Fattore di moltiplicazione dello sforzo.

Fattore di moltiplicazione dello sforzo.
*Determinare il fattore di moltiplicazione dello sforzo μ nella pinza punzonatrice rappresentata in figura 1, cioè il rapporto fra la forza resistente agente sul punzone e la forza **P** esercitata sull'impugnatura. Si trascurino le resistenze d'attrito.*

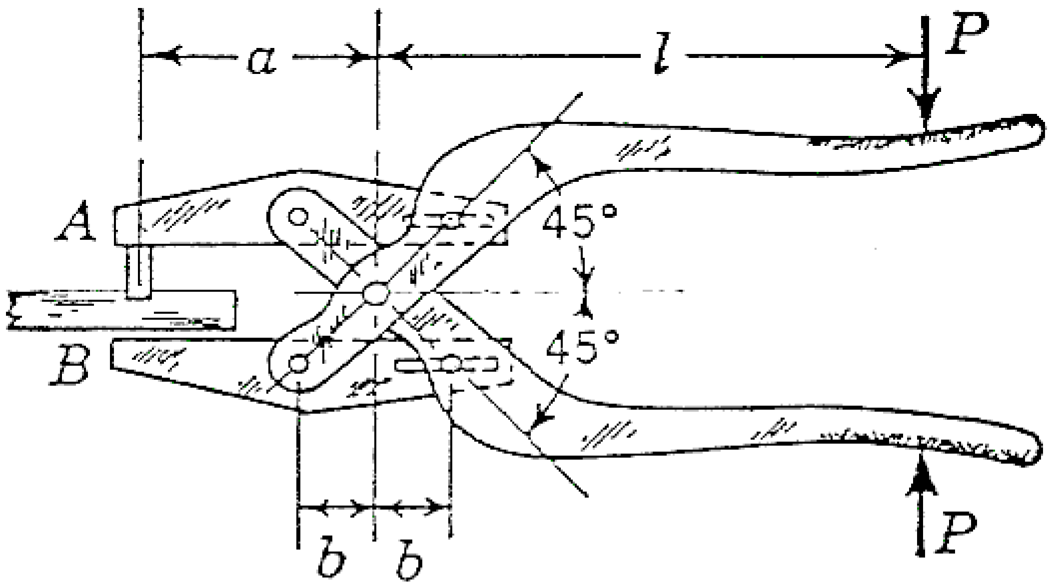

Figura 1

Come prima cosa è opportuno realizzare una schematizzazione della macchina e calcolare i gradi di libertà del sistema, facendo dunque riferimento allo schema di figura 2 si osservi che la cerniera posta nel punto G non unisce pezzi distinti: il sistema è dunque formato da quattro aste.

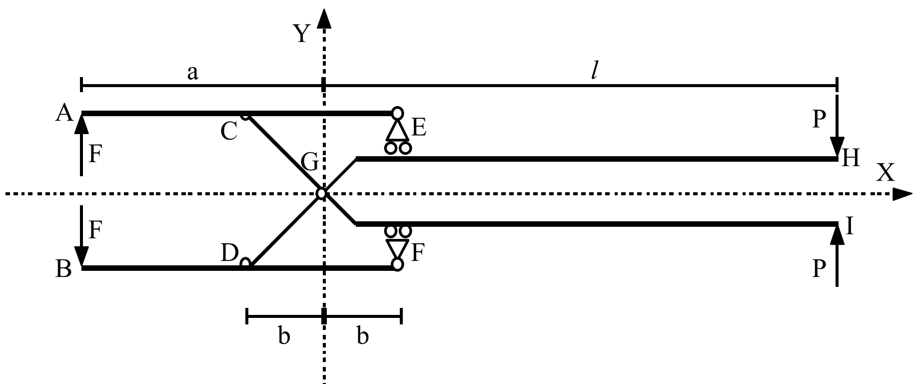

Figura 2

Il numero di gradi di libertà dovrà dunque essere espresso dalla relazione seguente:

$$gdl = 3N - N_V \qquad (1)$$

dove N sia il numero dei corpi rigidi che formano la macchina mentre N_V è il numero di gradi di vincolo presenti; siccome ogni carrello corrisponde ad un grado di vincolo ed ogni cerniera che collega due aste corrisponde a 2 gradi di vincolo, essendo presenti due carrelli e tre cerniere, il numero complessivo dei gradi di vincolo è 8. Dalla relazione (1) si ricava allora:

$$gdl = 3 \cdot 4 - 8 = 4$$

Scegliendo un sistema di riferimento solidale con la pinza, si possono eliminare altri tre gradi di libertà e si riduce così il sistema ad avere un unico grado di libertà.
Sfruttando l'evidente simmetria, lo studio della pinza si può limitare a due sole aste, che vengono scomposte (evidenziando le reazioni vincolari) come mostrato nelle figure 3 e 4.

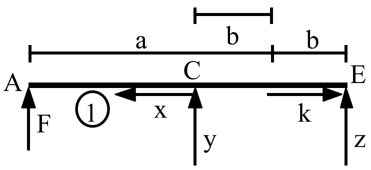

Figura 3

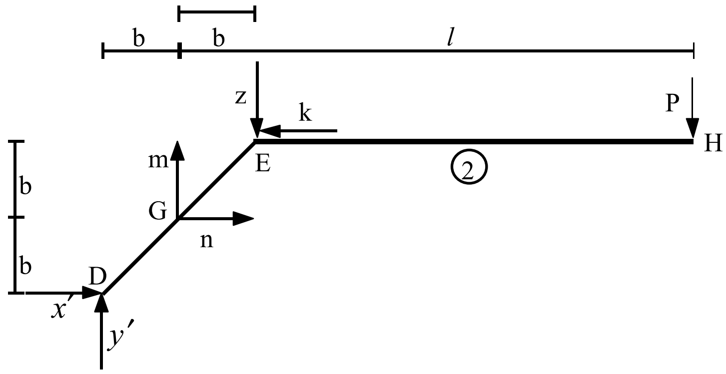

Figura 4

La simmetria garantirà che sia:

$$\begin{cases} \overrightarrow{x'} = -\vec{x} \\ \overrightarrow{y'} = -\vec{y} \end{cases}$$

Poiché nella realtà non è possibile creare un vincolo ideale, è stato messo in evidenza l'attrito k che si sviluppa in prossimità del carrello e che può essere espresso, indicando con μ *il coefficiente d'attrito, tramite la relazione:*

$$k = \mu z \qquad (2)$$

Si possono ora sfruttare le equazione di equilibrio e, per incominciare, si impone l'equilibrio della prima asta alla rotazione attorno al punto C, ottenendo:

$$F(a-b) - z2b = 0$$

dalla quale si ricava:

$$z = \frac{F(a-b)}{2b} \qquad (3)$$

Imponendo alla medesima asta l'equilibrio alla traslazione verticale si ottiene invece:

$$F + y + z = 0$$

e quindi, combinando le ultime due relazioni scritte, si ricava:

$$y = -\frac{F(a+b)}{2b} \qquad (4)$$

Infine, l'equilibrio alla traslazione orizzontale permette di scrivere:

$$x = k \qquad (5)$$

Passando ora alla seconda asta si può imporre l'equilibrio alla rotazione attorno al punto G, dal quale si ricava:

$$-Pl + kb - zb - y'b + x'b = 0$$

ovvero, tenendo presente che si lavora con i moduli:

$$-Pl + kb - zb - yb + xb = 0$$

e che, combinata con la relazione (5), diventa:

$$-Pl + 2xb - zb - yb = 0 \qquad (6)$$

Combinando allora la relazione (5) con la relazione (2) si ricava:

$$x = \mu z$$

e quindi, sfruttando la relazione (3):

$$x = \mu \frac{F(a-b)}{2b}$$

Sostituendo allora quest'ultima relazione, insieme alle relazioni (3) e (4), nella relazione (6), si ricava:

$$F(\mu a - \mu b + b) = Pl$$

da cui si ottiene il coefficiente di moltiplicazione cercato:

$$\frac{F}{P} = \frac{l}{b + \mu(a-b)}$$

Da notare che qualora si supponga nullo l'attrito, il fattore di moltiplicazione degli sforzi si riduce al fattore l/b.
Il medesimo problema può essere risolto sfruttando il principio dei lavori virtuali; tale principio è applicabile nel caso in cui le reazioni interne non compiano lavoro, vale a dire se si considera nullo l'attrito presente nei carrelli. Facendo

allora riferimento alla figura 5, si calcola il lavoro compiuto dalla forza P per uno spostamento infinitesimo dell'asta 2 (il centro di rotazione è ovviamente la cerniera G).

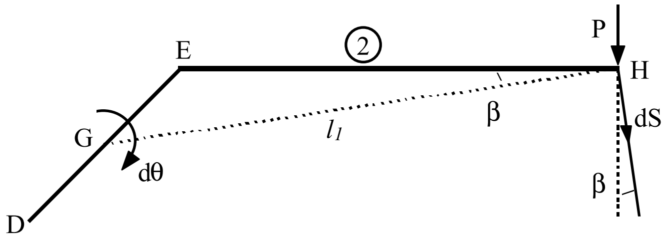

Figura 5

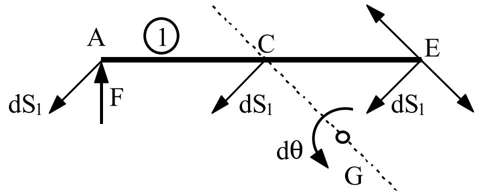

Figura 6

Il grado di libertà che si utilizza è l'angolo θ mentre il lavoro sarà ovviamente espresso dalla relazione:

$$dL = P \times dS$$

Lo spostamento dS può dunque essere espresso in funzione della coordinata scelta nel modo seguente:

$$dS = l_1 d\vartheta$$

e quindi si avrà:

$$dL = P \times dS = Pl_1 \cos\beta d\vartheta = Pld\vartheta$$

Facendo infine riferimento alla figura 6, si calcola il lavoro compiuto dalla forza F per uno spostamento infinitesimo dell'asta 1, che si muove di moto rettilineo in quanto il suo centro di istantanea rotazione si trova all'infinito lungo la retta CG. Il grado di libertà che si utilizza è ancora l'angolo θ e il lavoro sarà questa volta espresso dalla relazione:

$$dL_1 = F \times dS_1$$

Lo spostamento dS_1 può poi essere espresso in funzione della coordinata scelta nel modo seguente:

$$dS_1 = b\sqrt{2}d\vartheta$$

e quindi si avrà:

$$dL_1 = F \times dS_1 = -Fb\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}d\vartheta = -Fbd\vartheta$$

Uguagliando ora a zero la somma dei lavori elementari si ricava:

$$dL + dL_1 = Pld\vartheta - Fbd\vartheta = 0$$

da cui si ottiene:

$$Pl = Fb$$

e quindi, nuovamente:

$$\frac{F}{P} = \frac{l}{b}$$

Scelta del motore per impianto di sollevamento.

Scelta del motore per impianto di sollevamento.
Con riferimento all'impianto di sollevamento rappresentato in figura 1 e composto da un ascensore con una corsa di 12 metri e un carico massimo di 4 persone si chiede di determinare:

1) *la potenza di targa del motore;*
2) *il diametro della fune e del tamburo (o puleggia), eventualmente facendo ricorso ad una taglia;*
3) *il rapporto di trasmissione del riduttore (se richiesto) fra motore ed argano;*
4) *l'effettiva velocità di sollevamento;*
5) *l'accelerazione massima durante il transitorio di avviamento;*
6) *il momento d'inerzia del volano che limiti l'accelerazione massima al 10% dell'accelerazione di gravità;*
7) *il tempo e lo spazio percorso durante il transitorio.*

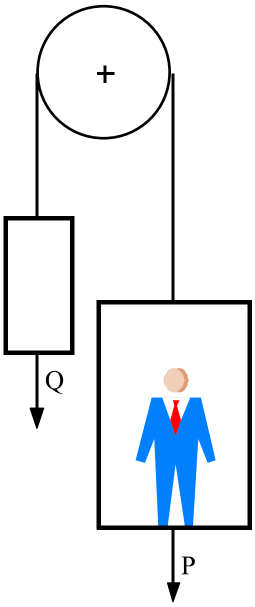

Figura 1

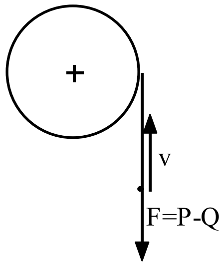

Figura 2

Come prima cosa è possibile stimare il peso complessivo P considerando per ogni passeggero una massa standard m_p di 80 kg, è inoltre necessario prevedere la presenza di bagagli per una massa m_b complessiva di 20 kg mentre la massa m_c della cabina vuota si attesta sui 300 kg. Il peso P che agisce sulla cabina è dunque esprimibile come:

$$P = (4m_p + m_b + m_c)g \cong 6400N$$

Il contrappeso viene solitamente scelto in modo da sviluppare una forza Q pari a circa il 40% del peso P complessivo che agisce sulla fune e quindi, nel caso in questione:

$$Q = 0{,}4P \cong 4300N$$

Facendo riferimento al Manuale dell'Ingegnere (par. 1.6.4, pag.G-20) si può ricavare che, nel caso di case d'abitazioni fino a 7-8 piani, la velocità v della cabina non deve essere superiore a 0,75 m/s e quindi si impone che sia proprio:

$$v = 0{,}75 \, {}^{m}\!/_{s}$$

A questo punto è possibile ricavare la potenza di targa del motore soffermandosi sul tamburo ad esso collegato, e facendo quindi riferimento al sistema di figura 2, sfruttando la seguente relazione:

$$W_t = Fv = (P - Q)v \cong 1575W$$

da cui si deduce come sia consigliabile un motore con potenza di targa pari a 2kW. La scelta del tipo di fune da utilizzare prevede di tenere innanzitutto in considerazione il fatto che ad ogni estremità della fune vi è un tiro che possiamo indicare con il simbolo T e che viene solitamente corretto tramite un coefficiente ξ di sicurezza generalmente dell'ordine di 10 (vedi tabella 31 del Manuale dell'Ingegnere, pag. F-104), si avrà allora:

$$T^* = \xi T$$

Facendo dunque nuovamente riferimento al Manuale dell'Ingegnere (tabella 29, pag. F-100) si ricava come sia sufficiente una fune di diametro pari ad 11 mm (con fili esterni del diametro δ di 0,73 mm) per sopportare un peso di

6400N; bisogna sottolineare come sia importante che T sia uguale a P ad una estremità e uguale a Q all'altra estremità, non ci deve infatti essere alcun slittamento, che porterebbe ad una modifica della situazione. Per quanto riguarda le dimensioni D dell'argano è invece necessario fare riferimento alla tabella 32 del Manuale dell'Ingegnere (pag. F-105) da cui si ricava che:*

$$\frac{D}{\delta} = 800$$

e quindi:

$$D = 800\delta = 584mm$$

Per la scelta del motore bisogna innanzitutto decidere il numero di poli; per la situazione in esame potrebbe essere sufficiente un motore a soli due poli e quindi si può fare riferimento alla tabella 15 del Manuale dell'Ingegnere (pag. M-176) dalla quale si ricava che per un motore con una potenza nominale W_N di 2,2 kW si ha un numero n di giri al minuto pari a 2870 e quindi si può sfruttare la seguente relazione per trovare la velocità angolare:

$$\omega = \frac{2\pi}{60} n = 300{,}55 \frac{rad}{s}$$

La coppia nominale del motore sarà allora:

$$M_N = \frac{W_N}{\omega} \cong 7{,}4 Nm$$

Con l'utilizzo della tabella 14 del Manuale dell'Ingegnere (pag.M-175) si può ricavare la coppia massima che sarà dunque pari a:

$$M_{Max} = 2M_N \cong 14{,}8 Nm$$

mentre la coppia di spunto (o coppia di avviamento) sarà:

$$M_{Avv} = 1{,}5 M_N \cong 11{,}3 Nm$$

La velocità angolare dell'argano può essere ricavata valutando il raggio dell'argano, che ovviamente sarà:

$$r_a = D/2 = 292mm$$

e poi sfruttando la relazione seguente:

$$\omega_a = \frac{v}{r_a} = 2{,}4 \frac{rad}{s}$$

Il rapporto di trasmissione dovuto alla scelta del riduttore sarà allora:

$$\tau = \frac{\omega_a}{\omega} \cong 0{,}0081$$

Un rapporto di trasmissione di questo tipo è tipico di una vite senza fine con rendimento pari a:

$$\eta \cong 0{,}75$$

Una rappresentazione grafica della caratteristica del motore elettrico scelto sarà dunque, facendo riferimento ai valori trovati fino ad ora, quella mostrata in figura 3.

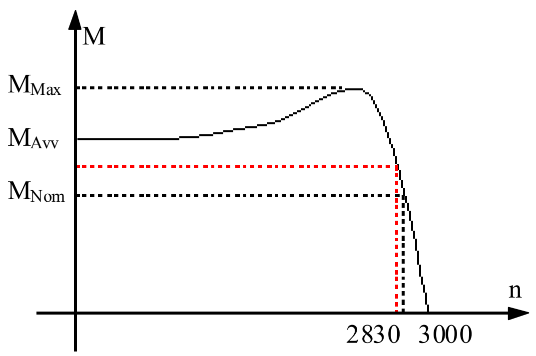

Figura 3

In rosso è stata individuata la velocità effettiva, che sarà ovviamente un po' più bassa di quella nominale. È ora possibile sfruttare il bilancio di potenze e quindi fare riferimento alla relazione seguente:

$$W_m - W_p - W_u = 0$$

nella quale ovviamente non compare alcuna variazione di energia cinetica in quanto si è nelle condizioni di regime. Combinando quest'ultima relazione con i parametri individuati fino ad ora si può scrivere:

$$M_m\omega_m - (1-\eta)M_m\omega_m - \omega_a F r_a = 0$$

ovvero:

$$M_m\omega_m - (1-\eta)M_m\omega_m - \tau\omega_m F r_a = 0$$

dalla quale si ricava:

$$M_m = \frac{\tau}{\eta} F r_a \cong 6{,}62 Nm$$

A questo punto si può passare allo studio del transitorio e quindi si farà riferimento allo schema mostrato in figura 4, dove J rappresenta le inerzie.

$$\boxed{M} - \boxed{J_M} - \boxed{\eta,\tau} - \boxed{J_U} - \boxed{U}$$

Figura 4

Il bilancio di potenze porterà questa volta alla seguente espressione:

$$W_m - W_p - W_u = \frac{dT}{dt}$$

Si imponga poi per semplicità che non ci sia alcuna potenza persa e quindi si semplifica l'ultima relazione scritta, ottenendo:

$$W_m - W_u = \frac{dT}{dt}$$

ovvero, esplicitando i termini relativi alla potenza:

$$M_m\omega_m - Pv + Qv - \frac{dT}{dt} = 0$$

ovvero:

$$M_m\omega_m - Fv - \frac{dT}{dt} = 0 \qquad (1)$$

Quando si ha un corpo in movimento, generalmente si pone:

$$T = \frac{1}{2} J\omega^2$$

e quindi si avrà:

$$\frac{dT}{dt} = J\omega\dot{\omega}$$

dove ovviamente appare l'accelerazione ω'; l'equazione (1) assumerà allora la seguente forma:

$$M_m\omega_m - Fv - J_m\omega_m\dot{\omega}_m - J_a\omega_u\dot{\omega}_u - m_p a v - m_a a v = 0$$

Il legame cinematica tra le velocità angolari è ovviamente il seguente:

$$\omega_u = \omega_a = \tau\omega_m$$

Per i dati che abbiamo a disposizione si avrà che:

$$\begin{cases} J_m = \dfrac{PD^2}{8} \\ J_a = \dfrac{m r_a^2}{2} \end{cases}$$

Al posto della coppia M_m si utilizzerà poi la coppia M_{Max} e in questo modo si ricaverà l'accelerazione angolare ω_m' e da questa l'accelerazione a che dovrà essere confrontata con i valori di tabella per vedere se è accettabile o meno. Se l'accelerazione risultante dovesse dimostrarsi eccessiva, per rallentare il transitorio sarà possibile utilizzare un volano che presenterà una sua inerzia J_v che andrà ad influenzare il calcolo dell'accelerazione. Lo schema mostrato in figura 4 si evolve dunque come mostrato in figura 5.

$$\boxed{M} - \boxed{J_M} - \boxed{J_V} - \boxed{\eta,\tau} - \boxed{J_U} - \boxed{U}$$

Figura 5

Per calcolare il tempo che la cabina impiega ad andare a regime sarà necessario utilizzare la seguente relazione:

$$\dot{\omega}_m = \frac{f(\omega_m)}{J_{Tot}}$$

dove sia:

$$J_{Tot} = J_m + J_V + J_a\tau^2 + (m_p + m_a)r_a^2\tau^2$$

Integrando dunque la penultima relazione scritta si ricava:

$$\omega_m = \int \frac{f(\omega_m)}{J_{Tot}} dt$$

La condizione al contorno è ovviamente la seguente:

$$\omega_0 = 0$$

Esistono ovviamente diversi modi per risolvere l'integrale in questione, sarebbe per esempio possibile utilizzare la formula di Eulero, oppure si può considerare la seguente relazione:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{f(\omega)}{J_{Tot}}$$

da cui si ricava:

$$\frac{d\omega}{f(\omega)} = \frac{dt}{J_{Tot}}$$

e quindi:

$$\int_0^{\omega_{reg}} \frac{d\omega}{f(\omega)} = \int_0^{t_{reg}} \frac{1}{J_{Tot}} dt$$

ovvero:

$$\int_0^{\omega_{reg}} \frac{d\omega}{f(\omega)} = \frac{1}{J_{Tot}} \int_0^{t_{reg}} dt$$

Si ha allora:

$$t_{reg} = J_{Tot} \int_0^{\omega_{reg}} \frac{d\omega}{f(\omega)}$$

Da un punto di vista grafico, facendo riferimento alla figura 6, il tempo necessario alla cabina per andare a regime (da un punto di vista pratico si tratta del tempo necessario a raggiungere il 90% della velocità di regime) è dato dal prodotto dell'area sotto la curva nera, moltiplicata per il momento d'inerzia totale.

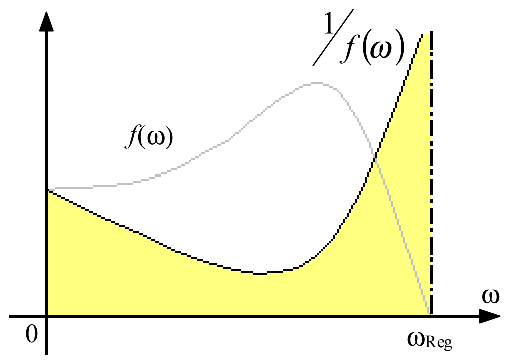

Figura 6

Transitorio di avviamento con frizione.

Transitorio di avviamento con frizione.
Un carrello di massa m pari a 500 kg (si veda la figura 1) deve essere in grado di salire lungo una rampa con una pendenza del 18% alla velocità v_0 di 36 km/h. Il carrello è azionato da un motore elettrico la cui caratteristica viene (drasticamente) schematizzata da un andamento lineare fino alla velocità di sincronismo (si veda la figura 2) dove il motore si suppone operare ad una velocità n_0 costante di 3000 g/1', con coppia nominale M_n pari a metà della coppia massima M_{max}.

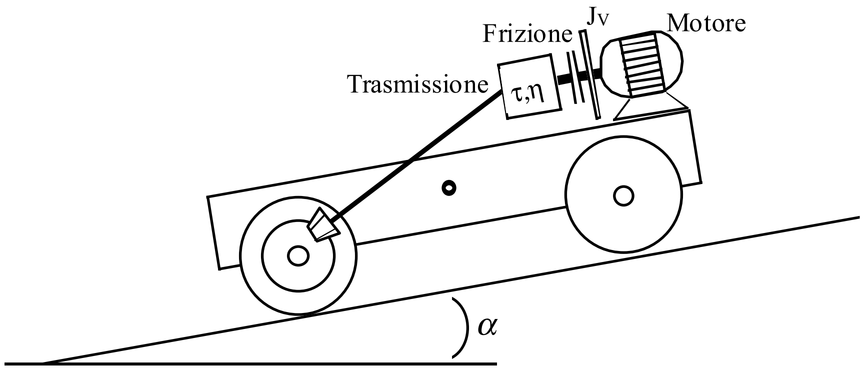

Figura 1

Determinare il valore della coppia nominale supponendo che il rendimento η della trasmissione sia 0,95.

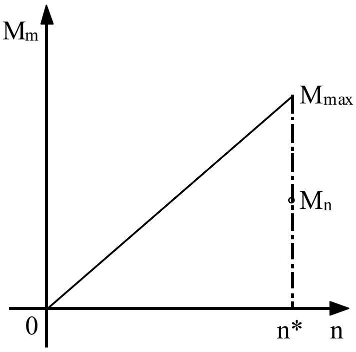

Figura 2

Vista la particolare caratteristica del motore risulta impossibile l'avviamento da fermo, e pertanto viene interposta tra motore e trasmissione una frizione elettromagnetica il cui momento d'attrito M_f sia pari ad $1{,}5M_{max}$. Calcolare il momento d'inerzia del motore (eventualmente aumentato con l'aggiunta di un volano) che permetta l'esaurirsi del transitorio di strisciamento in corrispondenza di una velocità sufficientemente elevata da garantire che la coppia motrice sia superiore a quella resistente (ad esempio pari a 2/3 della velocità di regime). Calcolare infine il lavoro e la potenza media dissipata per attrito durante il transitorio di strisciamento.
Il calcolo della potenza nominale si può ottenere a partire dal bilancio di potenza a regime, e quindi dalla seguente relazione:

$$\eta W_n = W_r$$

ovvero, esplicitando i termini della potenza nominale e della potenza resistente:

$$\eta M_n \omega_0 = P v \sin\alpha$$

dalla quale si ricava:

$$M_n = P\frac{v_0}{\omega_0}\cdot\frac{1}{\eta}\sin\alpha = P\frac{\tau}{\eta}\sin\alpha \qquad (1)$$

Risulta dunque necessario conoscere la velocità del carrello:

$$v_0 = 36\frac{km}{h} = 10\frac{m}{s}$$

e anche la velocità angolare del motore, facilmente ricavabile dalla relazione seguente:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{60} n_0 = 314 \frac{rad}{s}$$

Il rapporto di trasmissione sarà dunque:

$$\tau = \frac{v_0}{\omega_0} = 0{,}032 \frac{m}{rad}$$

Il peso P del carrello è facilmente valutabile con la banale relazione secondo la quale:

$$P = mg = 4905N$$

L'angolo α si ottiene infine dall'osservazione secondo la quale una pendenza del 18% implica che sia:

$$tg\alpha = 0{,}18$$

da cui si ricava:

$$\alpha = arctg 0{,}18 = 10{,}20^O$$

È ora noto tutto quello che serve per utilizzare la relazione (1) e ricavare:

$$\begin{cases} M_n = 29{,}25N \\ M_{\max} = 2M_n = 58{,}5N \\ M_f = 1{,}5M_{\max} = 87{,}7N \end{cases}$$

Per calcolare ora il momento d'inerzia richiesto bisogna tener conto del fatto che il motore viene avviato a vuoto e portato alla velocità di sincronismo, solo a quel punto verrà rilasciata la frizione (di cui si vede un disegno schematico in figura 3) e inizierà un transitorio di avviamento per il carrello, che vede M_f come coppia motrice, e di rallentamento per il motore, che vede M_f come coppia resistente.

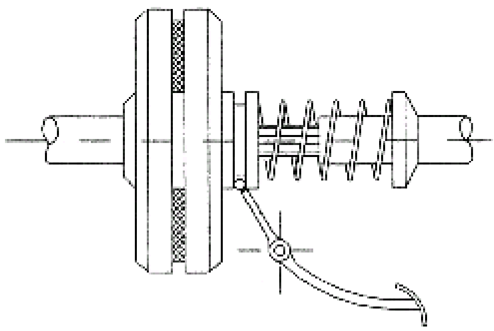

Figura 3

Si desidera che il transitorio di strisciamento della frizione abbia termine ad una velocità corrispondente ai 2/3 della velocità di regime, che corrisponde ovviamente a 2000 g/1' del motore, quando la sua coppia, superando quella resistente, permette di accelerare il carrello fino alla velocità di regime richiesta. Ci si sofferma dunque inizialmente sulla parte di sistema mostrata in figura 4, per la quale il bilancio di potenze sarà espresso nel modo seguente:

$$\eta W_m - W_r = \frac{dT}{dt}$$

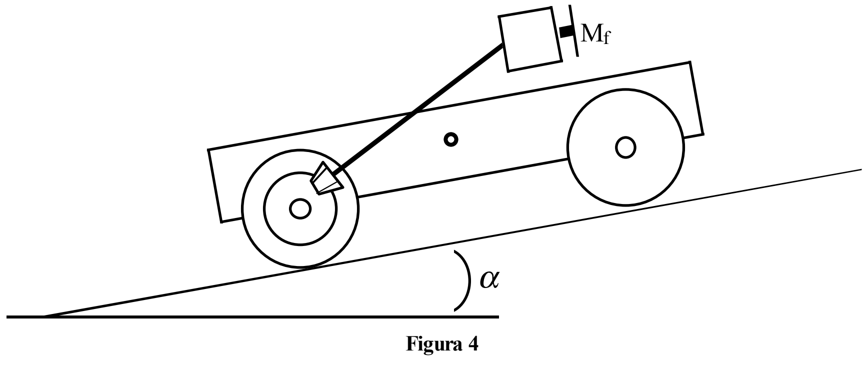

Figura 4

Esplicitando i termini della potenza dell'ultima relazione scritta si ottiene:

$$\eta M_f \omega_1 - Pv\sin\alpha = mav$$

dove ω_1 è la velocità angolare del disco della frizione solidale con il carrello e dalla quale si ricava, dividendo per $\eta\omega_1$:

$$M_f - \frac{\tau P\sin\alpha}{\eta} = a\frac{m\tau}{\eta}$$

ovvero, sfruttando i valori trovati fino ad ora e la relazione (1):

$$3M_n - M_n = a\frac{m\tau}{\eta}$$

che permette di scrivere:

$$a = \frac{2\eta M_n}{m\tau} = 3{,}47\frac{m}{s^2}$$

Siccome il rapporto di trasmissione vale anche per le accelerazioni, si può utilizzare la seguente relazione:

$$\dot{\omega}_1 = \frac{a}{\tau} = 108{,}4\frac{rad}{s^2}$$

Il tempo richiesto per arrivare alla velocità v_s definita nel modo seguente:

$$v_s = \frac{2}{3}v_0 = 6{,}7\frac{m}{s}$$

sarà espresso nel modo seguente:

$$t_s = \frac{v_s}{a} = 1{,}92s$$

È ora possibile ripetere il discorso fatto per la parte rimanente del sistema, mostrata in figura 5

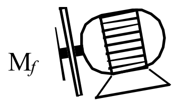

Figura 5

Il bilancio di potenze relativo al motore permette di scrivere:

$$W_m - W_f = \frac{dT}{dt}$$

che, esplicitando i termini delle potenze, diventa:

$$M_m - M_f = J\dot{\omega}_2$$

dove ω_2 è la velocità angolare del disco della frizione solidale con il motore. Da tale relazion, essendo:

$$M_m = M_{\max}\frac{\omega_2}{\omega_0}$$

si può ottenere:

$$2M_n\frac{\omega_2}{\omega_0} - 3M_n = J\dot{\omega}_2$$

dalla quale si ricava:

$$\dot{\omega}_2 - \frac{2M_n}{J\omega_0}\omega_2 = -\frac{3M_n}{J} \qquad (2)$$

Si è dunque arrivati ad un'equazione differenziale lineare, facilmente integrabile, dalla quale si ottiene il seguente integrale generale:

$$\omega_2 = Ae^{\lambda t} + \frac{3}{2}\omega_0$$

dove sia:

$$\lambda = \frac{2M_n}{J\omega_0} \qquad (3)$$

Le condizioni al contorno saranno invece le seguenti:

$$t = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0$$

grazie alle quali si ottiene:

$$A = -\frac{1}{2}\omega_0$$

e quindi la soluzione all'equazione (2) sarà:

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_0\left(3 - e^{\lambda t}\right)$$

Siccome al tempo t_s si dovrà avere:

$$\omega_2 = \frac{2}{3}\omega_0$$

la combinazione delle ultime due relazioni scritte permette di ottenere:

$$e^{\lambda t_s} = \frac{5}{3}$$

dalla quale si ottiene:

$$\lambda t_s = \ln\left(\frac{5}{3}\right) = 0{,}511$$

e quindi:

$$\lambda = \frac{0{,}511}{t_s} = 0{,}26\frac{1}{s}$$

A questo punto è noto tutto quello che serve per sfruttare la relazione (3) per ricavarne il momento di inerzia J del volano:

$$J = \frac{2M_n}{\lambda\omega_0} = 0{,}7kgm^2$$

Per quanto riguarda, infine, lavoro e potenza dissipati, si può innanzitutto osservare che il lavoro d'attrito durante il transitorio è dato dal prodotto della coppia M_f, costante, per la rotazione relativa compiuta dai dischi della frizione nel tempo t_s. Si avrà dunque:

$$L_d = M_f\left(\Phi_1 - \Phi_2\right)$$

Per ricavare Φ_1 e Φ_2 è sufficiente integrare nel tempo t_s le espressioni delle corrispondenti velocità angolari. Essendo ω_1 costante, si ricava immediatamente:

$$\Phi_1 = \int_0^{t_s}\omega_1 dt = \frac{1}{2}\dot{\omega}_1 t_s^2 = 200rad$$

Per quanto riguarda invece l'albero motore si avrà:

$$\Phi_2 = \int_0^{t_s}\omega_2 dt = \frac{\omega_0}{2}\int_0^{t_s}\left(3 - e^{\lambda t}\right)dt = \frac{\omega_0}{2}\left[3t - \frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}\right]_0^{t_s} = \frac{\omega_0}{2}\left(3t_s - \frac{1}{\lambda}e^{\lambda t_s} + \frac{1}{\lambda}\right) = 510rad$$

Il lavoro dissipato risulterà quindi pari a 27225 J. La potenza media dissipata si otterrà dividendo il lavoro per il tempo t_s:

$$\overline{W}_d = \frac{L_d}{t_s} = 14{,}2kW$$

Verifica allo slittamento.

Verifica allo slittamento.
Su un piano inclinato formante l'angolo α rispetto all'orizzontale è collocato un rullo omogeneo del peso P di 80 kg e del raggio R di 40 cm, vincolato ad una cassa del peso Q di 100 kg tramite una biella, le cui dimensioni sono desumibili dalla figura 1. Sapendo che fra le superfici di contatto si hanno i coefficienti di attrito statico (o di aderenza) f_s=0,75, radente f_r=0,7 e volvente f_v=0,01 si determini:

1- *il valore dell'angolo α_0 per cui rullo e cassa iniziano a discendere verso il basso;*
2- *l'accelerazione di discesa per $\alpha=2\alpha_0$.*

Verificare se la cassa può ribaltarsi.

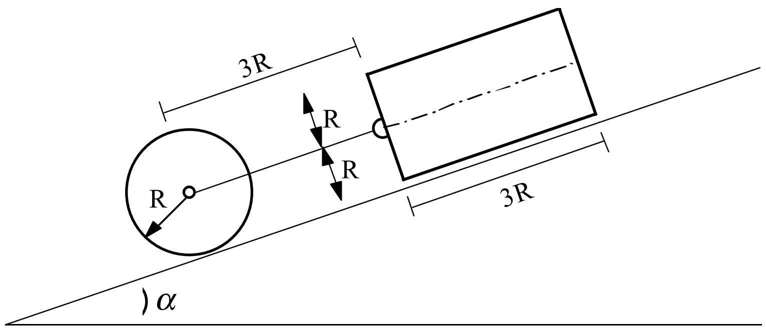

Figura 1

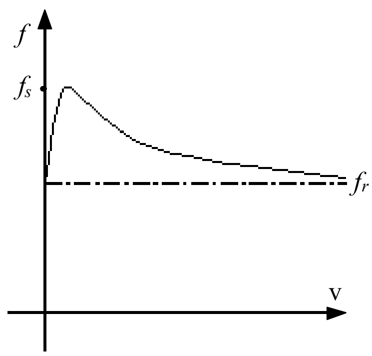

Figura 2

Come prima cosa è importante premettere che, come è anche possibile desumere dai dati forniti, il coefficiente di attrito statico è sempre maggiore del coefficiente di attrito radente (o dinamico); nella meccanica moderna si parla in effetti di un unico coefficiente di attrito che evolve con l'evolvere della velocità, come mostrato nel diagramma di figura 2. Sarà ovviamente necessario fare riferimento alle note relazioni di attrito secondo le quali:

$$\begin{cases} \Phi_t = f_r \Phi_n \\ \Phi_t \le f_s \Phi_n \end{cases}$$

*dove **Φ_t** e **Φ_n** stanno rispettivamente a rappresentare le forze tangenziale e normale (è comunque opportuno ricordare che nella realtà la relazione non è propriamente lineare). La risoluzione prevede ovviamente di spezzare il sistema in due parti; per quanto riguarda la cassa (si faccia dunque riferimento alla figura 3) l'imposizione dell'equilibrio nella direzione x porta alla seguente relazione:*

$$T - F + Qg \sin\alpha = 0$$

dalla quale si ottiene:

$$T = F - Qg \sin\alpha \tag{1}$$

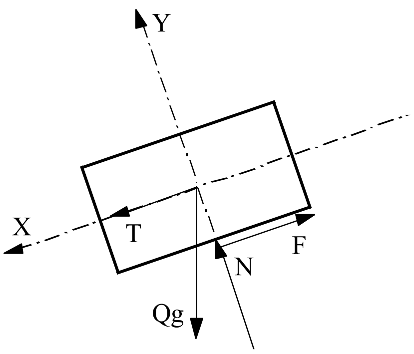

Figura 3

L'equilibrio nella direzione Y permette invece di scrivere la seguente relazione:

$$N - Qg \cos\alpha = 0$$

dalla quale si ricava:

$$N = Qg\cos\alpha$$

Siccome si sta cercando la condizione limite, vale la relazione di attrito secondo la quale:

$$F = f_s N$$

si ottiene, combinando le ultime due relazioni scritte:

$$F = f_s Qg\cos\alpha$$

La relazione (1) può dunque essere riscritta nel modo seguente:

$$T = Qg(f_s\cos\alpha - \sin\alpha)$$

In figura 4 è rappresentata la seconda parte del sistema, costituita dal cilindro.

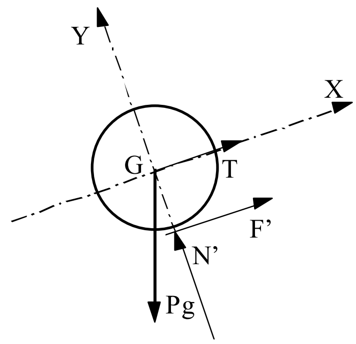

Figura 4

L'equilibrio nella direzione X porta questa volta alla seguente relazione:

$$T + F' - Pg\sin\alpha = 0$$

dalla quale si ricava:

$$T = -F' + Pg\sin\alpha \qquad (2)$$

In questo caso sarà necessario imporre l'equilibrio alla rotazione attorno al centro G del cilindro, che porta all'espressione:

$$F'R = 0$$

dalla quale si ricava ovviamente che:

$$F' = 0$$

Combinando dunque quest'ultima espressione con l'equazione (2) si ricava:

$$T = Pg\sin\alpha$$

È a questo punto possibile uguagliare le due espressioni trovate per la tensione T, ottenendo:

$$Qg(f_s\cos\alpha - \sin\alpha) = Pg\sin\alpha$$

e quindi:

$$(P+Q)\sin\alpha = Qf_s\cos\alpha$$

Dividendo allora per il coseno si ricava:

$$tg\alpha = \frac{Qf_s}{(P+Q)}$$

dalla quale si ricava l'angolo α_0 cercato:

$$\alpha_0 = arctg\frac{Qf_s}{(P+Q)} = 22{,}62^O$$

Ci si pone ora dunque nel caso in cui l'angolo sia pari a due volte l'angolo limite prima trovato, in modo da essere sicuri che ci sia movimento. Anche per calcolare l'accelerazione durante la discesa sarà necessario scomporre il sistema in due parti; per quanto riguarda il rullo, la situazione sarà questa volta quella mostrata in figura 5, nella quale si nota come, durante il rotolamento, la reazione normale N' risulta spostata rispetto alla verticale di una distanza u ricavabile dalla relazione:

$$u = Rf_v = 4mm$$

La condizione di attrito alla quale si dovrà fare riferimento in questa situazione sarà la seguente:

$$F' \le f_s N'$$

e qualora questa relazione sia verificata si ha la garanzia che il rullo sta rotolando e quindi che vale la relazione:

$$a = \dot{\omega}R \qquad (3)$$

Si imponga ora l'equilibrio delle forze nella direzione X per il rullo, ottenendo la seguente relazione:

$$T + Pa + F' - Pg\sin\alpha = 0$$

dalla quale si ricava:

$$T = Pg\sin\alpha - F' - Pa \tag{4}$$

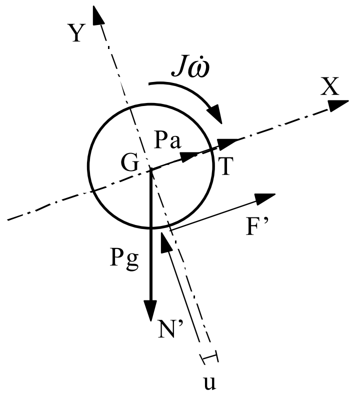

Figura 5

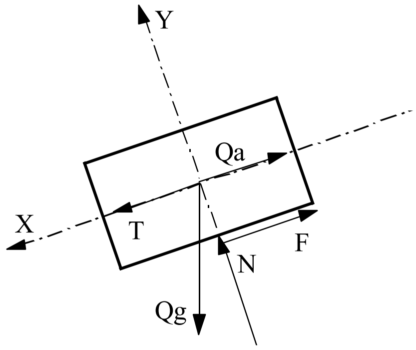

Figura 6

Dall'equilibrio nella direzione Y si ricava invece:

$$N' - Pg\cos\alpha = 0$$

dalla quale si ricava:

$$N' = Pg\cos\alpha$$

Dall'equilibrio alla rotazione attorno al baricentro G del rullo si ricava, infine:

$$J\dot{\omega} + N'u - F'R = 0$$

Combinando le ultime due relazioni scritte si ricava:

$$J\dot{\omega} + Pgu\cos\alpha - F'R = 0$$

e quindi:

$$F' = \frac{J}{R}\dot{\omega} + \frac{Pgu}{R}\cos\alpha$$

che, combinata con la relazione (3), diventa:

$$F' = \frac{J}{R^2}a + \frac{Pgu}{R}\cos\alpha$$

Sostituendo allora quest'ultima espressione nella relazione (4) si ricava:

$$T = Pg\sin\alpha - \frac{J}{R^2}a - \frac{Pgu}{R}\cos\alpha - Pa$$

Siccome si è poi in presenza di un rullo, si avrà:

$$J = \frac{PR^2}{2}$$

e quindi:

$$T = Pg\sin\alpha - \frac{P}{2}a - \frac{Pgu}{R}\cos\alpha - Pa$$

ovvero:

$$T = Pg\sin\alpha - \frac{3}{2}Pa - \frac{Pgu}{R}\cos\alpha \tag{5}$$

Facendo ora riferimento allo schema di figura 6 ci si può soffermare sul blocco, per il quale, imponendo l'equilibrio alla traslazione lungo la direzione X, si ricava:

$$T + Qg\sin\alpha - Qa - F = 0$$

dalla quale si ricava:

$$T = F + Qa - Qg\sin\alpha$$

Imponendo poi la condizione relativa all'attrito, secondo la quale:

$$F = f_r N$$

si ricava:

$$T = f_r N + Qa - Qg\sin\alpha \qquad (6)$$

Imponendo invece l'equilibrio alla traslazione lungo la direzione Y si ottiene:

$$N - Qg\cos\alpha = 0$$

dalla quale si ricava:

$$N = Qg\cos\alpha$$

che, sostituita nella relazione (6) permette di scrivere:

$$T = f_r Qg\cos\alpha + Qa - Qg\sin\alpha$$

Uguagliando allora quest'ultima relazione con l'equazione (5) si ricava:

$$Pg\sin\alpha - \frac{3}{2}Pa - \frac{Pgu}{R}\cos\alpha = f_r Qg\cos\alpha + Qa - Qg\sin\alpha$$

dalla quale si può ottenere l'accelerazione:

$$a = \frac{(Pg + Qg)\sin 2\alpha_0 - \left(f_r Qg + \frac{Pgu}{R}\right)\cos 2\alpha_0}{\frac{3}{2}P + Q} \cong 3{,}44\,\frac{m}{s^2}$$

Ora si hanno tutti i parametri per verificare, tornando alla disequazione relativa all'attrito vista in precedenza, se effettivamente il rullo rotola. Per stabilire, infine, se la cassa si ribalta o meno, occorre fare riferimento al diagramma di figura 7 nel quale si specifica come la reazione N agisca in realtà in un punto qualunque dell'interfaccia tra la cassa e il piano inclinato, che dunque si suppone essere ad una distanza h dalla perpendicolare al piano passante per il baricentro.

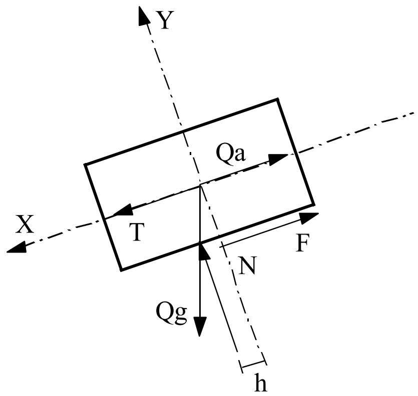

Figura 7

Affinché la cassa non si ribalti dovrà risultare nullo il momento delle forze agenti sulla cassa rispetto al suo baricentro, ovvero si dovrà avere:

$$Nh - FR = 0$$

Sfruttando i valori numerici prima trovati si ricava il valore limite di h, che sarà pari a 3/2 di R., oltre il quale la cassa si può ribaltare.