile è costituita dall'altezza minima del meato, che sinora è stata data per nota, ma che in realtà costituisce l'incognita del problema. Per un assegnato valore del carico, dimensioni del pattino, velocità di scorrimento e viscosità del lubrificante, il pattino si assesterà in una configurazione, definita dal parametro caratteristico n , tale da mantenere costante la portata all'interno del meato e garantire l'equilibrio fra risultante delle pressioni e carico agente sul pattino.

Lubrificazione idrodinamica. Cuscinetti Michell.

Lubrificazione idrodinamica.

Il parametro n può essere facilmente determinato imponendo il rispetto delle condizioni di vincolo del pattino, che possono essere di due tipi, illustrati nelle figure 1 e 2 nelle quali si vedono, rispettivamente, un pattino guidato verticalmente (a orientamento fisso, moto traslatorio) e un pattino incernierato (oscillante, moto roto-traslatorio).

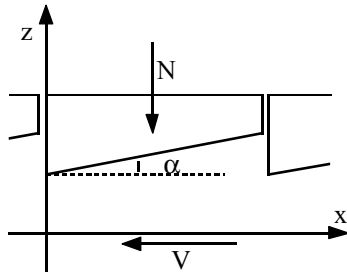


Figura 1

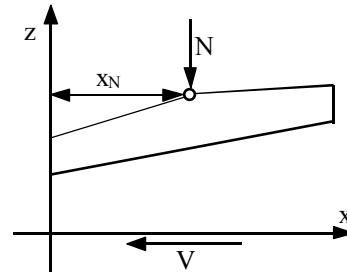


Figura 2

Nel primo caso è noto l'angolo α che il pattino forma rispetto alla superficie di scorrimento. Ricordando il legame fra α ed n :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h_2 - h_1}{l} = \frac{h_1}{l} (n - 1) = \frac{h_1}{l} \operatorname{tg} \alpha_1$$

e ricavato il rapporto h_1/l dalla relazione:

$$N = \mu V \frac{l^2}{h_1^2} A(n) \tag{1}$$

si ottiene:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{h_1^2}{l^2} (n - 1)^2 = \frac{\mu V}{N} A(n) (n - 1)^2$$

Il termine:

$$A(n - 1)^2 = \frac{N \operatorname{tg}^2 \alpha}{\mu V}$$

risulta perciò dipendere solo da parametri noti ed è immediatamente ricavabile. Provvedendo una volta per tutte a tabulare i valori di $A(n-1)^2$ insieme a quelli di n e di A per svariati valori di n , è possibile, eventualmente ricorrendo ad interpolazioni, determinare A e quindi h_1 tramite la relazione (1). Nella tabella 1 sono riportate alcune costanti caratteristiche per pattini lubrificati.

n	A	$A(n-1)^2$	xN/l	k
1.2	0.0755	0.0030	0.4813	3.3450
1.4	0.1177	0.0188	0.4659	2.5204
1.6	0.1411	0.0508	0.4527	2.1982
1.8	0.1534	0.0981	0.4411	2.0328
2.0	0.1589	0.1589	0.4308	1.9383
2.2	0.1602	0.2307	0.4216	1.8816
2.4	0.1590	0.3116	0.4132	1.8474
2.6	0.1561	0.3997	0.4056	1.8274
2.8	0.1523	0.4935	0.3986	1.8169
3.0	0.1479	0.5917	0.3921	1.8129
3.5	0.1360	0.8499	0.3778	1.8199
4.0	0.1242	1.1177	0.3657	1.8399
5.0	0.1035	1.6566	0.3460	1.8940
6.0	0.0872	2.1790	0.3305	1.9519
7.0	0.0743	2.6753	0.3177	2.0076
8.0	0.0641	3.1430	0.3070	2.0595

9.0	0.0560	3.5829	0.2978	2.1074
10.0	0.0493	3.9967	0.2897	2.1515
15.0	0.0293	5.7458	0.2606	2.3288
20.0	0.0197	7.1108	0.2416	2.4580

Tabella 1

Nel caso invece in cui il pattino sia oscillante, libero di ruotare attorno a un perno posto a distanza x_N dal bordo d'uscita del pattino, per l'equilibrio alla rotazione dovrà risultare

$$\int_0^l p(x)(x - x_N) dx = 0$$

ovvero:

$$\int_0^l p(x)x dx = x_N \int_0^l p(x) dx = Nx_N$$

Con le sostituzioni

$$\begin{cases} x = l\xi \\ dx = l d\xi \end{cases}$$

si ottiene:

$$\mu V \frac{l^3}{h_1^2} \int_0^1 \psi(\xi, n) d\xi = \mu V \frac{l^2}{h_1^2} A(n) x_N$$

e infine:

$$\frac{x_N}{l} = \frac{\int_0^1 \psi(\xi, n) \xi d\xi}{A(n)} = C(n)$$

che evidenzia come il rapporto x_N/l sia direttamente legato ad n e possa essere pertanto tabulato unitamente ad A e $A(n-1)^2$, permettendo l'immediata individuazione della "forma" del meato.

È perciò sempre possibile, ricorrendo alla tabella 1, determinare la costante $A(n)$ e quindi l'altezza minima del meato h_1 . In teoria è sempre possibile determinare una configurazione del meato tale da garantire l'equilibrio del pattino, quale che sia il carico che insiste su di esso; infatti, riferendosi per semplicità al caso al caso del pattino a orientamento fisso, aumentando il carico dal valore N_1 al valore N_2 il pattino tenderà ad avvicinarsi alla superficie inferiore, con una diminuzione delle altezze costante lungo il meato, ma che risulta percentualmente più significativa in corrispondenza dell'altezza minima h_1 ; si aggrava così la differenza tra la portata di trascinamento in ingresso e quella in uscita e per mantenere costante la portata deve perciò aumentare l'effetto della pressione, che quindi cresce fino a ristabilire l'equilibrio fra risultante delle pressioni e carico gravante sul pattino. Nella figure 3 e 4 viene appunto mostrato come varia il diagramma delle pressioni quando il pattino, abbassandosi, passa da una situazione con $h_1=1$ ed $n=3$ ad una con $h_1=0.8$ ed $n=3.5$; rilevando dalla tabella 1 il valore della costante A per i due valori di n si può calcolare il rapporto fra il carico N_2 sopportabile nelle nuove condizioni e quello precedente N_1 :

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\left[\frac{\mu V l^2 A(n)}{h_1^2} \right]_2}{\left[\frac{\mu V l^2 A(n)}{h_1^2} \right]_1} = \frac{0.136}{(0.8)^2} \cdot \frac{1}{0.148} = 1.436$$

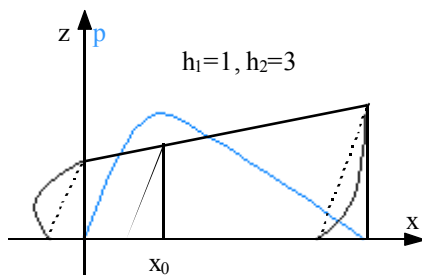


Figura 3

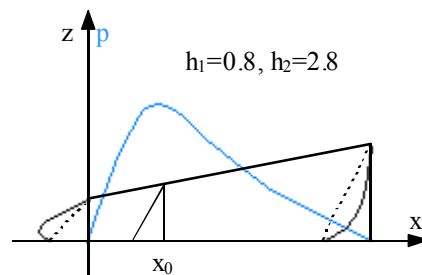


Figura 4

La presenza del film d'olio trascinato fra le superfici in moto relativo si traduce quindi in un'azione di sostentamento che mantiene separate le superfici; l'altezza minima h_1 continua a diminuire al crescere del carico, ma resta comunque diversa da zero. L'assenza di contatto fra le superfici annulla l'usura che invece accompagna sempre l'attrito radente (anche quando questo viene ridotto con l'impiego di sostanze untuose) ed è questo il vantaggio maggiore che spinge ad adottare la lubrificazione idrodinamica.

In realtà bisogna tener conto del fatto che entrambe le superfici che delimitano il meato presentano sempre una certa rugosità, caratterizzata da asperità dell'ordine di qualche centesimo di millimetro che possono dar origine a contatti diretti (quindi ad attrito radente) qualora l'altezza minima del meato scenda al di sotto della somma $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ delle asperità maggiori di entrambe le superfici (si faccia riferimento alla figura 5).

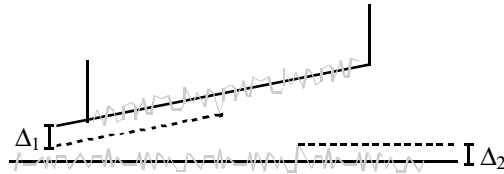


Figura 5

Va inoltre sottolineato il fatto che contatti diretti anche sporadici provocano un aumento delle dissipazioni e quindi del calore, con aumento della temperatura del fluido lubrificante. Dal momento che la viscosità decresce rapidamente al crescere della temperatura, dalla relazione (1) si vede come tale diminuzione debba essere compensata da un'ulteriore diminuzione di h_1 , con aumento dei contatti diretti, dissipazioni di energia e aumento della temperatura... Si innesca così un circolo vizioso che può terminare con la cessazione di ogni effetto lubrificante (sia idrodinamico che untuoso) con la formazione di vere e proprie saldature fra le superfici a contatto, fenomeno che prende il nome di grippaggio, per evitare il quale la temperatura viene solitamente mantenuta costante sfruttando la circolazione forzata dell'olio tramite una pompa e degli scambiatori di calore.

L'espressione (1) consente quindi di calcolare l'altezza minima del meato una volta che sia nota la geometria del pattino (lunghezza e larghezza), il carico da sopportare, la velocità di scorrimento e la viscosità, da valutarsi per una temperatura media stimata del lubrificante all'interno del meato, eventualmente da verificare successivamente in base ad un bilancio termico. In questo modo si potrà verificare, conoscendo la scabrosità delle superfici, che non vi siano contatti diretti, con il conseguente beneficio di assenza di usura.

È però evidente che una lubrificazione idrodinamica può sussistere solo a patto che la velocità V sia abbastanza elevata: quando questa scende, in particolare durante i transitori di avviamento e di arresto, l'altezza minima diminuisce anch'essa e nascono quindi inevitabilmente contatti diretti, dapprima sporadici, quindi via via più numerosi man mano che si abbassa la velocità: si parla in questo caso di lubrificazione combinata, una condizione intermedia fra lubrificazione idrodinamica e lubrificazione untuosa, con valori della resistenza d'attrito che cresce al diminuire della velocità. In assenza di moto relativo cessa ogni effetto idrodinamico e l'efficacia del lubrificante si limita alle sue caratteristiche di untuosità e proprio per questo motivo un buon lubrificante deve possedere entrambe le caratteristiche: elevata viscosità per consentire l'instaurarsi di un'azione di sostentamento anche a basse velocità e una buona untuosità che limiti attrito ed usura quando la velocità diventa troppo bassa.

Osservando l'espressione (1) parrebbe in ogni caso conveniente aumentare la viscosità μ del lubrificante per ridurre la possibilità di contatti diretti anche con elevati carichi e basse velocità, ma un aumento della viscosità comporta un aumento degli sforzi tangenziali τ fra gli strati di fluido, che si traducono in forze T agenti sulle facce del meato che si oppongono al moto relativo, forze che era possibile calcolare sfruttando la legge di Petroff:

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial z}$$

Ricordando allora l'espressione seguente

$$v = V \left(\frac{z}{h} - 1 \right) + \frac{p'}{2\mu} (z^2 - hz)$$

e combinando le ultime due relazioni scritte si ottiene:

$$\tau(z) = \mu \frac{dv}{dz} = \frac{\mu V}{h} + \frac{p'}{2} (2z - h)$$

che, ricordando l'espressione:

$$p'(x) = 6\mu V \left(\frac{h_0 - h}{h^3} \right)$$

e valutando τ in corrispondenza della superficie inferiore con $z=0$, diviene:

$$\tau(0) = \frac{\mu V}{h} - \frac{3\mu V(h_0 - h)}{h^2} = \mu V \frac{4h - 3h_0}{h^2}$$

Le azioni tangenziali tendono a frenare la superficie inferiore e danno origine ad una componente T dell'azione complessiva del fluido sulla superficie (dovuta alle forze viscosse e a quelle di pressione) diretta in verso opposto alla velocità, analogamente a quanto avviene in presenza di "normale" attrito radente. Integrando sull'intera lunghezza del pattino e riferendosi ancora alle coordinate adimensionalizzate, si ottiene:

$$T = \int_0^l \tau(0) dx = \mu V \frac{l}{h_1} \int_0^1 \frac{4\eta - 3\eta_0}{\eta^2} d\xi = \mu V \frac{l}{h_1} B(n)$$

dove B(n) è un'ulteriore costante dipendente dalla forma del meato che si può aggiungere alle altre della tabella 1. Solitamente si preferisce determinare il rapporto

$$f_m = \frac{T}{N}$$

cui viene dato il nome di coefficiente di attrito mediato, con ovvia analogia al caso dell'attrito radente. Ricordando la relazione (1) di N si ottiene:

$$f_m = \frac{h_1}{l} \cdot \frac{B(n)}{A(n)}$$

Conviene ricavare il rapporto h_1/l ancora dalla relazione (1) in modo da esprimere f_m in funzione dei dati di progetto, ottenendo:

$$f_m = \sqrt{\frac{\mu V A(n)}{N}} \frac{B(n)}{A(n)} = k(n) \sqrt{\frac{\mu V}{N}} \quad (2)$$

dove

$$k(n) = \frac{B}{\sqrt{A}}$$

è una nuova costante, i cui valori appaiono tabulati nella solita tabella 1, essendo stati calcolati per mezzo di un semplice programma scritto in BASIC, il cui testo viene qui di seguito riportato:

```

REM valori di n=h2/h1
DATA 1.2,1.4,1.6,1.8,2.,2.2,2.4,2.6,2.8,3.,3.5,4.,5.,6.,7.,8.,9.,10.,15.,20.
REM L=1, h1=1, muV=1 : pattino dimensionale

np=1000 : dx=1/dp
PRINT " n  A      A(n-1)^2    xN/l    k"
FOR i=1 TO 20
  READ n
  h0=2*n/(1+n) :REM altezza ove pressione è max
  p=0: A=0: B=0: M=0 :REM inizializzo integrali
  x=-dx/2 :REM inizializzo ascisse
  FOR j=1 TO np :REM per ogni intervallo
    x=x+dx :REM ascissa media
    h=1+x*(n-1) :REM altezza del meato media
    p=p+(h0-h)/(h*h*h) :REM p=integrale di p'
    A=A+p :REM risultante delle pressioni
    M=M+p*x :REM momento delle pressioni
    B=B+(4*h-3*h0)/(h*h) :REM risultante delle forze viscosse
  NEXT
  xN=M/A: A=6*dx*dx*A: B=B*dx: k=B/SQRT(A) :REM grandezze per tabella
  PRINT n, A, A*(n-1)*(n-1), xN, k
NEXT
END

```

È da sottolineare il fatto che malgrado l'espressione

$$T = f_m N \quad (3)$$

sia formalmente identica alla legge di Coulomb per l'attrito radente, assume in questo caso un significato profondamente diverso: la legge di Coulomb afferma infatti l'esistenza di una proporzionalità diretta fra resistenza al moto e componente normale della reazione di contatto, mentre l'ultima relazione scritta si limita ad affermare

l'esistenza di un legame fra resistenza al moto e carico sopportabile dal cuscinetto; infatti f_m non è costante, ma dipende esso stesso dal carico, che compare sotto la radice della sua espressione (2). La tendenza ad utilizzare espressioni che ricalchino l'aspetto di altre già utilizzate in precedenza per risolvere problemi analoghi è pratica assai diffusa, ma che comporta la tentazione di mantenere il significato originario di tali espressioni anche ai casi estesi per analogia, estensione quasi sempre illegittima. L'ultima relazione scritta andrebbe più correttamente formulata come:

$$T = f_m(N) \cdot N$$

ma, a questo punto, tanto varrebbe scrivere:

$$T = f(N)$$

che sarebbe del tutto corretta, ma che in realtà fornisce pochissime informazioni. Il motivo sostanziale per cui risulta conveniente una formulazione del tipo della (3) è che in questo modo risulta possibile confrontare gli ordini di grandezza di quantità che già si è abituati a valutare: se è consuetudine stimare la facilità di far scorrere una superficie su un'altra in base al coefficiente d'attrito radente, risulta comodo avere a disposizione un coefficiente d'attrito mediato per valutare i vantaggi della lubrificazione idrodinamica. Resta però importante non fare confusione fra i diversi significati delle formule utilizzate. Non solo il coefficiente d'attrito mediato f_m dipende dal carico, ma dipende altresì dalla velocità, al contrario dell'attrito coulombiano, che è sensibile soltanto al segno della velocità. Nella figura 6 viene mostrato l'andamento del coefficiente d'attrito: si nota allora che il coefficiente di attrito mediato (in nero in figura) cresce con la velocità e dovrebbe annullarsi quando si annulla la velocità (e conseguentemente le forze viscosi); tenendo invece conto delle asperità, avviene che al diminuire della velocità al di sotto di un certo valore cominciano a nascere contatti diretti che fanno aumentare le resistenze allo scorrimento e si passa da attrito mediato ad attrito combinato (f_c in grigio in figura) sino a raggiungere il coefficiente di attrito statico (in rosso in figura) per $V=0$.

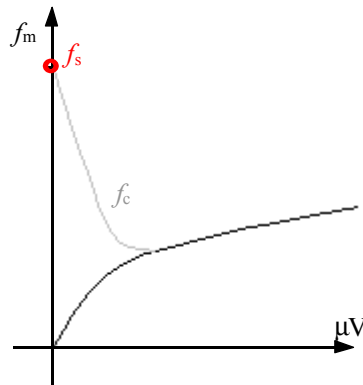


Figura 6

Cuscinetti Michell.

Un'applicazione dei pattini orientabili la si può trovare nei cuscinetti reggi-spinta di tipo Michell, rappresentati in maniera schematica in figura 7.

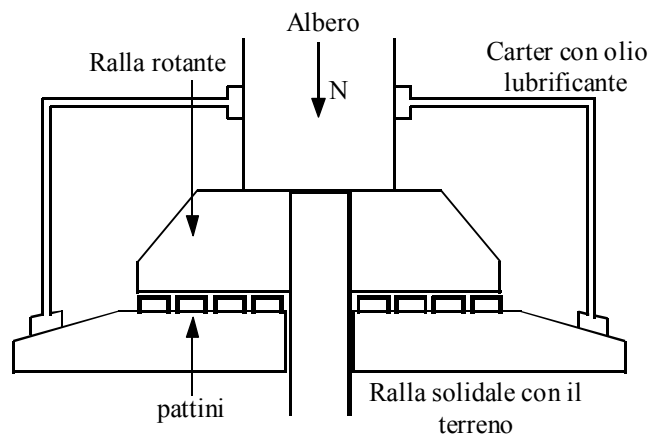


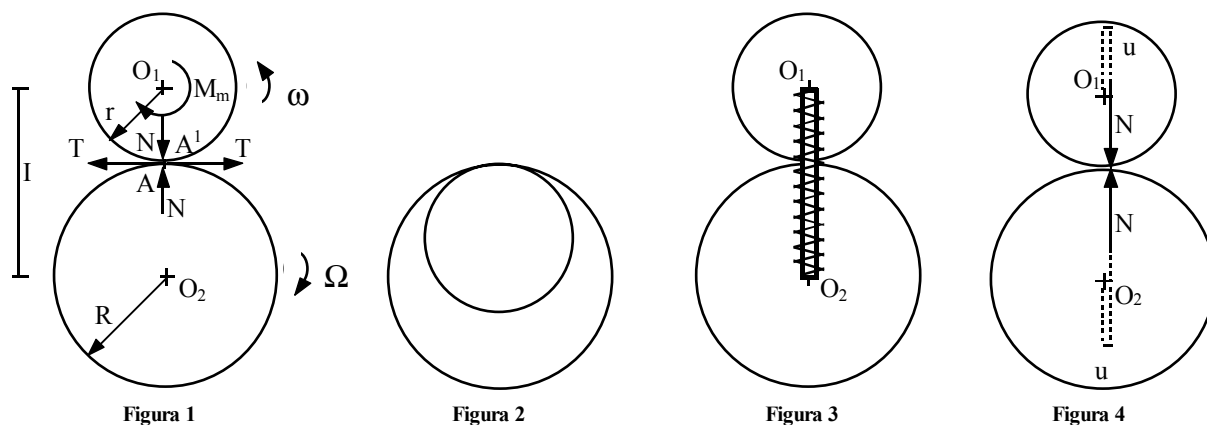
Figura 7

La lubrificazione di questo tipo di accoppiamenti è molto complessa e non è ovviamente possibile utilizzare dei cuscinetti a sfera; per questo motivo si utilizzano dei pattini orientabili; questi sono formati da una basetta in metallo morbido, che viene deformata (conferendo così al pattino la configurazione finale) quando l'albero (o ralla) si appoggia sul supporto.

Ruote a frizione. Trasmissioni a cinghia.

Ruote a frizione.

L'attrito non solamente un effetto negativo che deve essere eliminato a tutti i costi; diversi aspetti della meccanica hanno nell'attrito il loro punto di forza. Le ruote a frizione, ad esempio, sono dei meccanismi che sfruttano gli attriti per trasmettere il moto da una prima ruota ad una seconda, modificando, grazie alla conservazione della potenza, la velocità e la coppia. Si faccia dunque riferimento allo schema di figura 1 dove si vedono due dischi a contatto che ruotano senza strisciare.



La mancanza di strisciamento reciproco (garantita da un adeguato coefficiente di attrito) implica che le velocità periferiche nel punto di contatto siano uguali, ovvero:

$$v_{A'} = v_A$$

e quindi:

$$\omega r = \Omega R$$

da cui si riesce a definire il rapporto di trasmissione:

$$\tau = \frac{\omega}{\Omega} = \frac{R}{r}$$

È possibile notare che τ , dipendendo linearmente da R , cresce in maniera significativa con il crescere degli ingombri e quindi non si superano quasi mai valori di τ superiori ad 1/3. La distanza tra gli assi delle due ruote viene chiamata interasse ed è definita nel modo seguente:

$$I = r + R$$

È immediato notare che una configurazione come quella di figura 1 porta sempre a due velocità angolari ω ed Ω opposte; per avere velocità angolari concordi bisogna invece sfruttare un modello come quello rappresentato in figura 2. Ovviamente, sia nel caso di figura 1 che in quello di figura 2, perché non si abbia effettivamente strisciamento nel contatto fra le due ruote, dovrà essere verificata la 1ª legge dell'attrito, secondo la quale:

$$T \leq f_s N$$

Siccome è però possibile sfruttare la seguente relazione:

$$Tr = M_m$$

la condizione di non strisciamento può essere espressa nel modo seguente:

$$\frac{M_m}{r} \leq f_s N$$

Appare allora evidente come sia utile avere un elevato coefficiente di attrito tra le due ruote (obiettivo raggiungibile per esempio ricoprendole di uno strato di gomma) nonché delle rilevanti azioni normali, cosa, quest'ultima, ottenibile precaricando le due ruote con una molla come mostrato in figura 3. L'introduzione di forze normali troppo elevate è comunque sconsigliabile a causa delle deformazioni che porterebbero all'attrito volvente; facendo infatti riferimento alla figura 4 si nota come sia possibile definire un coefficiente di attrito volvente per ognuna delle due ruote del medesimo sistema definiti come:

$$\begin{cases} f_{v1} = \frac{u}{r} \\ f_{v2} = \frac{u}{R} \end{cases}$$

Ciò permette di comprendere ancora meglio come l'attrito volvente non sia altro che un modello. Si scompone ora il sistema nelle sue due componenti, mostrate separate nelle figure 5 e 6 e si osserva come sia possibile costruire le due seguenti equazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} Tr + Nu = M_m \\ TR - Nu = M_r \end{cases}$$

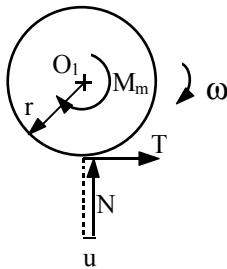


Figura 5

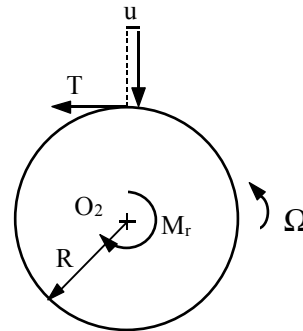


Figura 6

Dalla definizione del coefficiente di moltiplicazione degli sforzi si ottiene allora la seguente espressione:

$$\mu = \frac{M_r}{M_m}$$

che, combinata con l'ultimo sistema scritto, permette di ottenere:

$$\mu = \frac{TR - Nu}{Tr + Nu} = \frac{R}{r} \cdot \frac{T - f_{v2}N}{T + f_{v1}N}$$

Il rendimento può allora essere espresso nel modo seguente:

$$\eta = \mu\tau = \frac{T - f_{v2}N}{T + f_{v1}N}$$

che è sempre minore dell'unità. Nelle ruote a frizione i C.I.R. sono sempre nei punti di contatto con le due ruote, a seconda del sistema di riferimento si può poi pensare che si trovino sull'una o sull'altra. Le due ruote prendono il nome di primitive del moto, a seconda poi di quale sia ferma e di quale si muove si parla di una base e di una rulletta.

Trasmissioni a cinghia.

L'utilizzo delle ruote a frizione è limitato dal fatto che le due ruote si devono trovare ad una distanza relativa esattamente pari all'interasse; qualora ci si voglia svincolare da questa necessità, si possono utilizzare delle cinghie che raccordino le due ruote, come mostrato in figura 7.

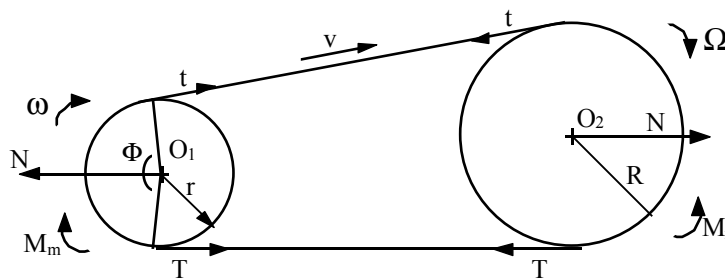


Figura 7

Come prima cosa è opportuno andare a calcolare il rapporto di trasmissione; in assenza di strisciamento si avrà ovviamente che:

$$v = \omega r = \Omega R$$

e quindi:

$$\tau = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{r}{R}$$

Scomponendo invece il sistema nelle sue due parti componenti, mostrate separatamente nelle figure 8 e 9, si possono ottenere le due seguenti equazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} (T - t)r = M_m \\ (T - t)R = M_r \end{cases} \quad (1)$$

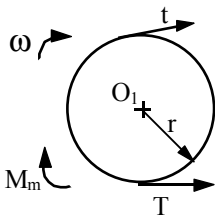


Figura 8

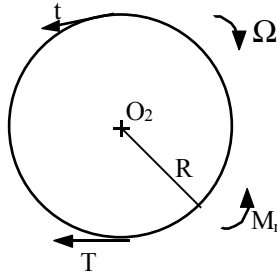


Figura 9

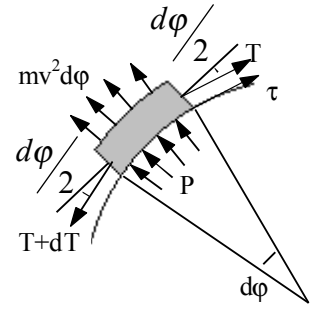


Figura 10

Sfruttando allora la definizione del coefficiente di moltiplicazione degli sforzi si ottiene:

$$\mu = \frac{M_r}{M_m} = \frac{R}{r}$$

e quindi si ricava:

$$\eta = \mu \tau = 1$$

Quando la coppia motrice aumenta, aumenta anche la differenza tra le tensioni (t e T) ed è quindi necessario andare a valutare quali sono le condizioni limite di slittamento; si faccia dunque riferimento allo schema di figura 10 nel quale è rappresentato un pezzo di cinghia che sottende all'angolo $d\varphi$, appoggiato sulla puleggia. La tensione T è stata espressa come una funzione dell'angolo φ e si indichino con τ e P le risultanti, rispettivamente delle forze d'attrito e delle pressioni agenti sull'elementino. Nel caso in cui l'elementino non slitti varrà ovviamente la seguente relazione:

$$\tau \leq f_s P$$

è allora possibile considerare le due seguenti equazioni di equilibrio relative alle direzioni radiali e tangenziali:

$$\begin{cases} T \sin \frac{d\varphi}{2} + (T + dT) \sin \frac{d\varphi}{2} - Pr d\varphi - mv^2 d\varphi = 0 \\ T \cos \frac{d\varphi}{2} - (T + dT) \cos \frac{d\varphi}{2} + f_s Pr d\varphi = 0 \end{cases}$$

Dato poi che gli angoli sono infinitesimi si può semplificare il calcolo ottenendo:

$$\begin{cases} T \frac{d\varphi}{2} + (T + dT) \frac{d\varphi}{2} - Pr d\varphi - mv^2 d\varphi = 0 \\ T - T - dT + f_s Pr d\varphi = 0 \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{cases} \frac{T}{2} + \frac{T + dT}{2} - Pr - mv^2 = 0 \\ dT = f_s Pr d\varphi \end{cases}$$

Trascurando gli infinitesimi nella prima equazione si può ricavare l'espressione di T:

$$T = Pr + mv^2$$

e quindi anche:

$$Pr = T - mv^2$$

La seconda equazione del sistema diventa allora, combinata con quest'ultima:

$$dT = f_s (T - mv^2) d\varphi \quad (2)$$

Operando ora la seguente sostituzione di variabili:

$$T' = T - mv^2$$

si avrà:

$$dT' = dT$$

In questa nuova variabile l'equazione (2) diventa:

$$dT' = f_s T' d\phi$$

che può essere integrata con il metodo della separazione delle variabili per ottenere la seguente equazione:

$$\int_t^T \frac{dT'}{T'} = \int_0^\Phi f_s d\phi$$

dove Φ è l'angolo complessivo che sottende al contatto tra la cinghia e la puleggia. Risolvendo l'equazione integrale trovata si ricava:

$$\ln T - \ln t = f_s \Phi$$

ovvero:

$$\ln \frac{T}{t} = f_s \Phi$$

e quindi:

$$\frac{T}{t} = e^{f_s \Phi} \quad (3)$$

La condizione di non strisciamento è allora la seguente:

$$\frac{T}{t} \leq e^{f_s \Phi}$$

Dal grafico di figura 7 si può ricavare ora la seguente espressione:

$$N \approx T + t$$

dalla quale si ricava:

$$T = N - t \quad (4)$$

Dalla prima espressione del sistema (1) relativa al momento motore si ricava invece:

$$T = \frac{M_m}{r} t \quad (5)$$

mentre dalla relazione (3) si ricava:

$$T = te^{f_s \Phi} \quad (6)$$

Le relazioni (4), (5) e (6) individuano, nel piano (t,T), tre rette che permettono di costruire il grafico mostrato in figura 11 dove si può vedere, in giallo, il semipiano di non slittamento; qualora, come nel caso in figura, il punto di intersezione A tra le rette espresse dalle relazioni (4) e (5) si trovi nel semipiano di non slittamento la condizione di non slittamento è ovviamente verificata.

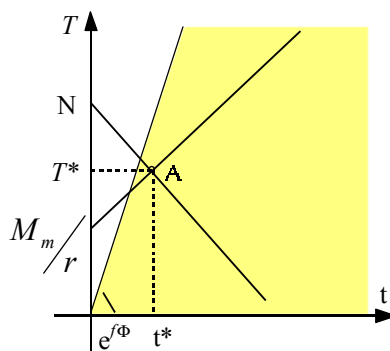


Figura 11

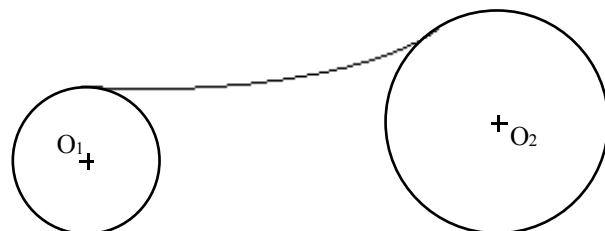


Figura 12

È intuitivo che per ampliare ulteriormente il semipiano di non slittamento, detto anche semipiano di compatibilità, sono percorribili solamente due strade: la prima consiste nell'incrementare il coefficiente di attrito f mentre la seconda prevede di aumentare l'angolo Φ . La seconda strada è sicuramente molto economica in quanto ci si può limitare a sfruttare il fatto che il ramo inferiore della cinghia è più teso rispetto a quello superiore, come mostrato in figura 12; un primo modo per incrementare l'angolo di avvolgimento prevede allora di utilizzare un galoppino che tenda maggiormente il ramo superiore dandogli una diversa inclinazione (come mostrato in figura 13). Un ulteriore tecnica è

quella dell'incrocio, mostrata in figura 14, che raggiunge il massimo livello possibile per quanto riguarda l'angolo di avvolgimento ma che presenta l'inconveniente di esasperare l'usura nel punto di incrocio.

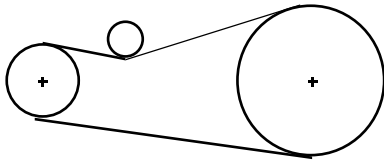


Figura 13

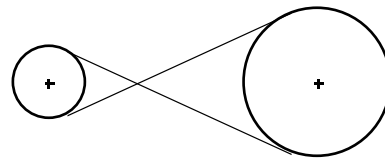


Figura 14

In precedenza si è osservato che il rendimento di una ruota a cinghia è unitario; la cosa è sicuramente sospetta ed in effetti tutti i discorsi fatti fino ad ora non tengono conto dell'elasticità della cinghia. A causa dell'elasticità della cinghia, infatti, nascono degli strisciamenti che impongono di utilizzare la seguente legge dell'attrito:

$$\tau = f_r P$$

che porta, con passaggi del tutto identici a quelli visti in precedenza, alla relazione:

$$T = te^{f_r \Phi}$$

Si può allora dedurre quanto mostrato nelle figure 15 e 16, ovvero che nella puleggia motrice la tensione cresce esponenzialmente con l'angolo nel tratto in cui c'è strisciamento (zona in giallo), e poi rimane costante al valore T (zona in azzurro); nella seconda puleggia la situazione è invertita.

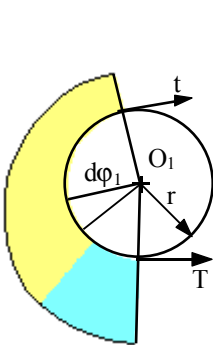


Figura 15

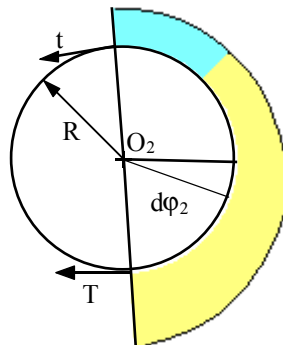


Figura 16

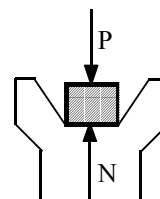


Figura 17

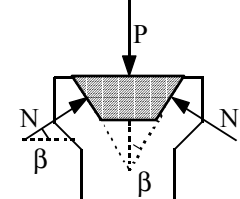


Figura 18

Si consideri ora un tratto di cinghia di lunghezza ds_1 che è impegnato sulla ruota motrice ed un tratto di lunghezza ds_2 impegnato sulla seconda ruota; ovviamente si avrà:

$$\begin{cases} ds_1 = r d\varphi_1 \\ ds_2 = R d\varphi_2 \end{cases}$$

Siccome però le tensioni sono differenti sulle due ruote si avrà:

$$ds_1 > ds_2$$

e quindi:

$$\frac{ds_2}{ds_1} < 1$$

Si osserva allora che, essendo:

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d\varphi_2}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi_1} = \frac{ds_2}{R} \cdot \frac{r}{ds_1} = \frac{r}{R} \cdot \frac{ds_2}{ds_1}$$

si otterrà un rendimento inferiore all'unità:

$$\eta = \mu\tau = \frac{R}{r} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{ds_2}{ds_1} = \frac{ds_2}{ds_1} < 1$$

Un particolare tipo di cinghia è la cinghia a sezione trapezoidale. Nelle figure 17 e 18 è mostrato un raffronto tra la situazione con cinghia normale e la situazione con cinghia trapezoidale; come si può vedere, per non avere slittamento nel primo caso bisogna fare riferimento alla relazione:

$$T \leq f_s N$$

ovvero:

$$T \leq f_s P \tag{7}$$

mentre nella seconda situazione si avrà:

$$T \leq f_s 2N$$

Essendo poi:

$$2N \sin \beta = P$$

si ricava:

$$T \leq f_s \frac{P}{\sin \beta}$$

e quindi è ancora possibile considerare una relazione come la (7) dove però si consideri un coefficiente di attrito equivalente del tipo:

$$f^* = \frac{f_s}{\sin \beta}$$

e quindi si ha:

$$T \leq f^* P$$

Utilizzare dunque una cinghia trapezoidale è dunque come poter contare su un coefficiente f_s maggiore.