Istituto Superiore "Bertrand Russell" di Roma

Lezione n°2
TITOLO: La cinematica dei moti rettilinei

Oggetto

Studio della Cinematica, con particolare riferimento al moto rettilineo uniforme (MRU), al moto rettilineo uniformemente vario (MRUV) e al moto armonico semplice (MAS), quest'ultimo come "caso esemplare" di moto rettilineo non uniformemente vario. Equazioni orarie e diagrammi orari relativi ai diversi tipi di moto.

Obiettivi

- Riflessioni sull'importanza del movimento dei corpi nella vita quotidiana.
- Comprensione dell'importanza e del ruolo svolto da un sistema di riferimento nello studio dei fenomeni relativi al moto.
- Studio della Cinematica e dei suoi obiettivi, con particolare riferimento al moto rettilineo uniforme (MRU), al moto rettilineo uniformemente vario (MRUV) e al moto armonico semplice (MAS).
- Recupero e rinforzo dei concetti, già acquisiti nel biennio, di grandezze fondamentali del moto (spazio e tempo) e di grandezze derivate (velocità ed accelerazione).
- Riflessione sulla differenza tra velocità media e velocità istantanea e tra accelerazione media ed accelerazione istantanea.
- Studio e analisi delle leggi o equazioni orarie relative ai tre diversi tipi di moto.
- Rappresentazione dei relativi diagrammi orari.

La lezione dei giorni 21 e 22 settembre si è proposta come obiettivo lo studio della Cinematica, con particolare riferimento a tre tipi di moto (moto rettilineo uniforme, moto rettilineo uniformemente vario e moto armonico semplice), nonchè all'analisi delle equazioni orarie e dei diagrammi orari ad essi relativi. Prima di procedere con il presentare la tematica in discussione, è bene chiarire l'importanza del movimento dei corpi. Ci serviamo, a tale proposito, di un celebre apologo dell'Abate di Condillac: "Un Dio, osservando una statua, provò pietà, per via della sua infelice e monotona esistenza. Decise così di donarle la vista, ma la statua non dimostrò alcun piacere. Il Dio, sorpreso, le fece dono degli altri quattro sensi: l'udito, l'olfatto, il gusto e il tatto, ma la situazione non sembrò affatto migliorata. La divinità, irritata per tanta ingratitudine, venendo a conoscenza dell'esistenza del cosiddetto "sesto senso", responsabile del movimento, decise, in un disperato tentativo, di far sì che la statua non ne fosse priva, ed ebbe ragione: il blocco di pietra si trasformò in un essere animato e il suo volto si illuminò di gioia. Finalmente, la sua esistenza aveva acquistato un significato".
Il breve racconto, per quanto possa sembrare banale, fornisce un valido contributo per la comprensione dell'importanza del movimento dei corpi (argomento di cui si occupa la Meccanica).
A questo punto, è possibile introdurre il concetto di “Cinematica”. Con tale sostantivo si intende un “ramo della Meccanica che si occupa dello studio del

movimento dei corpi, indipendentemente dalle cause che lo producono". In altre parole, la Cinematica ha a che fare con l'aspetto geometrico del moto e si prefigge l'obiettivo di determinare le caratteristiche del movimento sulla base dei seguenti elementi: la traiettoria (linea ideale che unisce tutte le posizioni attraverso le quali un corpo è transitato durante il suo moto), il verso del moto, le misure delle grandezze fisiche e il rapporto tra tali misure (legge del moto o equazione oraria).
A questo proposito, è possibile affermare che "il problema fondamentale della Cinematica consiste nel determinare, ad ogni istante di tempo, la posizione, la velocità e l'accelerazione di un punto materiale rispetto ad un sistema di riferimento precedentemente fissato", senza il quale il moto non ha senso. Le tre funzioni da individuare sono le seguenti:

$$S= f (t) \qquad (1)$$

$$V= f (t) \qquad (2)$$

$$a= f (t) \qquad (3)$$

L'individuazione delle tre funzioni sarà utile per scoprire come avviene il movimento.
Prima di analizzare dettagliatamente i tre tipi di moto oggetto del nostro studio, è bene chiarire in che modo la posizione di un punto materiale può essere rappresentata nello spazio (tale concetto si rivelerà, infatti, estremamente utile per comprendere gli sviluppi ulteriori del nostro discorso). La posizione di un punto materiale in un determinato istante di tempo può essere individuata solo dopo aver fissato un "sistema di riferimento" (insieme di tutti gli oggetti rispetto ai quali il moto avviene con le stesse caratteristiche). Un sistema di riferimento può essere rappresentato graficamente attraverso una "terna di assi cartesiani", costituita da tre rette (chiamate x, y, z), ciascuna delle quali è perpendicolare alle altre due ed aventi un punto in comune O, detto origine.

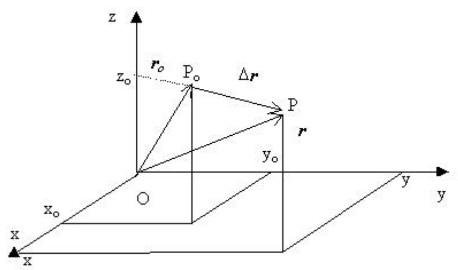


Fig.1 - Grafico relativo alla rappresentazione della posizione di più punti materiali rispetto ad una terna di assi cartesiani.

La posizione di un punto materiale P rispetto alla terna di assi cartesiani, dunque, è data da tre coordinate. Per determinarle, occorre misurare le distanze da O alle proiezioni di P sui tre assi. Dal momento che un oggetto si muove quando si sposta con il passare del tempo, per descrivere il movimento non occorrono solo le misure di lunghezza, ma anche quelle di durata. Di conseguenza, un sistema di riferimento completo è costituito da una terna di assi cartesiani, da un'asta metrica e da un orologio. A questo punto, la posizione di un punto materiale sarà individuata non più da tre, ma da quattro coordinate:

$P = (x_o, y_o, z_o; t_o)$ (4)

Tale osservazione non è affatto banale, dal momento che, in base alla teoria della Meccanica classica newtoniana, lo spazio e il tempo sono concetti assoluti. Di conseguenza, le coordinate dello spazio saranno indipendenti da quelle del tempo. Sulla base della Meccanica Relativistica, di cui Albert Einstein può esser considerato il fondatore, al contrario, spazio e tempo non sono concetti assoluti, ma relativi. Il nostro spazio fisico, di tipo euclideo, così come lo concepiamo per il tramite degli oggetti e del loro moto, possiede tre dimensioni e le posizioni sono caratterizzate da tre numeri. L'istante il cui si verifica il fenomeno è il quarto numero. Da ciò si deduce che ad ogni fenomeno corrisponde una quaterna di numeri ordinati e, viceversa, a un insieme di quattro numeri ordinati corrisponde un fenomeno determinato. Di conseguenza, il mondo dei fenomeni costituisce un continuo quadrimensionale. Questa rivoluzionaria affermazione affonda le sue radici nella geniale intuizione di Einstein, secondo la quale, a velocità elevate e inferiori a quella della luce (pari a 300 000 km/s), le lunghezze si riducono mentre il tempo si dilata (la causa di ciò è rappresentata dal cosiddetto fattore relativistico).

Poiché tali leggi sono valide solamente nel caso in cui si raggiungano altissime velocità, per parlare dei fenomeni che avvengono nel nostro sistema di riferimento (rappresentato dalla Terra), si può fare tranquillamente uso dei principi su cui si fonda la Meccanica Classica.

Torniamo, quindi, al nostro continuo tridimensionale e alla terna di assi cartesiani. Nel caso in cui l'istante di tempo considerato sia diverso da t_o (ad esempio, $t_o<t$), cambierà anche la posizione del punto materiale (vedi Fig.1). Dal momento che questa è rappresentata da un vettore che parte dall'origine e termina in corrispondenza del punto stesso, per determinare la nuova posizione del punto materiale basterà calcolare il vettore risultante:

$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_o}$ (5)

Il vettore risultante $\Delta \boldsymbol{r}$ sarà uguale alla somma vettoriale del vettore $\boldsymbol{r}$ e dell'opposto del vettore $\boldsymbol{r_o}$.

$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} + (-\boldsymbol{r_o})$ (6)

Tale formula rappresenta la differenza tra due vettori che indicano la posizione del punto. Per determinare il vettore risultante, cioè il vettore spostamento $\Delta \boldsymbol{r}$, basterà applicare la regola del parallelogramma. Tale vettore sarà, quindi, la diagonale del parallelogramma che ha per lati i due vettori componenti (vedi Fig.1).

Un ragionamento analogo può essere proposto in relazione al tempo. In questo caso, il simbolo Δ (simbolo di variazione, che indica una differenza finita), rappresenta l'intervallo di tempo trascorso tra l'istante di tempo iniziale t_o e l'istante di tempo finale t, seguente a t_o:

$\Delta t = t - t_o$ (7)

Siamo pertanto in possesso di tutte le informazioni necessarie per comprendere la differenza tra il concetto di velocità media e quello di velocità istantanea. In Fisica si parla frequentemente di velocità media di un punto materiale, dal momento che il moto rettilineo uniforme è un'astrazione. Nessun corpo, infatti, nella vita di tutti i giorni, percorre distanze uguali in intervalli di tempo uguali. Al contrario, la sua velocità varia continuamente. La velocità media ($\boldsymbol{V}_m$), ben diversa dalla media delle velocità, è un ipotetico e fittizio valore di velocità, che dovrebbe avere il punto materiale nel caso in cui percorresse la distanza prevista in un determinato intervallo di tempo (in altre parole, è la velocità che un punto materiale dovrebbe mantenere se percorresse una determinata distanza $\Delta \boldsymbol{S}$ in un intervallo di tempo Δt muovendosi di moto uniforme):

$\boldsymbol{V}_m = \Delta \boldsymbol{r}/\Delta t = (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_o})/(t-t_o)$ (8)

Come si deduce dalla formula, la velocità media è data dal rapporto tra la distanza $\Delta \boldsymbol{r}$ percorsa e l'intervallo di tempo Δt impiegato a percorrerla.

Premesso, poi, che la velocità è associata al concetto di moto che è il contrario della quiete (si definisce quiete, infatti, la particolare condizione cinematica per la quale la posizione di un punto materiale non cambia nel tempo, naturalmente rispetto ad un sistema di riferimento), e che la quiete corrisponde all'assenza di variazione del vettore $\boldsymbol{r_o}$, si definisce velocità istantanea in un determinato istante di tempo il valore limite a cui tende la velocità media calcolandola su un intervallo di tempo sempre più piccolo e tendente a zero. Ritorniamo per un momento alla definizione di velocità media. Se si desidera disporre di informazioni ancora più dettagliate sul moto del punto materiale, basterà dividere la distanza percorsa $\Delta \boldsymbol{r}$ in intervalli sempre più piccoli, restringendo sempre di più anche gli intervalli di tempo Δt. Anche se si ottiene ancora una velocità media, questa rappresenta un'approssimazione sempre migliore della velocità reale dell'oggetto. Rendendo gli intervallini via via infinitamente piccoli, sarà possibile calcolare la velocità di un punto materiale in ogni istante di tempo del suo movimento, ovvero la sua velocità istantanea (attraverso un procedimento chiamato "limite del rapporto incrementale"). In altre parole, la velocità istantanea di un punto materiale è il valore della sua velocità media nel caso in cui Δt tenda a 0:

$\boldsymbol{V}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta \boldsymbol{r}/\Delta t$ (9)

Nonostante il concetto di velocità istantanea sia così chiaramente descritto a livello teorico, nella realtà non esiste uno strumento in grado di calcolarla (perfino i tachimetri più costosi misurano delle velocità medie, per quanto calcolate su Δt molto piccoli). Ciò è dovuto al carattere imperfetto della Fisica, che rispecchia la natura imperfetta dell'uomo. E' possibile, tuttavia, calcolare la velocità istantanea attraverso un operatore matematico chiamato "derivata". Consideriamo due esempi.

Immaginiamo, nel primo caso, che la legge oraria del moto rettilineo uniforme di un punto materiale sia la seguente:

S (t)=5t+6 (per ulteriori chiarimenti su questo aspetto, vedere la parte riservata alla studio del moto rettilineo uniforme). La "derivata", rappresentata simbolicamente da un apostrofo, viene per semplicità indicata dal rapporto dS/dt, in cui la lettera d, pur ricordando il simbolo Δ, non rappresenta una quantità finita ma infinitesima. Illustriamo qui di seguito il procedimento matematico volto a calcolare la velocità istantanea di un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniforme secondo la legge oraria sopra riportata:

$V_i = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta S/\Delta t =$

$= \lim_{\Delta t \to 0} (S_2-S_1)/(t_2-t_1) =$ Posto $t_2 = t+\Delta t$ e $t_1 = t$ si ha:

$= \lim_{\Delta t \to 0} [(5t_2+6)-(5t_1+6)]/\Delta t =$

$= \lim_{\Delta t \to 0} [5(t+\Delta t)+6-(5t+6)]/\Delta t =$

$= \lim_{\Delta t \to 0} (5t+5\Delta t+6-5t-6)/\Delta t =$

$= 5\Delta t/\Delta t = 5$ m/s

La velocità istantanea del punto materiale è di 5 m/s. In questo caso la velocità istantanea coincide con la velocità media in tutto il percorso perchè il moto è uniforme.

Immaginiamo, nel secondo caso, che la legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato sia :

$$S(t) = 5t^2+6t+7$$

La "derivata prima" rappresenta la velocità, mentre la "derivata seconda" rappresenta l'accelerazione.

Ecco come si procede.

Posto $t_2 = t+\Delta t$ e $t_1 = t$ si ha:

$$V_i = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta S / \Delta t = \lim_{\Delta t \to 0} (S_2-S_1)/(t_2-t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(5t_2^2+6t_2+7)-(5t_1^2+6t_1+7)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[5(t+\Delta t)^2+6(t+\Delta t)+7]-[5t^2+6t+7]}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{[5(t^2+2t\Delta t+\Delta t^2)+6t+6\Delta t+7]-[5t^2+6t+7]}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[5t^2+10t\Delta t+5\Delta t^2+6t+6\Delta t+7-5t^2-6t-7]}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[10t\Delta t+5\Delta t^2+6\Delta t]}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5\Delta t^2+(10t+6)\Delta t}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[5\Delta t^2+(10t+6)\Delta t]/\Delta t}{\Delta t/\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} 5\Delta t+10t+6 = 5(0)+10t+6 = 10t+6$$

Dunque la velocità istantanea è data dalla funzione

$$V_i = 10t+6$$

che è la relazione lineare tra velocità e tempo.

Per calcolare l'accelerazione istantanea calcoliamo la derivata della velocità istantanea, la quale essendo già la derivata della distanza S, avremo che l'accelerazione istantanea è la derivata seconda della distanza S in funzione del tempo, cioè:

$$a_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V_2-V_1}{t_2-t_1} =$$

posto $V_2 = V+\Delta t$ e $V_1 = V$

ed essendo $V = 10t+6$ si ha:

$$a_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[10(t+\Delta t)+6]-[10t+6]}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{10t+10\Delta t+6-10t-6}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{10\Delta t}{\Delta t} = 10\text{m/s}^2$$

L'accelerazione istantanea del punto materiale è pertanto $10m/s^2$ ed è costante come previsto dal fatto che il moto è uniformemente accelerato.
Dopo questa complessa ma necessaria premessa, è ora possibile passare alla descrizione e all'analisi dei tre tipi di moto oggetto del nostro studio.

Moto rettilineo uniforme (MRU)

In generale si dice che un moto è uniforme quando un punto materiale percorre distanze uguali in intervalli di tempo uguali, comunque siano piccoli questi intervalli. Analogamente, un moto è uniforme quando le distanze ΔS che il corpo percorre sono direttamente proporzionali agli intervalli di tempo Δt impiegati per percorrerle. In particolare, in un moto rettilineo uniforme il punto materiale percorre una traiettoria rettilinea a velocità costante.
Le tre leggi o equazioni orarie relative al MRU sono le seguenti:

$$\begin{cases} a=0 & (10) \\ V=cost & (11) \\ S=S_o+Vt & (12) \end{cases}$$

Analizziamo ora nel dettaglio ognuna delle tre leggi.
1^a equazione: **a = 0**
La spiegazione alla prima equazione oraria del moto rettilineo uniforme è fornita dalla Dinamica. Dal momento che la risultante delle forze che agiscono sul punto materiale è 0 ($\Sigma \boldsymbol{F} \neq 0$), non si può pretendere che il corpo si muova se era fermo o modifichi la propria velocità se prima si muoveva con velocità costante.
Il diagramma orario relativo alla suddetta equazione oraria è il seguente:

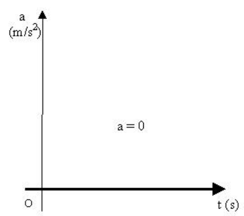


Fig.2 - Diagramma orario relativo alla prima legge del moto rettilineo uniforme.

2^a equazione: **V = cost**
Per risalire alla seconda equazione oraria del moto rettilineo uniforme è necessario richiamare alla memoria la definizione di accelerazione media. Con tale termine si indica, infatti, il rapporto tra la variazione di velocità ΔV subita dal punto materiale e l'intervallo di tempo Δt nel quale questa variazione avviene ($a = \Delta V/\Delta t$). Dal momento che, come precedentemente dimostrato, nel moto rettilineo uniforme il valore dell'accelerazione è 0, bisognerà eguagliare a 0 il rapporto tra variazione di velocità ed intervallo di tempo: $\Delta V/\Delta t = 0$. Moltiplicando entrambi i membri per Δt, si ottiene l'eguaglianza $\Delta V=0$. Dal momento che il simbolo ΔV indica una variazione

di velocità ($\Delta V=V-V_o$), eguagliarlo a zero equivale ad affermare che la velocità rimane costante.
Il diagramma orario relativo a tale equazione è il seguente:

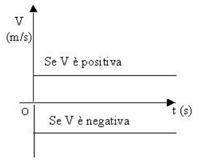


Fig.3 - Diagramma orario relativo alla seconda legge del moto rettilineo uniforme.

3ª equazione: $\mathbf{S = S_o + vt}$

Per illustrare il procedimento attraverso il quale è possibile risalire a questa equazione oraria del moto è necessario fare riferimento alla definizione di velocità media, pari al rapporto tra la distanza percorsa da un punto materiale e l'intervallo di tempo impiegato a percorrerla ($V=\Delta S/\Delta t$). Dal momento che la distanza percorsa è uguale alla differenza tra la posizione finale e quella iniziale di un corpo ($\Delta S=S-S_o$) e che l'intervallo di tempo impiegato è dato dalla differenza tra l'istante di tempo finale e quello iniziale, è possibile scrivere la seguente eguaglianza: $V=(S-S_o)/t$ (per facilitare le operazioni di calcolo, si è supposto che l'istante di tempo iniziale sia uguale a 0).
Moltiplicando entrambi i membri per t, si ottiene una nuova uguaglianza: $Vt = S-S_o$.
Portando S_o al primo membro, si risale alla legge oraria: $S = S_o+Vt$, dove S_o è detta condizione iniziale (nel caso in cui il valore della velocità sia negativo, l'equazione oraria sarebbe la seguente: $S = S_o-Vt$).
I diagrammi orari relativi alla terza equazione variano a seconda che il valore della velocità sia positivo o negativo. Per ogni grafico, inoltre, sono rappresentate tre rette, a seconda della distanza del punto materiale dall'origine nell'istante di tempo iniziale.
Valore della velocità positivo Valore della velocità negativo

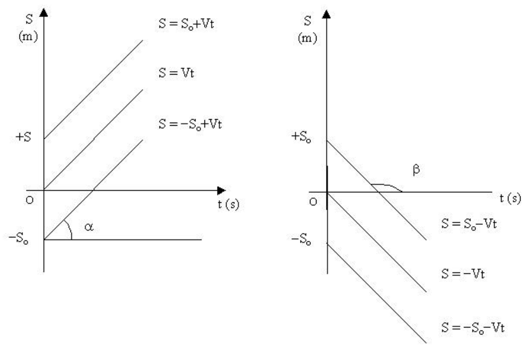


Fig.4 - Diagrammi orari relativi alla terza legge del moto rettilineo uniforme.

Nonostante le rette siano disposte in maniera diversa (a seconda che S_o sia maggiore, minore o uguale a 0), le prime tre hanno in comune l'angolo α, mentre le ultime tre hanno in comune l'angolo β. L'ampiezza di entrambi gli angoli ha a che fare con il valore della velocità del punto materiale: maggiore è l'ampiezza, maggiore è la velocità (questo vale nel caso in cui V è positiva, mentre nel caso in cui V è negativa è al contrario). Dall'osservazione dei due grafici sopra riportati, è possibile comprendere che, nel caso in cui il valore della velocità è positivo, si considera l'angolo acuto generato dall'intersezione della retta con la direzione positiva dell'asse

delle ascisse, mentre se la velocità è negativa, l'angolo da considerare è quello ottuso, sempre rispetto alla direzione positiva dell'asse delle ascisse.

Moto rettilineo uniformemente vario (MRUV)

In generale, si dice che un punto materiale si muove di moto rettilineo uniformemente vario quando la sua velocità varia di quantità ΔV uguali in intervalli Δt uguali, comunque siano piccoli questi intervalli. Analogamente, si può dire che un moto è uniformemente vario quando le variazioni di velocità ΔV sono direttamente proporzionali agli intervalli di tempo Δt nei quali esse avvengono. Il rapporto tra questa variazione di velocità ΔV e l'intervallo di tempo Δt nel quale essa avviene è definito accelerazione media. E' possibile, inoltre, operare un'ulteriore distinzione tra moto rettilineo uniformemente accelerato (MRUA), se il valore dell'accelerazione è positivo ($a>0$) e moto rettilineo uniformemente decelerato o ritardato (MRUR), se il valore dell'accelerazione è negativo ($a<0$).
Le tre equazioni o leggi orarie relative al moto rettilineo uniformemente vario sono le seguenti:

$$\begin{cases} a = cost & (13) \\ S = S_o+V_ot+1/2at^2 & (14) \\ V=V_o+vt & (15) \end{cases}$$

1ª equazione: **a = cost**

Anche questa volta, come nel caso del moto rettilineo uniforme, la spiegazione alla prima equazione oraria viene fornita dalla Dinamica. Dal momento che la risultante delle forze agenti sul punto materiale è diversa da 0 ($\Sigma \boldsymbol{F} \neq 0$), ci si deve aspettare che il punto materiale modifichi la sua velocità iniziale.

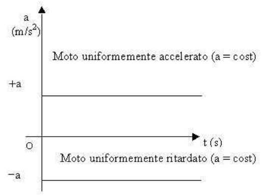


Fig.5-Diagramma orario relativo alla prima legge del moto rettilineo uniformemente accelerato.

2ª equazione: $\mathbf{V = V_o + at}$

Per illustrare il procedimento che consente di risalire alla seconda equazione oraria del moto rettilineo uniformemente vario, è necessario ricorrere alla definizione di accelerazione media. Come precedentemente affermato, tale grandezza derivata è data dal rapporto tra la variazione di velocità di un punto materiale e l'intervallo di tempo in cui essa avviene ($a = \Delta V/ \Delta t$). Moltiplicando per Δt entrambi i membri, si ottiene una nuova uguaglianza: $a\Delta t = \Delta V$. Dal momento che la variazione di velocità ΔV è rappresentata dalla differenza tra la velocità finale e quella iniziale ($V-V_o$) e l'intervallo di tempo Δt è dato dalla differenza tra l'intervallo di tempo finale e quello iniziale ($t-t_o$), l'uguaglianza può essere scritta sotto la seguente forma: $V-V_o = at$ con $t_o = 0$. Portando V_o al primo membro, si risale alla legge oraria: $V = V_o+at$. Nel caso in cui il moto fosse decelerato la legge oraria sarebbe la seguente: $V = V_o-at$.

I diagrammi orari relativi a tale equazione variano a seconda che il valore dell'accelerazione sia positivo ($a>0$) o negativo ($a<0$).

Valore dell'accel. positivo Valore dell'accel. negativo

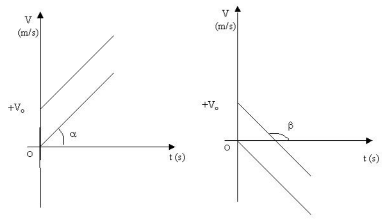


Fig.6-Diagrammi orari relativi alla seconda equazione del moto rettilineo uniformemente accelerato.

Anche in questo caso, come nel moto rettilineo uniforme, le prime due rette hanno in comune l'angolo α, mentre le seconde due rette hanno in comune l'angolo β e l'ampiezza degli angoli ha a che fare con il valore dell'accelerazione (nel primo caso, maggiore è langolo, maggiore sarà l'accelerazione). Se il valore dell'accelerazione è positivo, l'angolo formato dall'intersezione tra la retta e la direzione positiva dell'asse delle ascisse è acuto mentre, in caso contrario, è ottuso.

3ª equazione: $\mathbf{S = S_o + V_o t + 1/2at^2}$

In generale, sia S_o che V_o sono dette condizioni iniziali del moto. Il punto materiale può, infatti, partire dall'origine o meno e possedere una velocità diversa da 0 nell'istante di tempo iniziale. In tal caso, la distanza percorsa dal punto in un determinato intervallo di tempo sarebbe dovuta non solo alla sua accelerazione, ma anche al contributo dovuto alla velocità iniziale. Se si sostituisce t con x, l'equazione oraria si trasformerà in un trinomio di secondo grado ($ax^2+bx+c=0$). Di conseguenza, l'equazione oraria sarà rappresentata graficamente da una parabola. Anche in questo caso, i diagrammi orari saranno differenti a seconda dei termini e dei coefficienti del binomio che prenderemo in considerazione.

Legge generale : $S(t) = \pm S_o \pm V_o t \pm 1/2at^2$

$(c+bx+ax^2)$

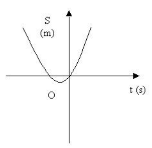
Premesso che è possibile studiare tutti i tipi di parabola attraverso il metodo generale che parte dal presupposto di poter calcolare:

1. le coordinate del vertice $V(-b/2a\ ,\ -\Delta/4a)$
2. la concavità verso l'alto quando $a>0$
3. l'equazione dell'asse di simmetria (parallelo a y) quando
   $x = -b/2a$
4. le intersezioni con gli assi cartesiani
   -per $y = 0$ $ax^2+bx+c = 0$
   -per $x = 0$ $y = c$

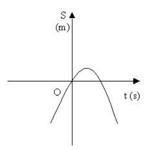
Nel nostro caso sono importanti i seguenti casi che corrispondono al MRUA e MRUR.

Fig.7-Diagrammi orari relativi alla terza legge del moto rettilineo uniformemente accelerato.

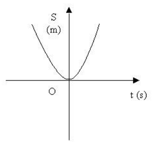
1)$S = V_o t+1/2at^2$



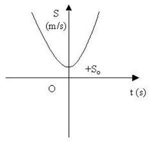
2)$S = V_o t-1/2at^2$



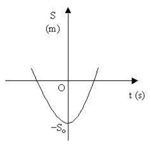
3)$S = +1/2at^2$



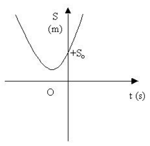
4)$S = +1/2at^2+S_o$



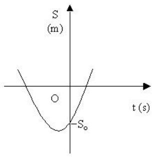
5)$S = +1/2at^2-S_o$



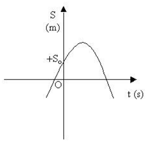
6)$S = V_ot+1/2at^2+S_o$



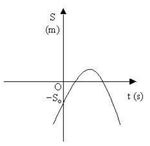
7)$S = V_o t+1/2at^2-S_o$



8)$S = V_o t-1/2at^2+S_o$



9)$S = V_o t-1/2at^2-S_o$



Nel caso del moto incipiente di caduta dei corpi, le tre equazioni orarie del moto rettilineo uniformemente accelerato si trasformano nel modo seguente:

$$\begin{cases} g = cost \cong 9,8\ m/s^2 & (16) \\ V = gt & (17) \\ S = 1/2\ gt^2 & (18) \end{cases}$$

La relazione tra a, V, S

Nel caso in cui l'accelerazione sia l'incognita, se non si conosce il valore di t, la relazione tra a, S e V può essere ugualmente individuata. Ponendo $S_o = 0$ e $t_o = 0$, il moto del corpo è descritto dalle due leggi del moto rettilineo uniformemente accelerato:

MRUA

$V_o = 0$

$$\begin{cases} V = at \\ S = 1/2\ at^2 \end{cases}$$

MRUA

$V_o \neq 0$

$$\begin{cases} V = V_o + at \\ S = V_o t + 1/2\ at^2 \end{cases}$$

Ricavando t nella prima equazione di ogni sistema e sostituendolo nella seconda, si ottiene:

$$\begin{cases} t = V/a \\ S = 1/2\ a\ (V/a)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \dfrac{V - V_o}{a} \\ S = V_o\left(\dfrac{V - V_o}{a}\right) + 1/2\ a \left(\dfrac{V - V_o}{a}\right)^2 \end{cases}$$

Eseguendo i calcoli e semplificando là dove è necessario, la seconda equazione di ogni sistema diventa:

$\mathbf{V^2 = 2aS}$

$\mathbf{V^2 - V_o^2 = 2aS}$

Moto rettilineo vario

In un moto rettilineo vario, con il trascorrere del tempo, la velocità varia, ma non necessariamente in modo costante. In altre parole, variazione di velocità Δv ed intervallo di tempo Δt possono anche non essere legati da un rapporto di proporzionalità diretta. Prima di passare ad illustrare le leggi orarie del moto rettilineo vario, è bene comprendere la differenza tra le equazioni che indicano "il dove" di un punto materiale, cioè le equazioni della traiettoria, rappresentate attraverso un diagramma spaziale (x,y) e quelle che, invece, forniscono informazioni sul "quando", cioè l'equazione oraria, rappresentata attraverso un diagramma temporale (t,s). Se volessimo descrivere un moto vario come quello della caduta di un oggetto, avremmo bisogno di due equazioni orarie: quella del moto rettilineo uniforme e quella del moto rettilineo uniformemente accelerato.

$$\begin{cases} x = V\ t \\ y = 1/2at^2 \end{cases}$$

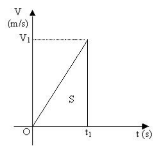
Mettendo a sistema le due equazioni e risolvendo il sistema stesso, si ottiene

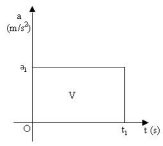
$$\begin{cases} t = x/V \\ y = 1/2a\ (x/V)^2 = (1/2\ a/V)x^2 \end{cases}$$

Il risultato finale è :

$y=kx^2$ (equazione della traiettoria) (19)

Mentre prima è stata chiarita la differenza tra velocità media e velocità istantanea, ora è bene illustrare quella tra accelerazione media ed accelerazione istantanea. Mentre, infatti, l'accelerazione media è il rapporto tra la variazione di velocità e l'intervallo di tempo in cui essa si verifica ($\boldsymbol{a}_m = \Delta V/\Delta t$) quella istantanea altro non è che il valore limite a cui tende l'accelerazione media calcolandola su un intervallo di tempo sempre più piccolo ($\boldsymbol{a}_i = \lim \Delta V/\Delta t$ per $\Delta t \rightarrow 0$).
Illustriamo, ora, il ragionamento di carattere deduttivo attraverso il quale è possibile risalire alla legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato.





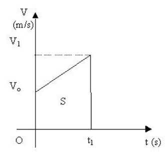


Fig.8 - Diagrammi orari relativi alla legge oraria del moto nel caso particolare in cui l'accelerazione è costante.

Dal momento che l'area S del trapezio rettangolo generato dall'incontro delle due rette con gli assi cartesiani corrisponde alla distanza percorsa dal punto materiale, è possibile scrivere la seguente formula: $S = \frac{(V_1+V_2)t}{2}$. Eliminando la parentesi tonda, si ottiene una nuova uguaglianza: $S = \frac{V_1t+V_2t}{2}$. Dal momento che $V_2 = V_1+at$, l'uguaglianza può essere scritta sotto nuova forma: $S = \frac{V_1t}{2} + \frac{(V_1+at)t}{2}$, il che equivale a dire che $S = V_1t/2+V_2t/2 +1/2at^2$, cioè

$S=V_1t+1/2at^2$ (20)

Ciò dimostra come sia possibile risalire, attraverso un ragionamento di carattere deduttivo, alla legge oraria del moto nel caso particolare in cui l'accelerazione è costante.

$S = 1/2\ t\ V = 1/2t\ (at) = 1/2at^2$

$V = ta = at$

Moto armonico semplice
(MAS)

Si definisce moto armonico semplice, fissato un asse e un punto fisso O, il moto di un punto materiale che compie delle periodiche escursioni attorno al punto O.

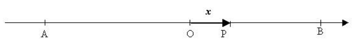
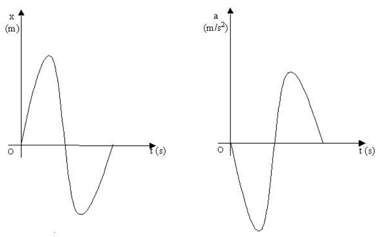


Fig.9-Grafico relativo alla rappresentazione dei concetti di ampiezza di oscillazione e di elongazione nel moto armonico semplice.

Si definisce elongazione la distanza, ad ogni istante, di un punto oscillante dal centro di oscillazione. Nel caso specifico l'elongazione, rappresentata dal segmento che ha come estremi O e P, viene contrassegnata dalla lettera x. I due segmenti hanno come estremi O e B ed O e A rappresentano, invece, l'ampiezza di oscillazione del punto materiale, mentre con la lettera T si indica il periodo di oscillazione (intervallo di tempo impiegato per compiere un'oscillazione completa).
Il diagramma orario del moto armonico semplice viene detto sinusoide e può essere rappresentato nel modo seguente:



-Fig.10-Diagrammi orari relativi alle leggi del moto armonico semplice

Le equazioni orarie relative al moto armonico semplice sono le seguenti:

$a = -\omega^2 x$ (21)

dove $\omega = 2\pi/2$ (quest'ultima è detta formula di definizione della pulsazione);

$x(t) = x_o \sin \omega t$ (22)