

Catene cinematiche.

Catene cinematiche.

Vediamo ora un esempio pratico della metodica vista nella scorsa lezione per la risoluzione dei problemi; consideriamo dunque il caso del rullo inchiostroatore rappresentato in figura 1.

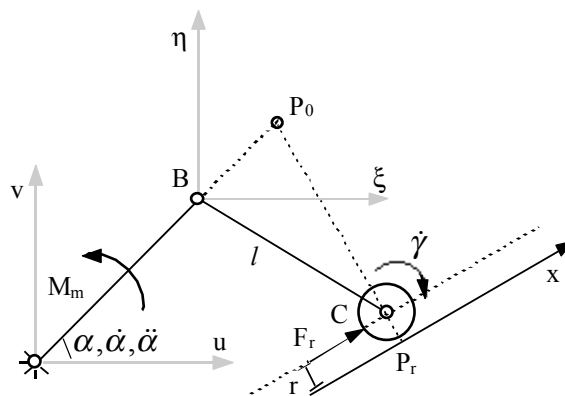


Figura 1

Un problema di questo genere si può affrontare ovviamente con il metodo della poligonale e quindi facendo riferimento alla tabella 1.

v_C	=	v_B	+	v_{CB}	
?		$\alpha \dot{BO}$?	Moduli
$\perp CP_0$		$\perp BO$		$\perp CB$	Direzioni

Tabella 1

Con il metodo della poligonale si possono ricavare i moduli delle velocità v_C e v_{CB} . Si può poi osservare che varranno le due seguenti relazioni:

$$\begin{cases} v_C = \dot{\gamma} r = \dot{\beta} CP_0 \\ v_{CB} = \dot{\beta} CB \\ v_B = \dot{\beta} BP_0 \end{cases}$$

Sarà poi possibile utilizzare il seguente bilancio di potenze, per trovare, una volta calcolata la velocità del punto C, il momento motore richiesto:

$$M_m \dot{\alpha} = F_r v_C$$

Ovviamente sarà anche possibile esprimere la posizione sull'asse x in funzione dell'angolo α e quindi:

$$x = x(\alpha)$$

dalla quale si ricava che:

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\alpha} \dot{\alpha}$$

Si individua così il rapporto di trasmissione, esprimibile come:

$$\tau_\alpha = \frac{dx}{d\alpha}$$

Per quanto riguarda invece l'accelerazione si avrà:

$$\ddot{x} = \frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} \dot{\alpha}^2 + \tau_\alpha \ddot{\alpha} = \gamma_\alpha \dot{\alpha}^2 + \tau_\alpha \ddot{\alpha}$$

Ovviamente se la velocità angolare del movente è costante, l'ultima relazione scritta si ridurrà nel modo seguente:

$$\ddot{x} = \gamma_\alpha \dot{\alpha}^2$$

Da un punto di vista vettoriale, per l'accelerazione del punto C si può sfruttare il teorema di Coriolis osservando che l'accelerazione di Coriolis sarà nulla, come sarà nulla anche la componente tangenziale dell'accelerazione del punto B,

il moto del punto C, inoltre, è rettilineo e quindi non ci sarà un'accelerazione normale relativa a questo punto; si può sfruttare anche in questo caso una tabella: la tabella 2.

\mathbf{a}_C^n	+	\mathbf{a}_C^t	=	\mathbf{a}_B^n	+	\mathbf{a}_B^t	+	\mathbf{a}_{BC}^n	+	\mathbf{a}_{BC}^t	+	\mathbf{a}_{C_0}	
-		x		$\alpha^2 BO$		-		$\beta^2 CB$		$\beta^t CB$		-	Moduli
-		//x		//BO		-		//CB		$\perp CB$		-	Direzioni

Tabella 2

Da un punto di vista grafico il metodo della poligonale origina il poligono mostrato in figura 2.

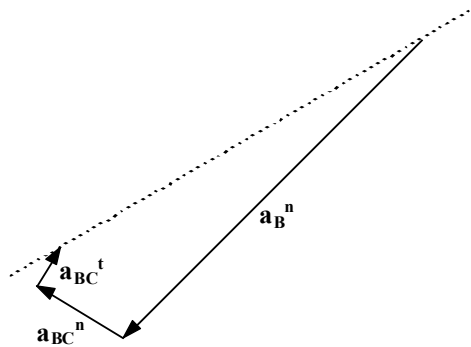


Figura 2

Da un punto di vista analitico valgono ovviamente le due seguenti relazioni:

$$\begin{cases} v_C = \dot{\gamma} r \\ a_C = \ddot{\gamma} r + \dot{\gamma} \frac{dr}{dt} \end{cases}$$

Se i corpi che costituiscono l'oggetto sono considerati rigidi saremo in presenza di un moto rototraslatorio e per un noto teorema della meccanica razionale si avrà la seguente espressione per la risultante:

$$R = -m_{tot} a_G$$

dove a_G è l'accelerazione del baricentro. La risultante non è un vettore applicato e si può quindi applicare dove meglio si crede, facendolo slittare sul suo asse. Quando si decide di applicarlo ad un punto particolare si deve introdurre anche un momento:

$$M_G = J_G \ddot{\beta}$$

Ovviamente a questo punto risulta immediata la valutazione delle caratteristiche legate ad un punto qualunque Q appartenente alla manovella.

Meccanismo a camme. Centro delle accelerazioni. Teoria delle vibrazioni.

Meccanismo a camme.

Consideriamo ora un meccanismo a camme come quello mostrato in figura 1, che, siccome le distanze O_1C_1 ed O_2C_2 devono mantenersi costante, potrà essere schematizzato come mostrato in figura 2.

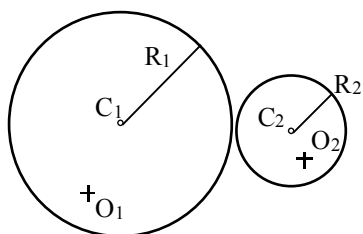


Figura 1

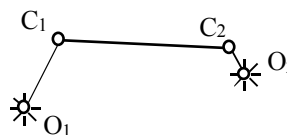


Figura 2

Ovviamente dovrà valere la relazione:

$$\overline{C_1C_2} = R_1 + R_2$$

Dunque da un meccanismo a camme si può risalire ad un quadrilatero articolato mentre da un quadrilatero articolato si può risalire al profilo di un meccanismo a camme, come mostrato in figura 3.

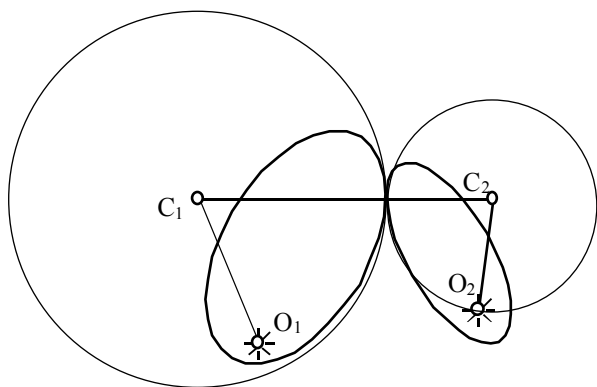


Figura 3

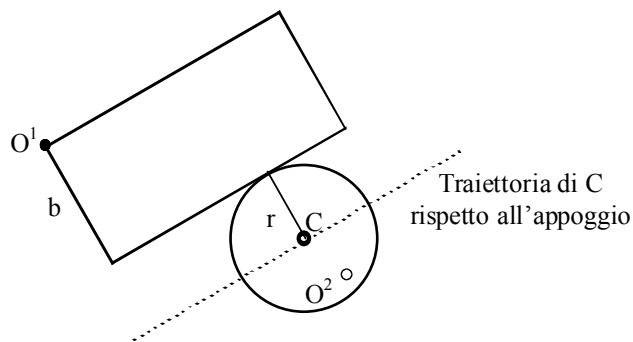


Figura 4

Consideriamo ora il meccanismo mostrato in figura 4, la cui schematizzazione è mostrata in figura 5.

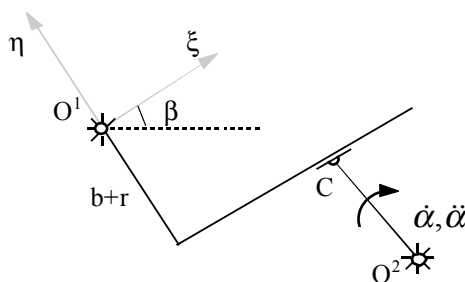


Figura 5

In questa situazione la schematizzazione avviene tramite un glifo; considerando allora una terna di riferimento (η, ξ) si potrà costruire la tabella 1.

v_C	=	v_t	+	v_r	
α		βC_2O_1		ξ	Moduli
$\perp C_2O_2$		$\perp C_2O_1$		$\parallel \xi$	Direzioni

Tabella 1

Con il metodo della poligonale si arriva dunque a ricavare β' e ξ' . Per quanto riguarda le accelerazioni si sfrutta invece la tabella 2:

\mathbf{a}_c^n	+	\mathbf{a}_c^t	=	\mathbf{a}_t^n	+	\mathbf{a}_t^t	+	\mathbf{a}_r^n	+	\mathbf{a}_r^t	+	\mathbf{a}_{Cor}	
$\alpha'' C_2 O_2$	-			$\beta'' C_2 O_1$		$\beta'' C_2 O_1$		-		ξ''		$2\beta'' \xi''$	Moduli
$//C_2 O_2$	-			$//C_2 O_1$		$\perp C_2 O_1$		-		$//\xi$		$\perp \xi$	Direzioni

Tabella 2

Il metodo della poligonale permette dunque di ricavare β'' e ξ'' .

Centro delle accelerazioni.

Dopo aver sfruttato, nella risoluzione grafica degli esercizi, l'esistenza del centro di istantanea rotazione, è ora lecito chiedersi se esistano anche un centro relativo alle accelerazioni. Per quanto riguarda le velocità si può fare riferimento al diagramma di figura 6.

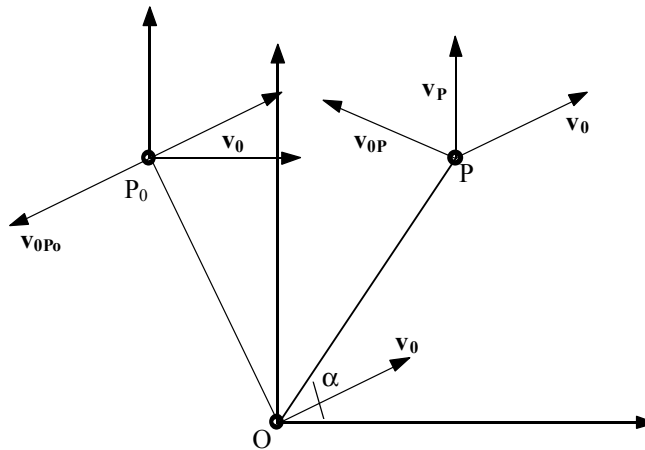


Figura 6

Si sa dunque che vale la relazione:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_0 + \vec{v}_{0P}$$

Ovviamente, per tutti i punti (come ad esempio P_0) che poggiano sulla retta perpendicolare a v_0 , la somma vettoriale appena espressa non sarà altro che una somma algebrica. Quando, ed è appunto il caso del punto P_0 , si ha:

$$v_{0P} = v_0$$

e quindi:

$$v_P = 0$$

Scegliendo allora un sistema di riferimento centrato nel punto P_0 così trovato, si osserverà che la velocità del generico punto P rispetto a questo sistema di riferimento risulterà essere tangente ad una circonferenza.

Per quanto riguarda dunque le accelerazioni sarà necessario fare riferimento al diagramma di figura 7.

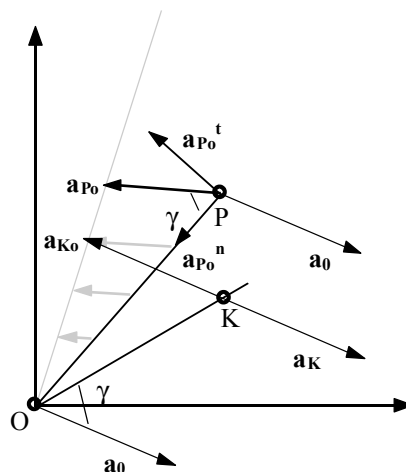


Figura 7

Dalla figura si può notare come sia:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\overline{\ddot{\alpha} PO}}{\overline{\dot{\alpha}^2 PO}} = \frac{\ddot{\alpha}}{\dot{\alpha}^2} = \text{costante}$$

Se ne ricava che tutti i punti appartenenti ad una retta presentano un'accelerazione che aumenta con l'aumentare della distanza ma con un angolo γ costante. Scegliendo allora una retta inclinata di un medesimo angolo γ rispetto ad a_0 si troverà il punto K, in corrispondenza del quale l'accelerazione è nulla. Si è dunque in presenza del centro delle accelerazioni. Considerando dunque un sistema di riferimento centrato nel punto K si otterrà:

$$a_p = a_{pK}$$

Il centro delle accelerazioni è generalmente variabile e solo quando si è in presenza di una cerniera fissa corrisponde con il CIR.

Teoria delle vibrazioni.

Si consideri ora un meccanismo nel quale G rappresenti la risultante delle forze d'inerzia e si faccia riferimento al seguente bilancio:

$$\sum_i (\vec{F}_i \cdot \vec{v}_i - m_i \vec{a}_i \cdot \vec{v}_i) = 0$$

dove F_i siano le forze esterne mentre i termini $m_i a_i$ tengono conto delle inerzie (nel caso di vincoli ideali le reazioni vincolari non appaiono). Esprimendo ora le velocità nei punti i -esimi con dei coefficienti di velocità τ_i , ovvero come segue:

$$v_i = \tau_i \dot{\alpha}$$

si otterrà:

$$\sum_i [(\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \tau_i \dot{\alpha}] = 0$$

che è detta equazione fondamentale della dinamica per sistemi ad un unico grado di libertà. Un primo caso particolare al quale bisogna fare riferimento è il funzionamento a regime, nel quale le velocità sono costanti e si avrà quindi:

$$\sum_i [F_i(\alpha) \cdot \tau_i(\alpha)] = 0$$

Tale equazione prende il nome di equazione dell'equilibrio, dalla quale si può ottenere la configurazione a partire dalle forze o, più comunemente, viceversa. La condizione di equilibrio con una configurazione definita da un angolo α_0 si otterrà dunque facendo riferimento alla relazione seguente:

$$\sum_i [F_{i0}(\alpha_0) \cdot \tau_i(\alpha_0)] = 0$$

Si passi ora alla situazione più completa in cui l'equazione della dinamica sia la seguente:

$$\sum_i [(F_i - m_i \gamma_i \dot{\alpha}^2 - m_i \tau_i \ddot{\alpha}) \cdot \tau_i] = 0 \quad (1)$$

È possibile conoscere la funzione $\alpha(t)$ e dover ricavare la forza motrice che permette di ottenere il moto assegnato (problema cinetostatico); quando invece $\alpha(t)$ è incognita mentre sono note le forze agenti sul sistema si parla di problema dinamico (piuttosto raro nella meccanica); quest'ultimo tipo di problema non è direttamente risolvibile perché bisogna conoscere tutte le forze che, a loro volta, sono funzioni in generale non lineari della posizione. È però sempre possibile risolvere l'equazione rispetto alla derivata di ordine massimo, ricavando:

$$\ddot{\alpha} = \frac{\sum_i [(F_i - m_i \gamma_i \dot{\alpha}^2) \cdot \tau_i]}{\sum_i m_i \tau_i^2}$$

La meccanica applicata si occupa di casi particolarissimi nei quali i rapporti di trasmissione sono tutti costanti, in questo modo tutti i termini γ_i risultano nulli e quindi, se le forze sono a loro volta costanti, l'accelerazione risulta una costante a sua volta. Ovviamente dovranno essere note le condizioni al contorno per avere una soluzione particolare piuttosto che un semplice integrale generale. Qualora i τ_i non fossero costanti, l'accelerazione diventa invece una funzione di α . È poi possibile linearizzare le equazioni nell'intorno di un punto di equilibrio statico, studiando cioè la situazione in cui:

$$\sum_i F_{i0} \cdot \tau_{i0} = 0 \quad (2)$$

in un intorno dove sia:

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon \varphi$$

da cui si ricava che:

$$\dot{\alpha} = \varepsilon \dot{\varphi}$$

Se dunque gli scostamenti sono piccoli, anche le velocità relative agli scostamenti sono piccole; si ha inoltre che:

$$\ddot{\alpha} = \varepsilon \ddot{\varphi}$$

La presenza di un infinitesimo superiore ε^2 permette di riscrivere la relazione (1) senza il secondo membro; si avrà poi che:

$$\tau_i \cong \tau_i(\alpha_0) - \left. \frac{d\tau_i}{d\alpha} \right|_{\alpha_0} (\alpha - \alpha_0) + \frac{1}{2!} \cdot \left. \frac{d^2\tau}{d\alpha^2} \right|_0 (\alpha - \alpha_0)^2 + \dots = \tau_{i0} + \gamma_{i0} \varepsilon \varphi + \dots$$

Dunque l'espressione (2) si trasforma nel modo seguente:

$$\sum_i F_i \cdot \tau_i - m_i (\tau_{i0}^2) \varepsilon \ddot{\varphi} = 0$$

È poi possibile porre:

$$F_i = F_{i0} + \left. \frac{dF_i}{d\alpha} \right|_{\alpha_0} \varepsilon \varphi + \dots$$

e quindi, combinando le ultime due relazioni scritte, si ricava:

$$\sum_i \left[\left(F_{i0} \gamma_{i0} + \left. \frac{dF_i}{d\alpha} \right|_0 \tau_{i0} \right) \varepsilon \varphi - m_i (\tau_{i0}^2) \varepsilon \ddot{\varphi} \right] = 0$$

Semplificando i termini e si ottiene la seguente equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$\sum_i m_i \tau_{i0}^2 \ddot{\varphi} - \sum_i \left(F_{i0} \gamma_{i0} + \left. \frac{dF_i}{d\alpha} \right|_0 \tau_{i0} \right) \varphi = 0$$

ovvero:

$$m^* \ddot{\varphi} + k^* \varphi = 0$$

Si è quindi trovata un'equazione del tutto analoga a quella che descrive il comportamento di una massa m^* sospesa ad una molla di costante elastica k^* .

Teoria delle vibrazioni. La risonanza.

Teoria delle vibrazioni.

Nella precedente lezione si era giunti alla seguente equazione:

$$m^* \ddot{\varphi} + k^* \varphi = 0$$

la cui soluzione sarà del tipo:

$$\varphi = Ae^{\lambda t}$$

Quando k^* è maggiore di zero si avranno radici $\lambda_{1,2}$ reali e il sistema sarà instabile, quando invece k^* risulta essere minore di zero si otterranno radici immaginarie e le soluzioni saranno del tipo:

$$\varphi = A \sin(\omega t + \delta)$$

dove sia:

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}}$$

mentre A e δ sono ricavabili dalle condizioni iniziali; questo tipo di soluzione è invece stabile. Il termine k^* dipende ovviamente dalle varie F_{i0} e γ_{i0} , il cui prodotto scalare risulta positivo o negativo a seconda di γ_{i0} . Un ottimo esempio applicativo è il pendolo: in figura 1 è mostrata una situazione nella quale il prodotto scalare tra p (il peso che in questo caso è l'unica forza esterna) e γ è positivo e quindi il sistema risulta instabile.



Figura 1

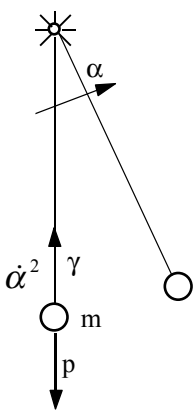


Figura 2

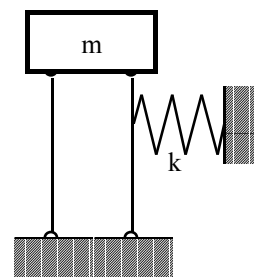


Figura 3

In figura 2, invece, il prodotto scalare risulta negativo e si è quindi in presenza di una situazione stabile. Anche in figura 3 è mostrato un sistema che non è altro che l'equivalente di un pendolo e, in particolare, di un pendolo capovolto: anch'esso è dunque un sistema instabile. Oltre che da F_{i0} e γ_{i0} , il termine k^* dipende anche dalla derivata di F_i rispetto ad x valutata nell'origine; nelle figure 4 e 5 si nota infatti come, a seconda della posizione, varia la forza sviluppata dalla molla.

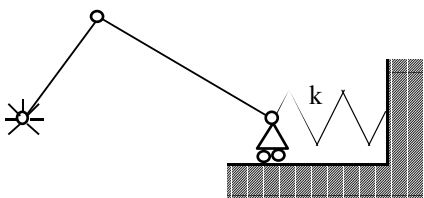


Figura 4

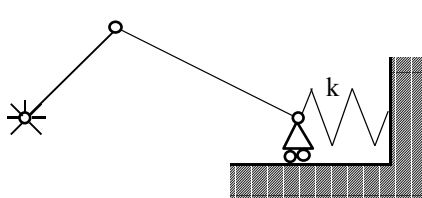


Figura 5

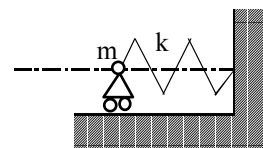


Figura 6

In figura 6 è mostrato un sistema molto semplice la cui equazione del moto è la seguente:

$$m\ddot{x} - kx = 0$$

Una situazione un po' più complicata è quella mostrata in figura 7, per il quale l'equazione del moto è la seguente:

$$m\ddot{x} + F_0 \operatorname{tg} \beta = 0$$

ovvero anche:

$$m\ddot{x} + \frac{F_0}{l_m} x = 0$$

dove l_m è ovviamente la lunghezza della molla. Si nota che, se la molla è scarica, per piccoli spostamenti la molla non si allunga e non ci sono forze; se invece la molla è in precarico si presenterà una forza di richiamo dovuta al semplice orientamento della molla (e non tanto all'intensità del precarico).

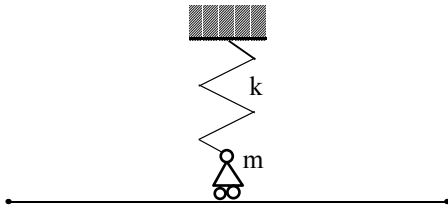


Figura 7

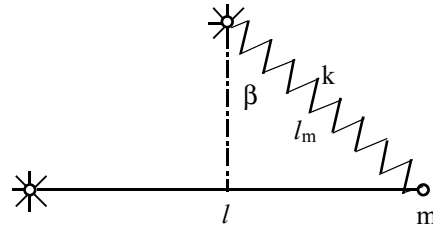


Figura 8

Un discorso analogo può essere fatto per il sistema mostrato in figura 8; in figura 9 è infatti mostrata la configurazione di equilibrio, nella quale sono sottolineate solo le forze, dove sia:

$$F_0 = kx_0$$

e da cui si ricava che:

$$F_0 \cos \beta = mg$$

In figura 10 è invece mostrata una situazione nella quale la configurazione viene modificata leggermente.

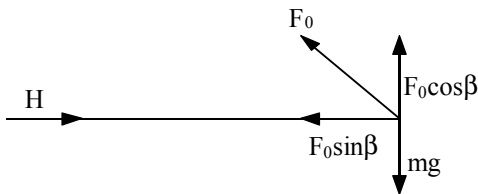


Figura 9

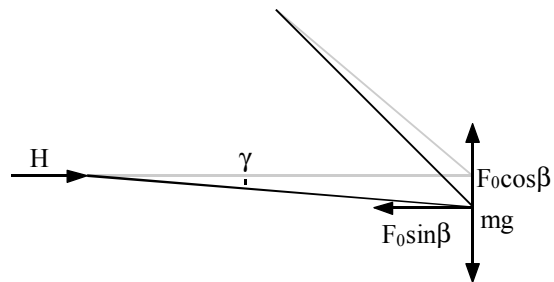


Figura 10

La posizione delle forze H ed $F_0 \sin \beta$ crea il seguente momento che accentua la situazione di instabilità:

$$M_1 = l\gamma F_0 \sin \beta$$

La molla, da parte sua, si allunga di un tratto:

$$x = l\gamma \cos \beta$$

In corrispondenza di tale allungamento si svilupperà la seguente forza di richiamo:

$$dF = kx = kl\gamma \cos \beta$$

Si viene così a creare un ulteriore momento:

$$M_2 = kl^2\gamma \cos^2 \beta$$

La variazione nella direzione della molla è espressa dalla relazione seguente:

$$d\beta = \frac{l\gamma \sin \beta}{l_m}$$

e quindi la forza che si origina sarà del tipo:

$$dF = F_0 d\beta$$

che porta al seguente momento:

$$M_3 = \frac{F_0 l^2 \sin^2 \beta}{l_m} \gamma$$

La risonanza.

Dopo aver definito i sistemi stabili e i sistemi instabili si può fare riferimento ad un sistema stabile e supporre che questo sia perturbato da una forza esterna che lo porti fuori dalla loro posizione di equilibrio; essendo un sistema stabile si osserverà come questo torni nella sua posizione di equilibrio con delle oscillazioni che prendono il nome di

vibrazioni. Solitamente gli scostamenti dovuti alle deformazioni elastiche sono di qualche ordine di grandezza inferiori rispetto agli spostamenti richiesti dalla struttura del meccanismo. Si rimuove da ora, dunque, l'ipotesi che i corpi siano rigidi e supponiamo, in prima approssimazione, che un meccanismo sia formato da parti rigide e da parti deformabili (per esempio le cinghie faranno parte di questo secondo gruppo); una macchina può allora essere modellizzata come mostrato in figura 11, nella quale sono evidenziate le parti rigide e le parti deformabili.

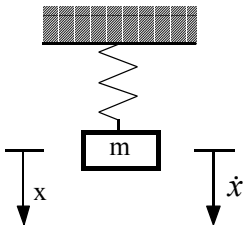


Figura 11

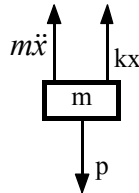


Figura 12

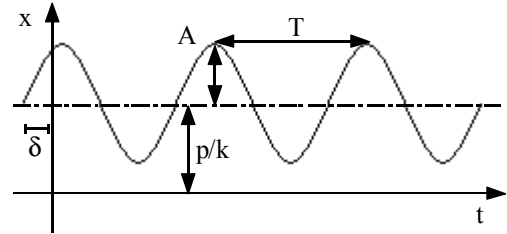


Figura 13

In figura 12 è mostrato lo schema delle forze che permette di risalire all'equazione di equilibrio seguente:

$$m\ddot{x} + kx = p$$

Dall'omogenea associata di questa equazione si ricava:

$$x_0 = A \sin(\omega t + \delta)$$

con:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

L'integrale particolare è invece il seguente:

$$x_p = \frac{p}{k}$$

e, come si nota, è una costante che prende il nome di allungamento statico (ovvero l'allungamento dovuto all'azione del solo peso). L'integrale generale sarà allora:

$$x_g = A \sin(\omega t + \delta) + \frac{p}{k}$$

il cui andamento è quello graficato in figura 13. Invece di fare riferimento ad un sistema di riferimento x qualunque è possibile e molto spesso auspicabile fare riferimento ad un'origine (per l'asse x, che ora viene chiamato y) che coincida con la posizione di equilibrio stabile del peso; in questo modo il procedimento logico è il medesimo appena visto, l'equazione che ne risulta è la seguente:

$$m\ddot{y} + ky = p - kx_0$$

La soluzione relativa ad y sarà dunque ricavabile dalla sola omogenea associata e quindi si avrà:

$$y = A \sin(\omega t + \delta)$$

il cui grafico è quello mostrato in figura 14.

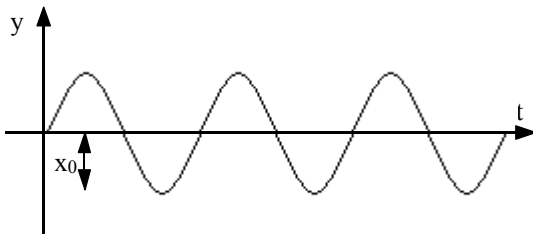


Figura 14

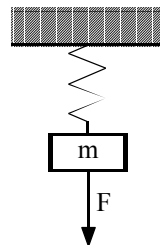


Figura 15

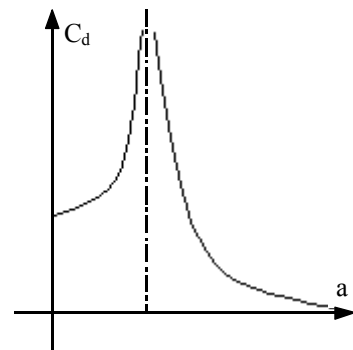


Figura 16

Pur di partire dalla configurazione di equilibrio stabile si potrebbero anche trascurare le forze costanti (a meno che, ovviamente, queste non rappresentino il cuore del problema). Si supponga ora che, come mostrato in figura 15, sulla massa m agisca una forzante espressa nel modo seguente:

$$F = F_0 \sin(\Omega t)$$

Si avrà allora la seguente equazione di equilibrio:

$$m\ddot{y} + ky = F_0 \sin(\Omega t)$$

Si cerchi una soluzione del tipo:

$$y_p = C \sin(\Omega t)$$

per l'integrale particolare. Sostituendo quindi nella relazione precedente si ricava:

$$C\Omega^2 \sin(\Omega t) + kC \sin(\Omega t) = F_0 \sin(\Omega t)$$

ovvero:

$$(k - m\Omega^2)C = F_0$$

e quindi:

$$C = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}$$

Ponendo poi:

$$\begin{cases} \delta_{st} = \frac{F_0}{k} \\ a = \frac{\Omega}{\omega} \end{cases}$$

si ricava:

$$y_p = \delta_{st} \frac{1}{1 - a^2} \sin(\Omega t)$$

Si definisce poi:

$$C_d = \frac{1}{1 - a^2}$$

detto coefficiente di amplificazione dinamica il cui modulo dell'andamento è quello mostrato in figura 16, dove viene evidenziato un picco di risonanza. Quando si è in condizioni di risonanza, la modellizzazione a corpo rigido non è più accettabile.

La risonanza. Effetto degli ammortizzatori.

La risonanza.

Nella scorsa lezione si era giunti all'esame della situazione mostrata in figura 1 nella quale un peso collegato ad una molla subiva una forzante espressa dalla seguente relazione:

$$F = F_0 \sin(\Omega t)$$

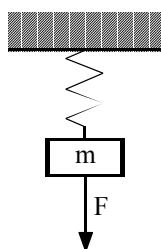


Figura 1

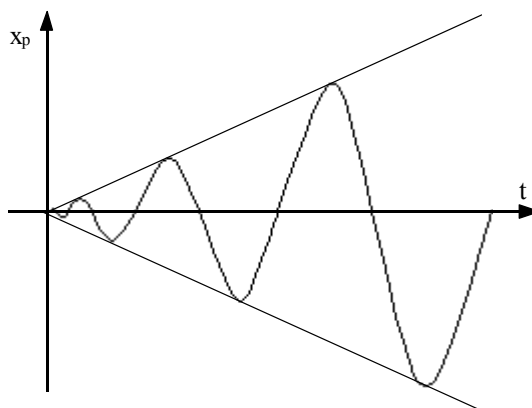


Figura 2

Si era inoltre definita la condizione di risonanza come quella condizione nella quale vale la relazione seguente:

$$\Omega = \omega$$

dove con ω si intende la frequenza propria del sistema in assenza di alcuna forzante. In una situazione di questo tipo l'integrale generale sarebbe del tipo seguente:

$$x_g = x_0 + x_p = A \sin(\omega t + \delta) + C \sin(\omega t)$$

Siccome un integrale generale di questo tipo non è accettabile si può provare con una soluzione come la seguente:

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

Provando allora a considerare un integrale particolare del tipo:

$$x_p = Ct \cos(\omega t)$$

si osserva che le sue derivate sono le seguenti:

$$\begin{cases} \dot{x}_p = C \cos(\omega t) - Ct\omega \sin(\omega t) \\ \ddot{x}_p = -C\omega \sin(\omega t) - C\omega \sin(\omega t) - Ct\omega^2 \cos(\omega t) \end{cases}$$

Complessivamente, dunque, l'equazione differenziale che descrive il sistema sarà la seguente:

$$-C \{ m [2\omega \sin(\omega t) + t\omega^2 \cos(\omega t)] \} + kt \cos(\omega t) = F \sin(\omega t)$$

da cui si ricava:

$$C = -\frac{F}{2m\omega}$$

L'integrale particolare sarà allora, infine:

$$x_p = -\frac{F}{2m\omega} \cos(\omega t)$$

L'andamento grafico sarà quello mostrato in figura 2, dalla quale si comprende come, in situazione di risonanza, le ampiezze dell'oscillazione tendono effettivamente all'infinito, anche se è per questo necessario un tempo infinito.

Effetto degli ammortizzatori.

Proseguendo con la complicazione del modello si può ora iniziare a considerare l'effetto delle forze viscosse. Il modello di figura 1 si complica dunque con l'aggiunta di un ammortizzatore e assume così la configurazione mostrata in figura 3. In figura 4 è mostrato il relativo schema delle forze e quindi l'equazione che ne risulta è la seguente:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin(\Omega t)$$

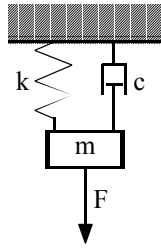


Figura 3

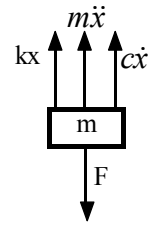


Figura 4

Effetto degli ammortizzatori. Forze eccitatrici sinusoidali.

Effetto degli ammortizzatori.

Nella lezione precedente si era giunti alla definizione della seguente relazione:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (1)$$

che derivava dall'aggiunta al sistema massa-molla di un ammortizzatore che permetteva di ottenere il sistema mostrato in figura 1.

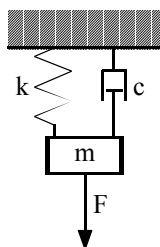


Figura 1

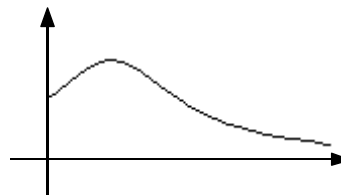


Figura 2

Ponendo che la forzante sia nulla si ottiene l'equazione omogenea associata, il cui integrale generale avrà la seguente forma:

$$x_{g_0} = Ae^{\lambda t}$$

dove sia:

$$\lambda = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

Si devono dunque distinguere due casi:

- 1) Nel caso in cui il radicando sia positivo, ovvero nel caso in cui sia:

$$\frac{c^2}{4m^2} - \omega^2 > 0$$

la soluzione avrà un andamento come quello mostrato nel diagramma di figura 2.

- 2) Nel caso invece in cui si abbia:

$$\frac{c^2}{4m^2} - \omega^2 < 0$$

si può porre:

$$c_{cr} = 2m\omega$$

ed introdurre in questo modo il seguente parametro dimensionale, detto smorzamento:

$$h = \frac{c}{c_{cr}}$$

L'autovalore avrà allora la seguente forma:

$$\lambda = -h\omega \pm i\omega\sqrt{1-h^2}$$

da cui si ricava che l'integrale generale sarà:

$$x_{g_0} = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = Ae^{-h\omega + i\omega\sqrt{1-h^2}t} + Be^{-h\omega - i\omega\sqrt{1-h^2}t} = e^{-h\omega t} \left(Ae^{i\omega\sqrt{1-h^2}t} + Be^{-i\omega\sqrt{1-h^2}t} \right)$$

Ponendo poi:

$$\omega_1 = \omega\sqrt{1-h^2}$$

e ricordando che:

$$\begin{cases} e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \\ e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t) \end{cases}$$

si ricava la seguente espressione dell'integrale generale:

$$x_{g_0} = e^{-h\omega t} [(A+B)\cos(\omega_1 t) + (A-iB)\sin(\omega_1 t)] = e^{-h\omega t} [A' \cos(\omega_1 t) + B' \sin(\omega_1 t)]$$

L'andamento grafico è dunque quello mostrato nel diagramma di figura 3

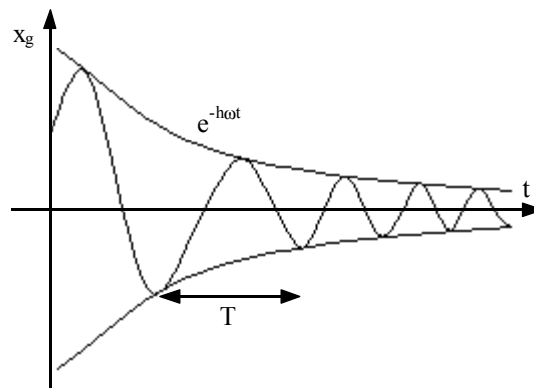


Figura 3

Il termine T indicato prende il nome di pseudoperiodo, è definito nel modo seguente:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-h^2}}$$

e assume tale nome perché l'andamento non è periodico nel vero senso della parola. Per valori di smorzamento inferiori al valore di 0,1 lo pseudoperiodo è sostanzialmente pari al periodo della situazione non forzata e quindi non c'è nessuna sostanziale differenza con la situazione priva di smorzamento. Due valori esemplificativi sono raccolti nella tabella 1.

h	$\sqrt{1-h^2}$
0,1	0,995
0,3	0,954

Tabella 1

Quando h diventa pari ad 1 il periodo diventa infinito e si configura una sola oscillazione che muore all'infinito; quando, infine, h diventa maggiore di 1 il moto sarà completamente aperiodico.

Si torni ora all'equazione (1) completa del suo termine noto che, come al solito, può essere esplicitato nel modo seguente:

$$F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$$

Come mostrato in figura 4, la forza $F(t)$ introdotta può essere vista come la proiezione di un vettore e quindi può essere espressa nel modo seguente:

$$F_0 \sin(\Omega t) = \text{Im}\{F_0 e^{i\Omega t}\}$$

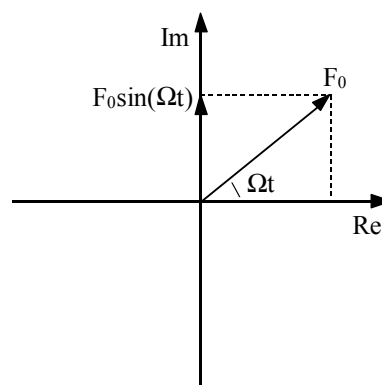


Figura 4

L'equazione (1) può dunque essere riscritta nel modo seguente:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \text{Im}\{F_0 e^{i\Omega t}\}$$

ovvero, trascurando il fatto che si tratta della sola parte immaginaria:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\Omega t} \quad (2)$$

Si imponga ora un integrale particolare che abbia la seguente forma:

$$x_p = X e^{i\Omega t}$$

e tale quindi per cui le sue derivate prima e seconda siano le seguenti:

$$\begin{cases} \dot{x}_p = i\Omega X e^{i\Omega t} \\ \ddot{x}_p = -\Omega^2 X e^{i\Omega t} \end{cases}$$

Sostituendo quindi nell'equazione (2) si ricava:

$$X(-m\Omega^2 + ic\Omega + k)e^{i\Omega t} = F_0 e^{i\Omega t} \quad (3)$$

Si ottiene dunque:

$$X = \frac{F_0}{-m\Omega^2 + ic\Omega + k}$$

La situazione grafica sintetizzata dalla relazione (3) è quella mostrata in figura 5.

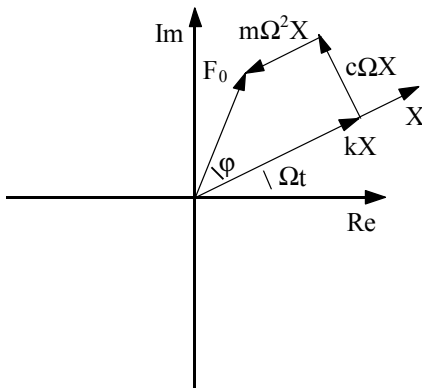


Figura 5

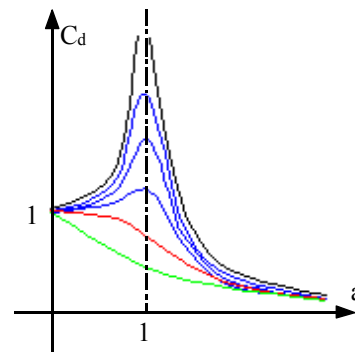


Figura 6

Applicando dunque il semplice teorema di Pitagora si può giungere alla seguente relazione:

$$F_0^2 = (k - m\Omega^2)^2 X^2 + (c\Omega X)^2$$

ovvero:

$$F_0^2 = \left[(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2 \right] X^2$$

dalla quale si ricava:

$$X = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{m}{k}\Omega^2\right)^2 + \frac{c^2\Omega^2}{m^2\omega^4}}}$$

Ricordando poi che:

$$\begin{cases} k = m\omega^2 \\ \frac{\Omega}{\omega} = a \end{cases}$$

si ottiene:

$$X = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - a^2)^2 + 4h^2 a^2}}$$

Si avrà allora che:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{c\Omega X}{hX - m\Omega^2 X} = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}$$

In questa nuova situazione, dunque, il grafico relativo all'andamento di C_d in funzione di a (già visto nel caso più semplice nella lezione numero 15) assume la forma mostrata in figura 6. La massima ampiezza delle oscillazione si avrà dunque quando è soddisfatta la seguente relazione:

$$\frac{dC_d}{da} = 0$$

ovvero:

$$\frac{d}{da} \left[(1-a^2)^2 + (2ah)^2 \right] = 0$$

da cui si ricava:

$$-2(1-a^2)2a + 4h^2 2a = 0$$

Senza tener conto della prima soluzione che è quella banale per a nulla, si avrà anche la seguente relazione:

$$a = \sqrt{1-2h^2}$$

da cui si ricava che, per:

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

il termine a si annulla (la curva in questione è quella segnata in rosso in figura 6, in blu vengono invece indicate le curve con h maggiore di 0,707 mentre in verde quelle con h inferiore a tale valore limite). Quando h è maggiore del limite 0,707, la condizione peggiore si ha nell'origine, dove si incontrano forze costanti. Una volta stabilita la condizione relativa ad h che porta alla maggiore elongazione si può vedere quale è il massimo valore del modulo della x, sfruttando quindi la seguente relazione:

$$|X|_{\max} = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{[1-(1-2h)]^2 + 4h^2(1-2h^2)}} = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{4h^2 + 4h^2 - 8h^4}} = \frac{F_0}{h} \cdot \frac{1}{2h\sqrt{1-h^2}} \cong \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{2h}$$

Si può allora notare che, quand'anche h valga solamente 0,1, la sovraelongazione della molla vale ancora 5, che è comunque troppo (anche se si è almeno arrivati ad un risultato finito contro la sovraelongazione infinita che si otteneva in precedenza). In figura 7 è mostrato il metodo pratico per contare il numero di oscillazioni necessarie al sistema munito di ammortizzatore per dimezzare l'ampiezza delle oscillazioni.

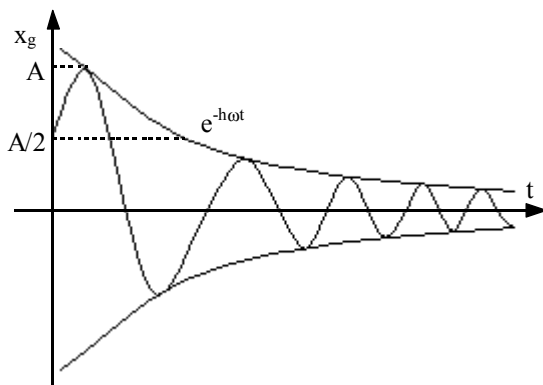


Figura 7

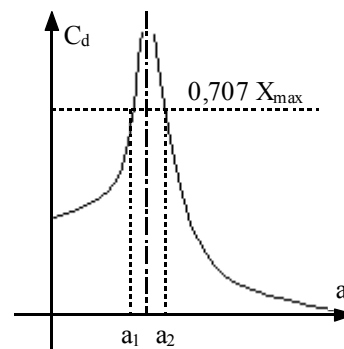


Figura 8

Ovviamente sarà necessario imporre che:

$$e^{-h\omega T} = \frac{1}{2}$$

dalla quale si ricava che:

$$e^{h\omega T} = 2$$

e quindi:

$$h\omega T = \ln 2$$

dalla quale poi si ottiene che:

$$n = \frac{\ln 2\omega\sqrt{1-h^2}}{h\omega 2\pi} = \frac{\ln 2}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{1-h^2}}{h} \cong \frac{0,1}{h}$$

Quando h è pari a 0,1 il numero d'onde richiesto perché l'ampiezza si dimezzi è 1 mentre quando h è pari a 0,01 il numero d'onde necessario al medesimo scopo diventa 10, che è un numero accettabile, anche se bisogna tener conto che ci sarà una sovraelongazione pari a 50. In figura 8 viene sottolineato come il tratto veramente pericoloso ai fini delle sovraelongazioni dovute alle risonanze sia in realtà abbastanza stretto attorno al picco stesso di risonanza e i suoi confini sono individuabili dalla seguente relazione.

$$|\chi| = \frac{1}{\sqrt{2}} |X_{\max}|$$

dalla quale si ricava:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-a^2)^2 + (2ah)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2h\sqrt{1-h^2}}$$

Si avrà allora:

$$(1-a^2)^2 + (2ah)^2 = 8h^2(1-h^2)$$

Si trova così che:

$$a_2^2 - a_1^2 = 4h\sqrt{1-h^2}$$

ovvero:

$$\frac{2(a_2 + a_1)}{2}(a_2 - a_1) = 4h\sqrt{1-h^2}$$

Essendo però:

$$\frac{a_2 + a_1}{2} = 1$$

si ricava:

$$2(a_2 - a_1) = 4h\sqrt{1-h^2}$$

e quindi:

$$a_2 - a_1 \cong 2h$$

Per h pari a 0,1 la zona di rischio si estende dunque per un 5% attorno alla condizione di risonanza. In conclusione, se in una macchina sono presenti corpi deformabili (nella realtà ciò è sempre verificato), la situazione diventa pericolosa quando h è inferiore alla soglia di 0,1 e c è una forza eccitatrice considerata in risonanza (ovvero entro il faticoso 5%) con la frequenza propria del sistema.

Forze eccitrici sinusoidali.

Nella trattazione della teoria delle vibrazioni si è spesso fatto riferimento ad una forza eccitatrice sinusoidale, si vede ora come questo tipo di forzante si può originare in un sistema reale. Si faccia dunque riferimento ad un macchinario come quello mostrato in figura 9, collegato a terra da un sistema di molle ed ammortizzatore e munito al suo interno di un albero rotante con una certa eccentricità e .

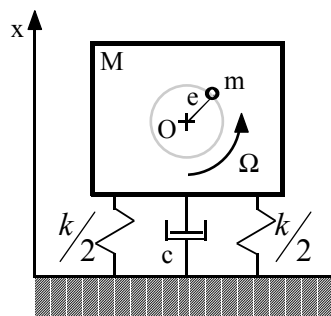


Figura 9

L'equazione di equilibrio statico sarà, in questo caso:

$$-(m + M)\ddot{x} - c\dot{x} - kx + me\Omega^2 \sin(\Omega t) = 0$$

ovvero:

$$(m + M)\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\Omega^2 \sin(\Omega t)$$

La pulsazione propria del sistema sarà dunque:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + M}}$$

e la soluzione dell'equazione sarà:

$$X = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-a^2)^2 + 4a^2h^2}} = \frac{me\Omega^2}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-a^2)^2 + 4a^2h^2}} = \frac{me\Omega^2}{(m+M)\omega^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-a^2)^2 + 4a^2h^2}}$$

e quindi:

$$X = \frac{me}{M+m} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{(1-a^2)^2 + 4a^2h^2}}$$

L'andamento di C_d in funzione di a è dunque ora leggermente differente e bisogna fare riferimento al grafico di figura 10.

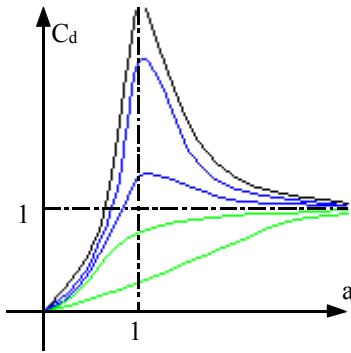


Figura 10

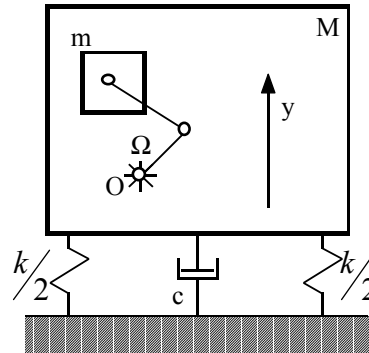


Figura 11

Si osserva comunque che si è trovata una soluzione sostanzialmente identica a quella che si ottiene in presenza di una forzante sinusoidale e quindi si può affermare che il sistema appena visto induce una forzante di tale tipo. Questa situazione non è poi così difficile da trovare in quanto, per quanto la realizzazione della macchina sia accurata, il baricentro dell'albero risulterà sempre leggermente spostato dal centro di rotazione O , creando appunto una eccentricità e . Ovviamente la situazione può essere complicata in diversi modi; si può per esempio considerare la situazione di figura 11 nella quale anche il telaio è libero di oscillare; inoltre al telaio può essere collegato qualche altro elemento che trasmette la vibrazione ad un altro meccanismo e così via.

Analisi vettoriale. Trasmissibilità.

Analisi vettoriale.

Si torni ora ad analizzare il diagramma mostrato in figura 1.

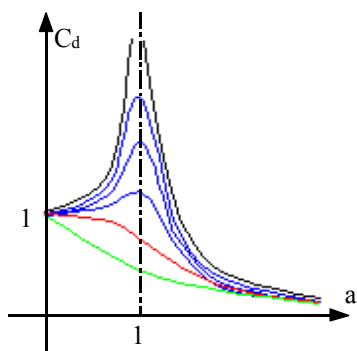


Figura 1

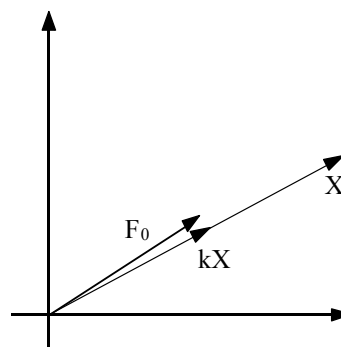


Figura 2

Quando il rapporto a è molto minore dell'unità tutte le curve si trovano nell'intorno di 1 in quanto si avrà:

$$F_0 \cong kx$$

e quindi:

$$x \cong \frac{F_0}{k}$$

da cui si deduce che:

$$\varphi \cong 0$$

Dal punto di vista vettoriale questa situazione è rappresentata in figura 2. Quando invece il rapporto a diventa molto maggiore dell'unità, è la forza d'inerzia ad essere prevalente e quindi si avrà:

$$F_0 \cong m\Omega^2 x$$

e quindi:

$$x = \frac{F_0}{m\Omega^2}$$

da cui si deduce che:

$$\varphi \cong 180^\circ$$

Dal punto di vista vettoriale la rappresentazione di questo secondo caso sarà quella mostrata in figura 3.

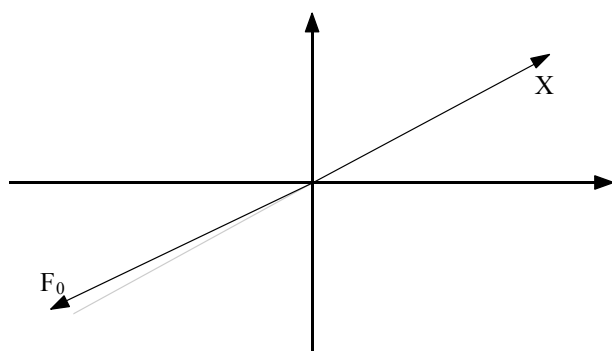


Figura 3

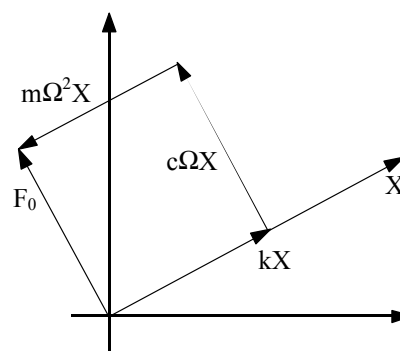


Figura 4

Quando, dunque, a è molto maggiore oppure molto minore dell'unità, tutte le curve tendono a sovrapporsi e non c'è dipendenza dallo smorzamento. Quando invece il rapporto a è pari ad 1 si avrà la situazione mostrata in figura 4 e si avrà:

$$\begin{cases} F_0 = c\Omega x \\ \varphi = 90^\circ \end{cases}$$

Si era inoltre già visto che il numero di oscillazioni necessarie per dimezzare l'ampiezza era dato dalla seguente relazione:

$$n \cong \frac{0,1}{h}$$

Il picco di risonanza avviene per un valore di a dato dalla seguente relazione:

$$a = \sqrt{1 - 2h^2} \cong 1$$

Trasmissibilità.

Dopo aver stabilito come si creano le forzanti sinusoidali in un sistema si può vedere come tali forze si propagano tra un sistema e l'altro. Si torni dunque a considerare il sistema mostrato in figura 5 per il quale valeva la seguente equazione di equilibrio:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin(\Omega t)$$

e la cui soluzione era la seguente:

$$x = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - a^2)^2 + (2ah)^2}} \sin(\Omega t + \varphi)$$

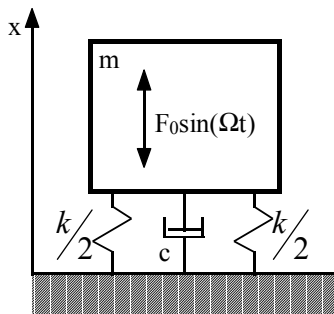


Figura 5

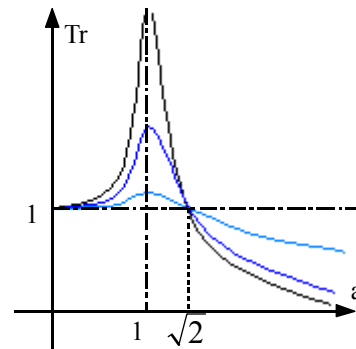


Figura 6

La forza trasmessa al terreno sarà data dalla seguente espressione:

$$F_{tr} = kx + c\dot{x} = kx_0 \sin(\Omega t - \varphi) + c\Omega x_0 \cos(\Omega t - \varphi) = (kx_0 + cx_0 i\Omega)e^{i\Omega t}$$

dove sia:

$$x = x_0 e^{i\Omega t}$$

Il modulo della forza trasmessa sarà dunque:

$$|F_{tr}| = \sqrt{k^2 + c^2 \Omega^2} X_0 = \sqrt{k^2 + c^2 \Omega^2} \frac{F_0}{k} C_d$$

da cui si ricava:

$$\frac{|F_{tr}|}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + (2ah)^2}}{\sqrt{(1 - a^2)^2 + (2ah)^2}} = Tr$$

dove Tr prende il nome di trasmissibilità. Come si può vedere dal grafico di figura 6, trasmissibilità unitaria si ha per $a=0$ e per a tale per cui sia:

$$1 + (2ah)^2 = (1 - a^2)^2 + (2ah)^2$$

ovvero per:

$$a = \sqrt{2}$$

Indipendentemente da tutto il resto varranno poi le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} Tr > 1 \Leftrightarrow a < \sqrt{2} \\ Tr < 1 \Leftrightarrow a > \sqrt{2} \end{cases}$$

Per quanto riguarda la rappresentazione vettoriale della forza trasmessa si può fare riferimento ai tre diagrammi rappresentati nelle figure 7, 8 e 9 rispettivamente nel caso in cui F_{Tr} sia maggiore, minore o uguale ad F_0 .

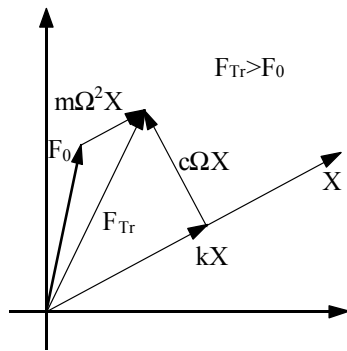


Figura 7

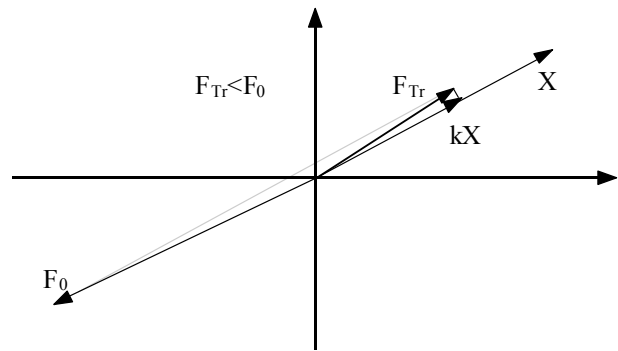


Figura 8

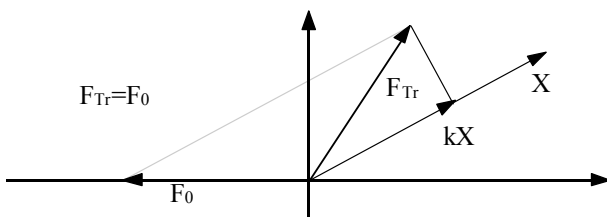


Figura 9

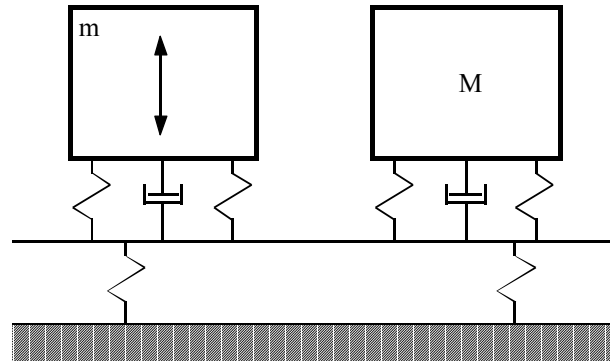


Figura 10

Si consideri ora la relazione seguente:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{kg}{mg}}$$

Si può definire come segue lo schiacciamento della molla dovuto al solo peso (solitamente non superiore al centimetro):

$$\delta_{statico} = \frac{mg}{k}$$

Si potrà allora scrivere:

$$\omega^2 = \frac{g}{\delta_{statico}}$$

da cui si ricava:

$$\delta_{statico} = \frac{g}{\omega^2}$$

Molto spesso le forze non si limitano a trasmettersi al pavimento del sistema ma, essendo anche questo elastico, viaggiano fino a raggiungere un altro sistema; un esempio tipico è la struttura mostrata in figura 10, in tale caso l'equazione di equilibrio sarà la seguente:

$$M\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$$

da cui si ricava:

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky = (k + ic\Omega)Ye^{i\Omega t}$$

La soluzione sarà allora:

$$x = \frac{\sqrt{k^2 + c^2\Omega^2}}{k} y \frac{1}{\sqrt{(1-a^2)^2 + (2ah)^2}}$$

dalla quale si ricava:

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{\sqrt{1+(2ah)^2}}{\sqrt{(1-a^2)^2 + (2ah)^2}} = Tr$$

dalla quale è possibile ricavare il medesimo grafico visto in precedenza.

Si può ora concludere con un paio di esempi applicativi; facendo dunque riferimento al sistema di figura 11 si vada alla ricerca della frequenza naturale del sistema. Si inizia quindi con lo scomporre il sistema nei due componenti mostrati nelle figure 12 e 13 e osservando la validità delle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \dot{\phi}r = \dot{x} \\ \ddot{\phi}r = \ddot{x} \\ \dot{y} = 2\dot{x} \\ \ddot{y} = 2\ddot{x} \end{cases}$$

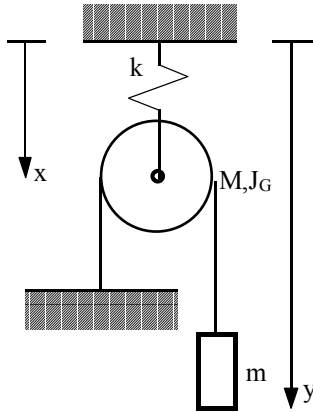


Figura 11

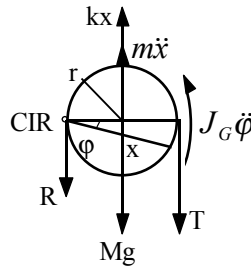


Figura 12

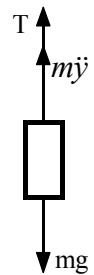


Figura 13

Imponendo l'equilibrio alla rotazione attorno al CIR della ruota di figura 12 e l'equilibrio alla traslazione verticale del peso di figura 13 si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} kxr + M\ddot{x}r + J_G \frac{\ddot{x}}{r} - Mgr - 2Tr = 0 \\ T = mg - m\ddot{y} \end{cases}$$

Da tale sistema (e ricordando il legame tra x ed y esplicitato in precedenza) si ricava la seguente relazione:

$$\left(\frac{J_G}{r} + Mr + 4mr \right) \ddot{x} + kxr = (Mg + mg)r$$

Siccome i due pesi sono delle forzanti costanti, possono essere entrambi trascurati, ottenendo quindi:

$$\left(\frac{J_G}{r} + Mr + 4mr \right) \ddot{x} + kxr = 0$$

dalla quale appare evidente come sia:

$$\omega^2 = \frac{kr}{\frac{J_G}{r} + (M + 4m)r}$$

Un altro metodo per risolvere il medesimo esercizio prevede di sfruttare la seguente relazione:

$$E_{Tot} = T + U = \text{costante}$$

Nel sistema in analisi si avrà:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} (J_G \dot{\phi}^2 + M\dot{x}^2 + m\dot{y}^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{J_G}{r^2} + M + 4m \right) \dot{x}^2$$

Per quanto riguarda l'energia potenziale si avrà invece:

$$U = \frac{1}{2} kx^2$$

Si avrà dunque:

$$\frac{dE_{Tot}}{dt} = \frac{d}{dt} (T + U) = \left(\frac{J_G}{r^2} + M + 4m \right) \dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

grazie alla quale si ritrova il medesimo risultato visto in precedenza.

Un terzo metodo è infine quello di Reyleigh, che prevede di conoscere già che la soluzione sarà del tipo:

$$x = A \sin(\omega t)$$

dalla quale si ricaverà:

$$\dot{x} = A \omega \cos(\omega t)$$

Si imporrà poi che:

$$T_{\max} = U_{\max}$$

ovvero, nel caso in analisi:

$$\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \left(\frac{J_G}{r^2} + M + 4m \right)$$

Da quest'ultima relazione si otterrà poi ω^2 .

Il metodo di Reyleigh può per esempio essere utilizzato per comprendere il ruolo della massa della molla in un semplice sistema massa-molla come quello mostrato in figura 14.

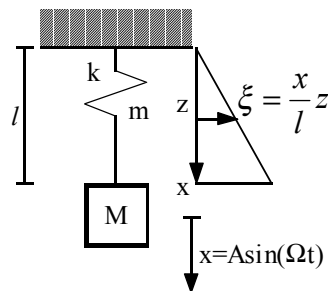


Figura 14

In questo caso, infatti, si avrà:

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} \left(M \dot{x} + \int_0^l \frac{m}{l} dz \dot{\xi}^2 \right) = \frac{1}{2} \left(M + \frac{m}{3} \right) \dot{x}^2 \\ U = \frac{1}{2} k x^2 \end{cases}$$

dalle quali, sostituendo l'espressione per la derivata di x si ricava:

$$\omega^2 = \frac{k}{M + \frac{m}{3}}$$

Un ulteriore esempio è quello mostrato in figura 15, per il quale si avrà:

$$\begin{cases} \beta = \tau \alpha \\ T = \frac{1}{2} (J_2 \dot{\beta}^2 + J_1 \dot{\alpha}^2 + m l^2 \dot{\alpha}^2) \\ U = mg(l - l \cos \alpha) = mgl(1 - \cos \alpha) \end{cases}$$

Sviluppando il coseno nell'intorno di α nullo si ottiene

$$U = mgl \frac{\alpha^2}{2}$$

Si otterrà così la seguente soluzione:

$$\omega^2 = \frac{\frac{mgl}{2}}{\frac{1}{2} (J_2 \tau^2 + J_1 + m l^2)}$$

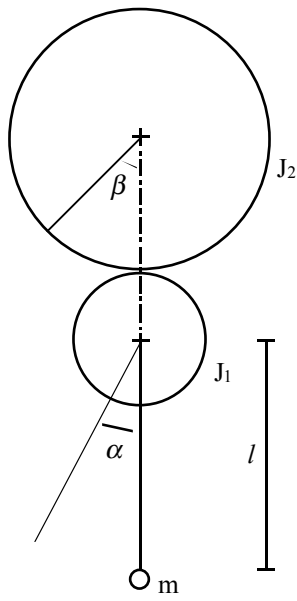


Figura 15

In questo caso, il metodo che prevede la scomposizione del sistema, pur arrivando ovviamente al medesimo risultato, sarebbe stato molto più lungo e macchinoso.