

Teoremi di Rivals e Coriolis.

Teoremi di Rivals e Coriolis.

In figura 1 è rappresentato in scala 1:10 il dispositivo di comando della slitta di una macchina utensile. L'ingranaggio 1, azionato da un motore elettrico, trasmette il moto all'ingranaggio 2 e quindi, attraverso il corsoio 3, al glifo oscillante 4. La biella 5 trasmette infine il moto alla slitta 6.

Si richiede di determinare, per la posizione indicata in figura e per il valore ω_2 della velocità angolare:

- 1) la velocità del centro del corsoio;
- 2) la velocità angolare del glifo;
- 3) la velocità del punto B;
- 4) la velocità della slitta;
- 5) l'accelerazione di B;
- 6) l'accelerazione della slitta.

Conoscendo inoltre il peso P della slitta e la forze resistente F , calcolare la coppia motrice agente istantaneamente sulla ruota 1, trascurando gli attriti dei diversi accoppiamenti e le masse degli organi in movimento (esclusa la slitta).

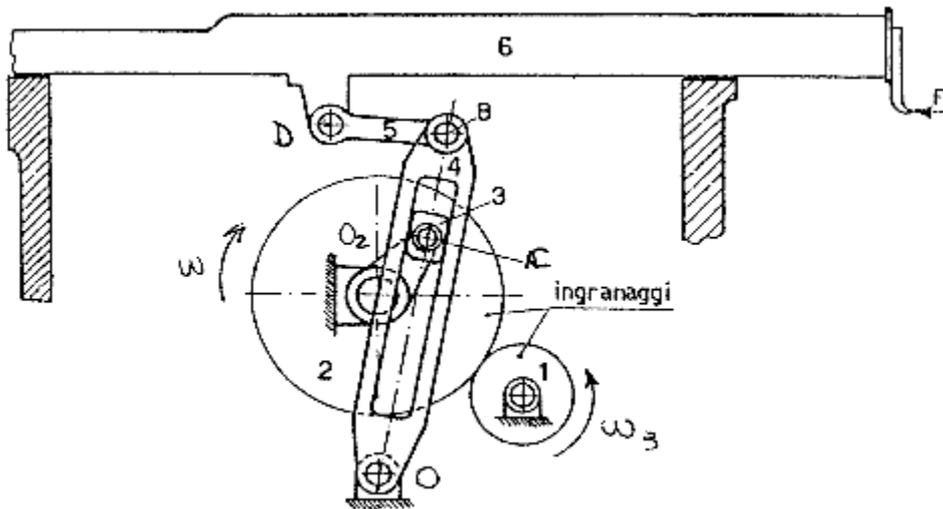


Figura 1

Come prima cosa si procede ad una schematizzazione del meccanismo come quella rappresentata in figura 2, che diventa poi, una volta scelto un sistema di riferimento solidale con il punto O, quella mostrata in figura 3.

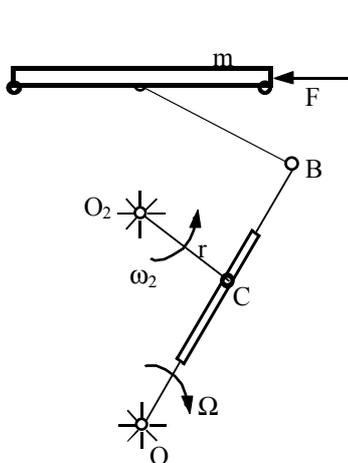


Figura 2

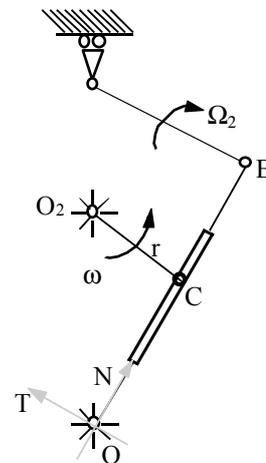


Figura 3

Si osservi che la struttura realizzata permette un movimento di andata più lento rispetto al movimento di ritorno. Per valutare la velocità del centro del corsoio, ovvero la velocità del punto C, si può sfruttare il teorema di Coriolis utilizzando il sistema di riferimento mostrato in figura 3 e quindi sfruttando la seguente relazione:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_C^{rel} + \vec{v}_C^{tra}$$

Siccome il punto C è rigidamente collegato all'ingranaggio 2, la sua velocità assoluta sarà diretta perpendicolarmente al tratto O_2C e il suo modulo sarà:

$$|\vec{v}_C| = \omega r$$

La velocità relativa del punto C rispetto al sistema di riferimento scelto non potrà che essere parallela al glifo e quindi al tratto OC. Per quanto riguarda la velocità di trascinamento, infine, questa sarà invece perpendicolare al tratto OC e il suo modulo sarà:

$$|\vec{v}_C^{tra}| = \Omega \overline{OC} \quad (1)$$

Le incognite del problema sono ovviamente Ω e il modulo della velocità relativa; è dunque possibile riassumere quanto visto nella tabella 1.

v_C^{ass}	=	v_C^{rel}	+	v_C^{tra}	
ωr		?		$\Omega(OC)$	Moduli
$\perp O_2C$		$// OC$		$\perp OC$	Direzioni

Tabella 1

Conoscendo in maniera completa la velocità assoluta e la direzione e il verso della velocità di trascinamento è possibile sfruttare il metodo della poligonale come mostrato in figura 4 e poi ricavare per misura diretta il modulo della velocità relativa, ottenendo il poligono di figura 5.

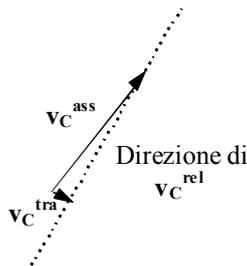


Figura 4

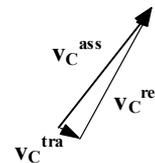


Figura 5

Dalla conoscenza del modulo della velocità relativa è possibile ricavare la velocità angolare Ω del glifo sfruttando la relazione (1) nel modo seguente:

$$\Omega = \frac{|\vec{v}_C^{rel}|}{OC}$$

A questo punto è possibile soffermarsi sul punto B, la cui velocità sarà ora facilmente esprimibile tramite la relazione:

$$v_B = \Omega \overline{OB}$$

la cui direzione è diretta ovviamente perpendicolarmente alla direzione OB. Facendo ora riferimento alla seguente relazione vettoriale:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{v}_{BD}$$

ci si può soffermare sulla velocità della slitta e quindi sulla velocità del punto D. Sfruttando ancora una volta il teorema di Rivals è possibile costruire la tabella 2

v_D	=	v_B	+	v_{BD}	
?		$\Omega(OB)$		$\Omega_2(DB)$	Moduli
$\perp OO_2$		$\perp OB$		$\perp DB$	Direzioni

Tabella 2

Siccome la velocità del punto B è completamente nota, mentre delle altre due velocità sono note le direzioni, è possibile sfruttare il metodo della poligonale come mostrato in figura 6 e ricavare il poligono di figura 7, che permette di ricavare i moduli delle velocità v_D e v_{BD} .

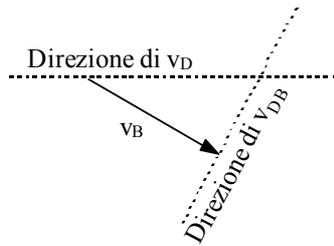


Figura 6

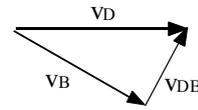


Figura 7

Una volta ricavato il modulo della velocità v_{DB} si può ricavare la velocità angolare Ω_2 sfruttando la seguente relazione:

$$\Omega_2 = \frac{|v_{DB}|}{DB}$$

Abbiamo ora tutto quello che ci serve per calcolare le accelerazioni. Per calcolare l'accelerazione del punto B dobbiamo innanzitutto conoscere l'accelerazione angolare dell'asta OB e questa si può ricavare valutando l'accelerazione del punto C, ovvero applicando il teorema di Coriolis e sfruttando la seguente relazione vettoriale:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_C^{Ass} + \vec{a}_C^{Rel} + \vec{a}_C^{Tra} + \vec{a}_{Cor}$$

Scegliendo un sistema di riferimento solidale con il glifo ed esplicitando le componenti normale e tangenziale delle accelerazioni si ottiene una relazione più completa e riportata di seguito:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_t + \vec{a}_n + \vec{a}_t + \vec{a}_{Cor}$$

L'accelerazione relativa normale non rientra in questo conto per via della scelta del sistema di riferimento, che impone un moto relativo rettilineo, mentre aver imposto ω_2 costante significa che l'accelerazione assoluta sarà solamente normale. È a questo punto possibile costruire la tabella 3.

\vec{a}_C^{Ass}	=	\vec{a}_t^{Rel}	+	\vec{a}_n^{Tra}	+	\vec{a}_t^{Tra}	+	\vec{a}_{Cor}	
$\omega_2^2(O_2C)$?		$\Omega^2(OC)$		$\Omega(OC)$		$2\Omega v_C^{Rel}$	Moduli
$//O_2C$		$//CO$		$//OC$		$\perp OC$		$\perp OC$	Direzioni

Tabella 3

Le incognite risultano allora essere solo i moduli dell'accelerazione relativa e di trascinamento tangenziali. Si può dunque sfruttare il metodo della poligonale come mostrato in figura 8 e ricavare il poligono mostrato in figura 9.

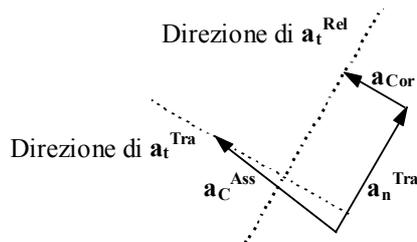


Figura 8

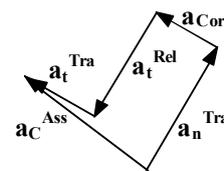


Figura 9

Una volta ricavato il modulo dell'accelerazione a_t^{Tra} si può ricavare l'accelerazione angolare $\dot{\Omega}$ sfruttando la seguente relazione:

$$\dot{\Omega} = \frac{|a_t^{Tra}|}{OC}$$

L'accelerazione del punto B è ora facilmente ricavabile in entrambe le sue componenti, quella normale e quella tangenziale:

$$\begin{cases} \left| \vec{a}_B^n \right| = \Omega^2 \overline{OB} \\ \left| \vec{a}_B^t \right| = \dot{\Omega} \overline{OB} \end{cases}$$

Possiamo infine calcolare l'accelerazione della slitta (che sarà ovviamente solo orizzontale) facendo riferimento al teorema di Rivals e quindi alla seguente relazione vettoriale:

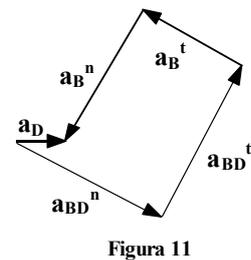
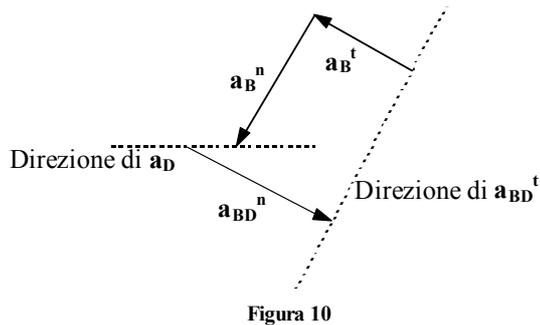
$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^t + \vec{a}_{DB}^n + \vec{a}_{DB}^t$$

Si può dunque costruire la tabella 4.

\mathbf{a}_D	=	\mathbf{a}_B^n	+	\mathbf{a}_B^t	+	\mathbf{a}_{DB}^n	+	\mathbf{a}_{DB}^t	
?		$\Omega_2^2(OB)$		$\Omega_2^2(OB)$		$\Omega_2^2(DB)$		$\Omega_2^2(DB)$	Moduli
$\perp OO_2$		$//OB$		$\perp OB$		$//DB$		$\perp DB$	Direzioni

Tabella 4

Le incognite risultano allora essere solo i moduli dell'accelerazione del punto D e dell'accelerazione \mathbf{a}_{DB}^t . Si può dunque sfruttare il metodo della poligonale come mostrato in figura 10 e ricavare il poligono mostrato in figura 11.



Una volta ricavati i moduli delle accelerazioni \mathbf{a}_D e \mathbf{a}_{DB}^t si può ricavare l'accelerazione angolare Ω_2^t sfruttando la seguente relazione:

$$\Omega_2^t = \frac{|\vec{a}_{DB}^t|}{DB}$$

C'ora tutto quello che serve per ricavare il momento richiesto sfruttando un normalissimo bilancio tra la potenza uscente e la potenza entrante.

Teoremi di Rivals e Coriolis. Sospensioni.

Teoremi di Rivals e Coriolis.

Analizzare con il metodo grafico il meccanismo mostrato in figura 1.

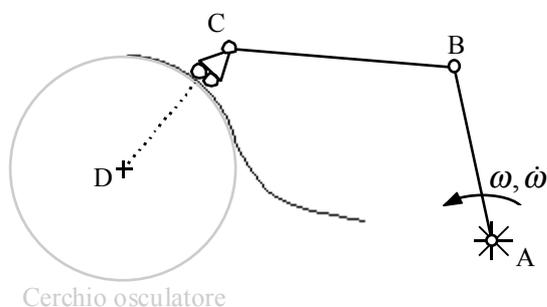


Figura 1

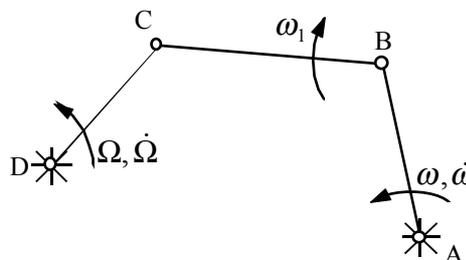


Figura 2

Come prima cosa è necessario schematizzare il problema, ottenendo la struttura articolata mostrata in figura 2, nella quale appaiono anche le tre incognite del problema. Affidandosi dunque al teorema di Rivals, si osserva come sia valida la seguente relazione:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}$$

Le direzioni delle velocità che appaiono in questa relazione sono tutte note e, in più, è noto anche il modulo della velocità del punto B, che dovrà essere:

$$|\vec{v}_B| = \omega \overline{AB}$$

Incogniti rimangono invece i moduli delle altre due velocità in gioco. Si può a questo punto costruire una tabella come la tabella 1.

\mathbf{v}_C	=	\mathbf{v}_B	+	\mathbf{v}_{CB}	
?		$\omega(AB)$?	Moduli
$\perp DC$		$\perp AB$		$\perp CB$	Direzioni

Tabella 1

Sfruttando il metodo grafico, come mostrato nelle figure 3 e 4, si possono dunque ricavare i moduli incogniti.

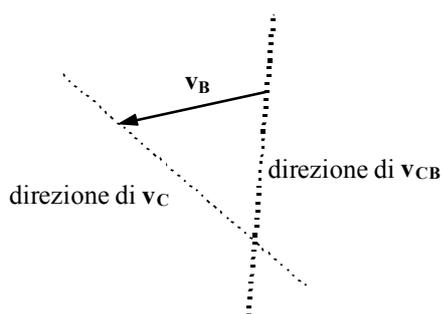


Figura 3

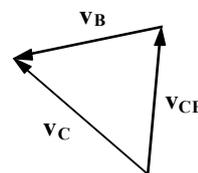


Figura 4

Dall'analisi della geometria del sistema si deduce poi che:

$$\begin{cases} v_C = \Omega \overline{CD} \\ v_{CB} = \omega_1 \overline{CB} \end{cases}$$

dalle quali quindi si ricava:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = \frac{v_C}{CD} \\ \omega_1 = \frac{v_{CB}}{CB} \end{array} \right.$$

Per quanto riguarda, invece, le accelerazioni, conviene utilizzare il teorema di Coriolis, che permette di scrivere la seguente relazione:

$$\overset{\rightarrow \text{ass}}{a_C} = \overset{\rightarrow \text{tra}}{a_B} + \overset{\rightarrow \text{rel}}{a_{CB}} + \overset{\rightarrow \text{Coriolis}}{a_{CB}}$$

Scomponendo le accelerazioni presenti in questa relazione nelle componenti normali e tangenziali ed osservando che l'accelerazione di Coriolis avrà contributo nullo, si ottiene la seguente relazione:

$$\overset{\rightarrow t}{a_C} + \overset{\rightarrow n}{a_C} = \overset{\rightarrow n}{a_B} + \overset{\rightarrow t}{a_B} + \overset{\rightarrow n}{a_{CB}} + \overset{\rightarrow t}{a_{CB}}$$

Le direzioni di tutte le accelerazioni presenti in questa espressione sono note e inoltre, dall'osservazione della geometria del sistema, si avrà:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_C^n = \Omega^2 \overline{DC} \\ a_B^n = \omega^2 \overline{BA} \\ a_B^t = \dot{\omega} \overline{BA} \\ a_{CB}^n = \omega_1^2 \overline{CB} \\ a_{CB}^t = \dot{\omega}_1 \overline{CB} \end{array} \right.$$

Rimane dunque incognito solamente il modulo dell'accelerazione a_C^t . Si può dunque compilare la tabella 2.

a_C^t	+	a_C^n	=	a_B^n	+	a_B^t	+	a_{CB}^n	+	a_{CB}^t	
?		$\Omega^2(DC)$		$\omega^2(BA)$		$\dot{\omega}(BA)$		$\omega_1^2(CB)$		$\dot{\omega}_1(CB)$	Moduli
$\perp DC$		$//DC$		$//BA$		$\perp BA$		$//CB$		$\perp CB$	Direzioni

Tabella 2

Sfruttando il metodo grafico, come mostrato nelle figure 5 e 6, si può ricavare il modulo incognito.

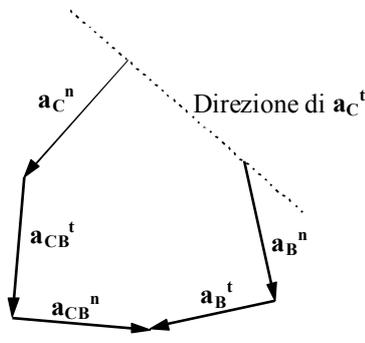


Figura 5

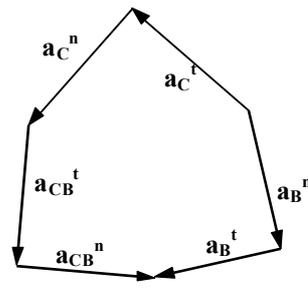


Figura 6

Dall'analisi della geometria del sistema si deduce poi che:

$$a_C^t = \dot{\Omega} \overline{DC}$$

dalla quale quindi si ricava:

$$\dot{\Omega} = \frac{a_C^t}{DC}$$

Sospensioni.

Un esempio pratico di applicazione delle strutture articolate è sicuramente costituito dalle sospensioni per automezzi. Nel disegno di figura 7 è dunque riportata la schematizzazione di una sospensione per autoveicolo, nella quale è evidente la struttura articolata.

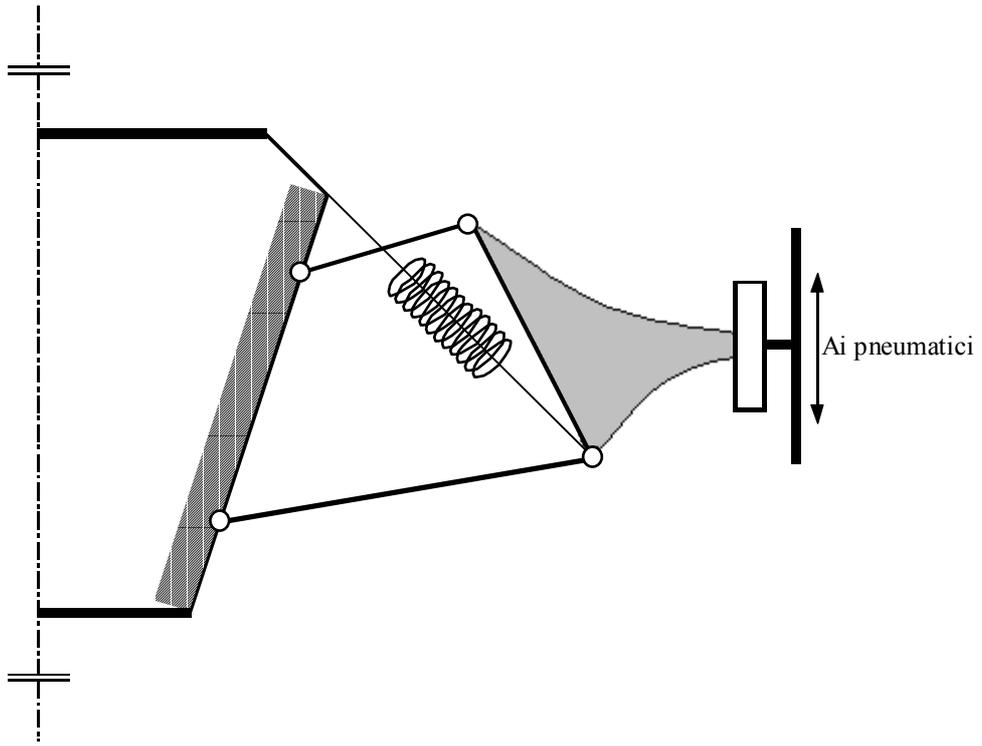


Figura 7

Accoppiamenti di forze.

Accoppiamenti di forze.

I meccanismi mostrati nelle immagini 1, 2, 3, 4 e 5 sono tutti caratterizzati da vincoli monolateri nei quali, quindi, si ha perdita del contatto tra i due elementi quando le velocità superano una certa soglia.

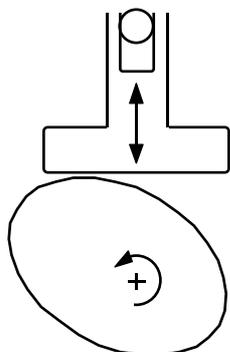


Figura 1

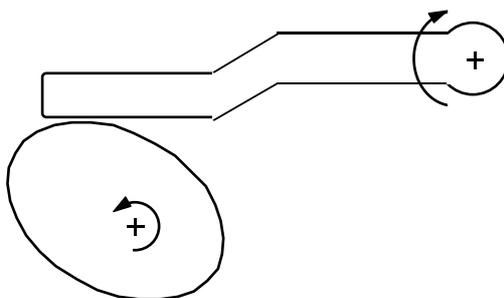


Figura 2

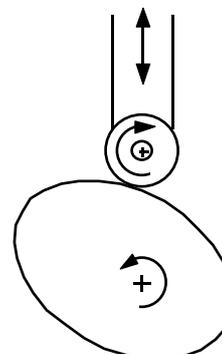


Figura 3

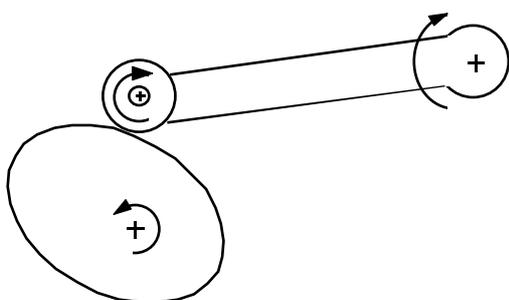


Figura 4

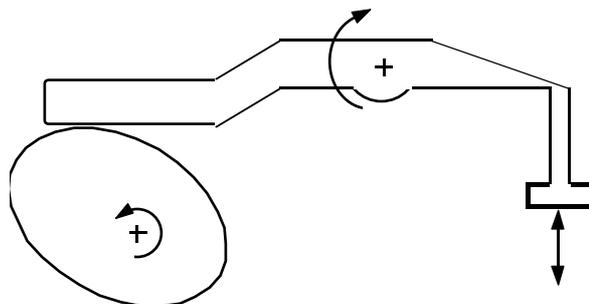


Figura 5

Per fare in modo che il cedente segua in maniera più fedele possibile il movente, è possibile utilizzare delle molle, come nel meccanismo mostrato in figura 6, oppure si possono utilizzare due bilancieri, come mostrato nel meccanismo desmodronico mostrato in figura 7; l'assenza delle molle è sicuramente un vantaggio ma l'utilizzo della doppia camma rende il tutto molto più costoso (ed è inoltre estremamente difficile eliminare eventuali giochi).

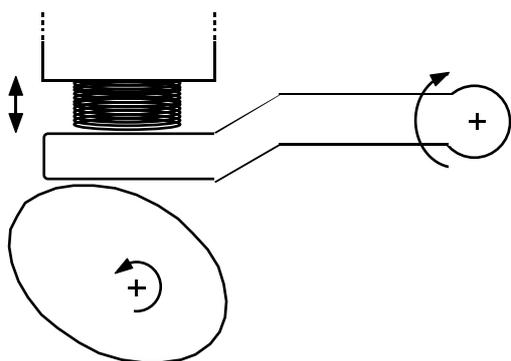


Figura 6

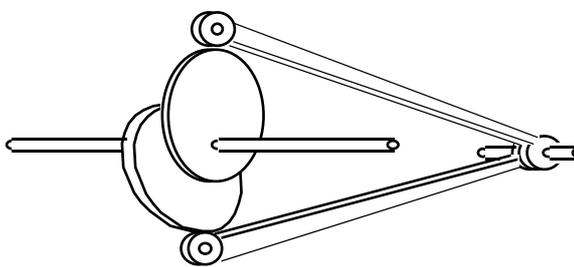


Figura 7

Altri meccanismi per l'accoppiamento delle forze sono quelli mostrati in figura 8, 9 e 10 (quest'ultimo meccanismo è detto camma a 4π e il suo utilizzo permette di ottenere il medesimo funzionamento di una camma di dimensioni doppie). Un ulteriore esempio di meccanismo di accoppiamento è la camma romboidali mostrata in figura 11 mentre in figura 12 è rappresentato un elemento di moltiplicazione nel quale si utilizza una camma molto regolare così da diminuire l'angolo di pressione e tenere comunque il puntone in movimento come se fosse collegato ad una camma molto più grossa.

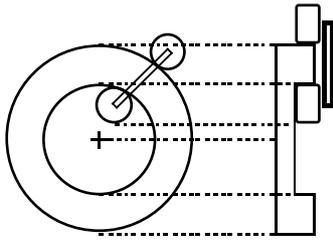


Figura 8

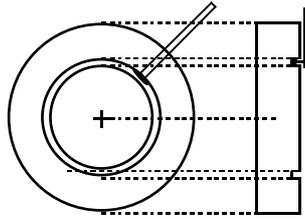


Figura 9

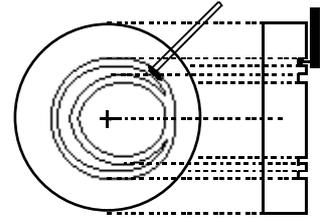


Figura 10

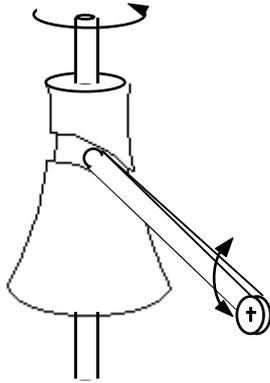


Figura 11

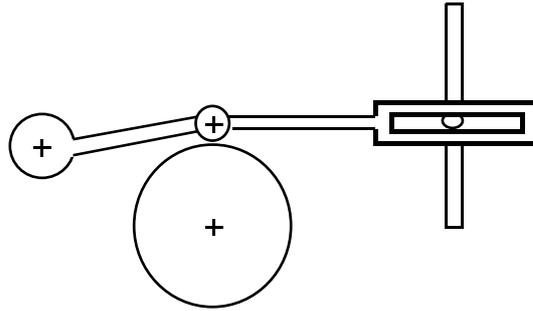


Figura 12

Si studi il comportamento del meccanismo di accoppiamento di forze mostrato in figura 13; i dati forniti con il problema sono i seguenti:

$$\begin{cases} M = 0,5\text{kg} \\ h = 0,01\text{m} \\ \alpha_{salita} = 40^\circ \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{discesa} = 40^\circ \\ \alpha_{indugio} = 100^\circ \\ \omega = 1200\text{rpm} \end{cases}$$

Risultano invece incognite la rigidezza K e il precarico T_0

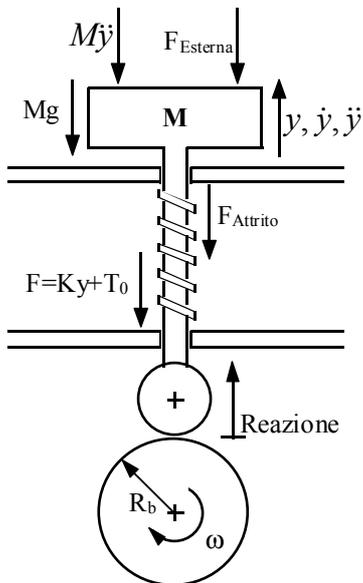


Figura 13

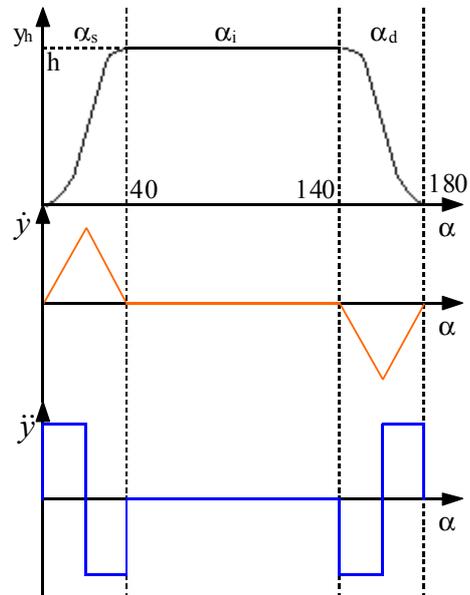


Figura 14

Si usa la legge dell'accelerazione costante che permette di costruire i diagrammi mostrati in figura 14. Bisogna dunque calcolare l'accelerazione massima e l'accelerazione minima e si sfrutta per questo scopo l'approccio geometrico facendo dunque riferimento alla seguente relazione:

$$y''_{\max/\min} = \frac{dy'}{d\alpha}$$

da cui si ricava:

$$\ddot{y} = y'' \omega^2$$

Ovviamente, affinché non avvenga il distacco tra il cedente ed il movente si deve avere reazione positiva o al più nulla; ovvero:

$$R \geq 0$$

Dall'equilibrio delle forze si ricava:

$$R = Mg + Ky + T_0 + M\ddot{y} + F_{att} + F_{est} \quad (1)$$

In generale, infatti, utilizzando una molla si deve considerare la seguente relazione:

$$F = Kd$$

dove d indica la deformazione a partire dalla condizione di riposo della molla stessa; si indicherà dunque:

$$d = d_0 + y$$

da cui si ricava, appunto:

$$F = Kd_0 + Ky = Ky + T_0$$

Combinando quest'ultima relazione con la relazione (1) si ottiene:

$$R = Mg + Ky + Kd_0 + M\ddot{y} + F_{att} + F_{est}$$

Supponendo che sia la forza di attrito che quella esterna siano trascurabili oppure nulle, rimane:

$$R = Mg + Ky + Kd_0 + M\ddot{y}$$

Solitamente è trascurabile anche il peso e quindi rimane:

$$R = Ky + Kd_0 + M\ddot{y}$$

che deve appunto essere positivo o nullo.

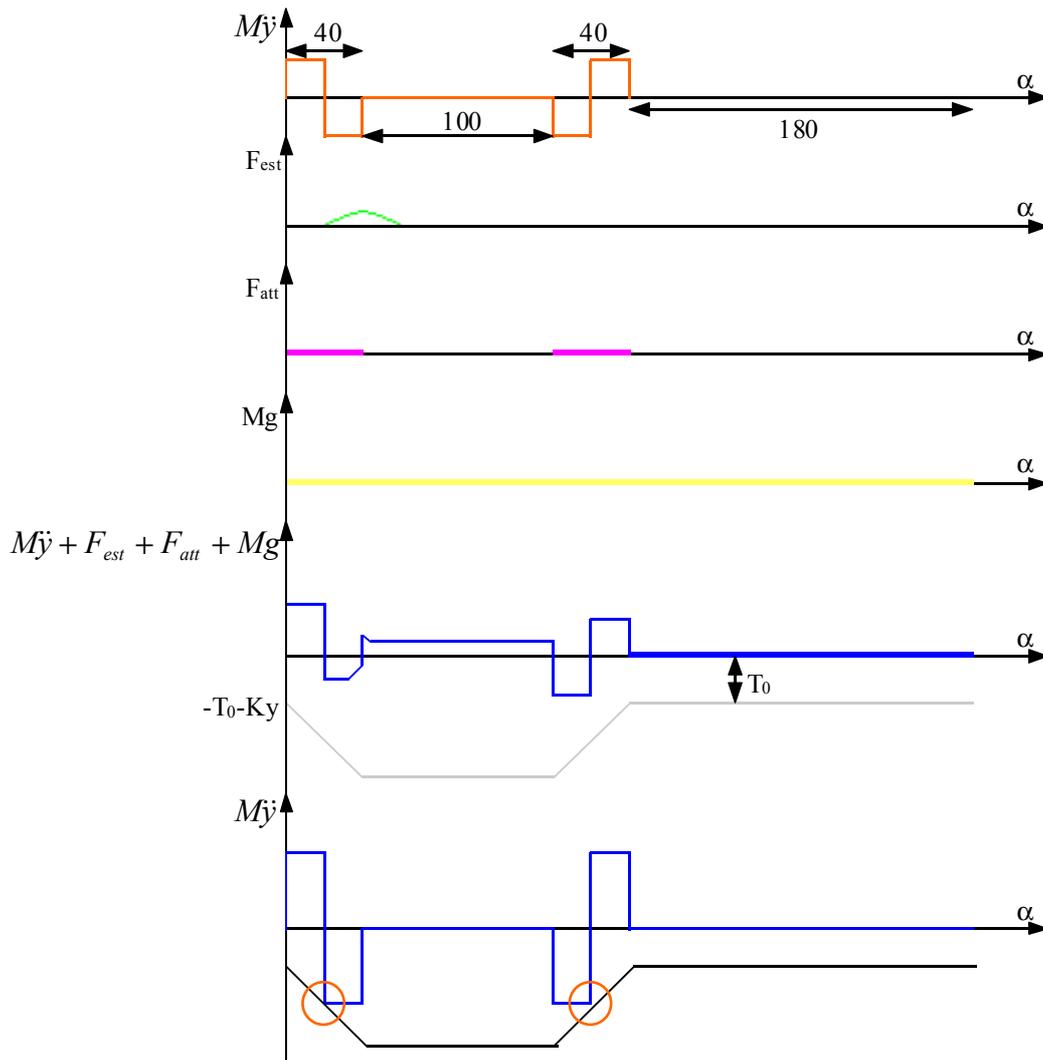


Figura 15

Solitamente, invece di utilizzare come limite inferiore una reazione nulla si utilizza una soglia di sicurezza R_{safe} che si può imporre pari a 10 N. Le due variabili sulle quali intervenire sono dunque K e d_0 . Si può dunque utilizzare il diagramma composito mostrato in figura 10; il termine K deve essere tale per cui i due gap segnati in rosso siano i più piccoli possibili. In base all'alzata, utilizzando la legge del movimento ad accelerazione costante si ottiene:

$$\frac{R_b}{h} = \frac{3,4}{\alpha_s}$$

Vibrazioni libere.

Vibrazioni libere.

Il carrello di figura 1, di peso P pari a 1500 kg_p , urta con velocità v pari ad 11 km/h contro un respingente al quale resta agganciato.

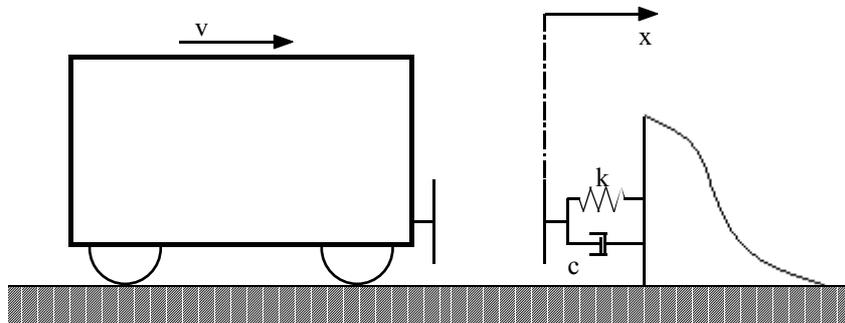


Figura 1

Determinare la legge del moto del carrello a partire dal momento dell'aggancio, nell'ipotesi che sia trascurabile l'attrito del movimento del carrello sulle rotaie e che il respingente (di costante elastica k pari a 10000 kgm^{-1} e coefficiente di smorzamento r pari a $200 \text{ kgm}^{-1}\text{s}$) abbia massa trascurabile rispetto a quella del carrello. Cosa avviene se il carrello non resta agganciato?

Per semplicità si supponrà che la ruota non abbia massa rispetto al carrello, ciò è in linea con il fatto che non viene detto nulla sull'inerzia delle ruote, sul baricentro del carrello e sull'attrito volvente. Dal momento dell'urto del carrello con il respingente, la situazione delle forze sarà quella schematizzata in figura 2.



Figura 2

L'equazione del moto sarà dunque la seguente:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$$

dalla quale si ricava:

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (1)$$

L'integrale particolare sarà dunque del tipo:

$$x = Ce^{\lambda t}$$

le cui derivate prima e seconda saranno le seguenti:

$$\begin{cases} \dot{x} = C\lambda e^{\lambda t} \\ \ddot{x} = C\lambda^2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

Sostituendo dunque le ultime tre espressioni nella relazione (1) si ricava:

$$C\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{r}{m}C\lambda e^{\lambda t} + \frac{k}{m}Ce^{\lambda t} = 0$$

ovvero:

$$\lambda^2 + \frac{r}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

dalla quale si ottiene:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m} \mp \sqrt{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2)$$

Si definiscono ora le seguenti grandezze:

$$\begin{cases} \omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}} = 8,083 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ \omega_D = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2} = 8,05 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ r_{cr} = 2m\omega_N = 24249 \frac{\text{Ns}}{\text{m}} \\ P = \frac{2\pi}{\omega_D} = 0,77 \text{s} \end{cases}$$

È dunque possibile esprimere nel modo seguente l'integrale che esprime l'oscillazione:

$$x(t) = Ae^{\left(\frac{r}{m} + i\omega_D\right)t} + Be^{\left(\frac{r}{m} - i\omega_D\right)t} \quad (3)$$

Quando il radicale della relazione (2) si annulla si parla di smorzamento critico e l'andamento sarebbe quello mostrato in figura 3.

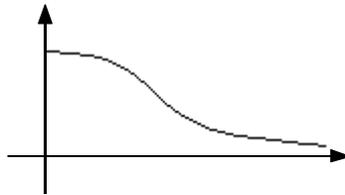


Figura 3

Le condizioni al contorno imposte sono le seguenti:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

e da queste sarebbe possibile ricavare le costanti A e B. Spesso la relazione (3) viene presentata in diverse forme alternative, indicate qui nel seguito:

$$\begin{cases} x(t) = e^{-\frac{r}{2m}t} [C_1 \cos(\omega_D t) + C_2 \sin(\omega_D t)] \\ x(t) = e^{-\frac{r}{2m}t} X [\cos(\omega_D t + \varphi)] \\ x(t) = e^{-\frac{r}{2m}t} X_1 [\sin(\omega_D t + \varphi_1)] \end{cases}$$

Siccome queste forme sono tutte equivalenti si può scegliere una a caso tra queste; si scelga dunque la seconda del sistema appena scritto, la cui derivata sarà:

$$\dot{x}(t) = -X \frac{r}{2m} e^{-\frac{r}{2m}t} \cos(\omega_D t + \varphi) - X e^{-\frac{r}{2m}t} \omega_D \sin(\omega_D t + \varphi)$$

Sfruttando le condizioni al contorno si può in questo caso ricavare X e φ . Se si fosse invece scelta la terza relazione del sistema delle forme equivalenti (che è meno intuitiva dal punto di vista fisico), si sarebbero potute utilizzare le seguenti formule:

$$\begin{cases} C_1 = x_0 \\ C_2 = \frac{\dot{x}_0 + \xi + \omega_N x_0}{\sqrt{1 - \xi^2} \omega_N} \end{cases}$$

che permettono poi anche l'utilizzo delle seguenti espressioni:

$$\begin{cases} X = X_1 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \\ \varphi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{C_1}{C_2}\right) \\ \varphi_1 = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{C_2}{C_1}\right) \end{cases}$$

L'energia dissipata dallo smorzatore equivale all'energia cinetica iniziale del carrello che alla fine si annulla. Se ci fosse solo la molla l'equazione di equilibrio sarebbe la seguente:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

da cui si ricaverebbe:

$$R = kx = -m\ddot{x}$$

Aggiungendo anche l'ammortizzatore si avrà invece:

$$R = kx + r\dot{x} = -m\ddot{x}$$

Ovviamente la situazione che interessa è quella in cui R è positiva (al più nulla) perché dal momento in cui R cambia di segno il carrello si stacca. Il procedimento prevede dunque di calcolare il momento in cui R cambia di segno (sapendo che da quel momento la situazione si stabilizza) e quindi ricavare la velocità relativa in quel momento. Una alternativa è quella di usare la legge del decremento logaritmico, che prevede di utilizzare la seguente relazione:

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} \cong 2\pi\xi$$