Usi e usufrutti del teorema di Gauss nell'apprendimento dell'elettrostatica.

La lezione di oggi verte sul tema "applicazioni del teorema di Gauss" nei casi più semplici di determinazione (calcolo) del campo elettrico $\vec{E}$ prodotto da una distribuzione simmetrica di carica elettrica. Qui per "simmetrica" si intende o una carica distribuita uniformemente su una superficie sferica, ma anche una carica puntiforme, o uno strato sferico esterno, o una distribuzione volumica di carica all'interno di una sfera piena, o cilindrica, o un filo sottile o un anello, o una lastra piana, o una lastra spessa, o un disco piatto circolare, ecc… Insomma, su tutti quei corpi che posseggono un minimo di simmetria, ovvero di regolarità geometrica in grado di semplificarne l'applicazione matematica. Il problema sta tutto qui. Il formalismo differenziale e integrale è complesso a livello liceale. In taluni casi proibitivo. Dunque, è necessario andare cauti nel suo utilizzo. Solo nei casi più semplice ne è lecito l'utilizzo, nonostante le forti resistenze degli studenti a prenderne atto e ad accettarne l'uso.
Ho esordito soffermandomi a considerare il teorema di Gauss come al "toccasana dell'elettrostatica". Esso costituisce un potente *utensile* in grado di permettere il calcolo del valore di $\vec{E}$ in situazioni difficili di distribuzione elettrica che non sia il caso più banale di carica puntiforme. Per esempio una carica elettrica distribuita su un corpo a forma di patata, per quanto le patate possano essere le più regolari possibili (dicono che quelle di Viterbo siano eccezionali in forma e gusto) è difficilissimo che sia assimilabile a una forma sferica o cilindrica per distanze relativamente piccole dalla patata. Ho pertanto avviato la riflessione gaussiana soffermandomi a considerare il teorema di Gauss come strumento flessibile e utile per imparare a manipolare il formalismo matematico come una procedura tecnica in grado di calcolare il valore di $\vec{E}$ in tutti i punti intorno alla carica. Il mio intento è stato quello di far comprendere ai ragazzi che ciò che

conta a livello teorico è il metodo, cioè la procedura, ovvero il processo che ci permette di passare dal caso generale al caso particolare. L'adattamento della *matematica* del teorema di Gauss è particolarmente importante nel processo di assimilazione dei contenuti e di sviluppo delle competenze relative a questo settore del corso di fisica. Si tratta del classico metodo assiomatico-deduttivo, in grado di seguire, e conseguire, i successi straordinari della perfezione raggiunta dalla geometria euclidea. Qui per caso generale ho inteso la struttura fisico-matematica della legge di Gauss in cui al primo membro dell'equazione vi è il flusso del vettore campo elettrico attraverso la superficie chiusa, quest'ultima detta *gaussiana*, e al secondo membro il rapporto tra la carica interna alla superficie e la costante dielettrica assoluta del vuoto e_o. Ho proposto la doppia versione del teorema di Gauss relativamente alla rappresentazione matematica. In primo luogo quella di tipo liceale, elementare, meno rigorosa e alla portata dei meno esperti. Eccola:

$$\Phi sc(E) = \frac{q \operatorname{int}}{eo}$$

l'indice "*sc*" significa "superficie chiusa", cioè che la superficie che avvolge la carica può essere percorsa seguendo una linea continua da un punto e ritornando sullo stesso punto muovendosi sempre lungo la stessa direzione, senza incontrare buchi. Questa faccenda della differenza tra superficie chiusa e superficie aperta non sembri banale perché costituisce per qualche studente un problema non indifferente nell'apprendimento. Più di un giovane mi ha fatto presente di non comprendere chiaramente la differenza tra superficie aperta e chiusa. E che non doveva essere scontato il fatto che per i più svelti della classe questa differenza fosse banale ne ho avuto conferma nel momento in cui sono passato ad esemplificare alcuni casi sopra illustrati. D'altronde la capacità di capire il teorema di Gauss passa esclusivamente per una chiara

comprensione della differenza tra i due casi. Non è inequivocabile in molti studenti che la superficie chiusa deve poter accogliere la o le cariche elettriche al suo interno, indicate con q_{int}, completamente entro se stessa, senza lacerazioni su di essa come potrebbe essere il taglio di un pezzo di superficie da un pallone di gomma. In altre parole, per "superficie chiusa" si intende una "superficie bidimensionale, coesa, senza bordo e orientata", ovvero in termini molto intuitivi, è una superficie "finita che racchiude un volume finito".
La seconda versione del teorema di Gauss, quella di tipo integrale (universitario), è più rigorosa ma meno semplice nella sua essenza simbolica. Eccola:

$$eo\oint \vec{E}d\vec{A} = q\,\mathrm{int}$$

Qui le difficoltà di comprensione sono maggiori perché si fa uso della notazione integrale. Ho sempre detto ai miei studenti che anche se non hanno ancora studiato a fondo matematicamente il calcolo integrale si tratta soltanto di un semplice formalismo che consente di calcolare il limite di una somma che possiede infiniti termini. Non starò qui a svolgere considerazioni didattiche su come si utilizza il calcolo integrale. Rimando ai testi di analisi. Dico solo che il problema è facilmente superabile a condizione di evitare il condizionamento psicologico dovuto al fatto che esso è un argomento di fine anno o, peggio, è un tema da svolgere *solo* all'Università. Anche in questo caso la formulazione del teorema di Gauss è identica alla precedente, perché le idee che stanno sotto al formalismo sono tali e quali.
Quello che importa capire bene è che l'applicazione del teorema di Gauss avviene secondo il seguente percorso. In primo luogo si identifica il sistema di cariche presenti sul nostro corpo. In secondo luogo si definisce una superficie gaussiana che deve essere la più regolare (simmetrica) possibile. In terzo luogo si calcola il flusso del campo elettrico come somma dei flussi

parziali del campo su tutti i pezzi della superficie chiusa. In quarto luogo su uguaglia questo calcolo con il rapporto q_o/e_o e, oplà, il gioco è fatto! La relazione che ne discende contiene come incognita il campo elettrico $\vec{E}_{(\mathbf{r})}$ che è una funzione di alcuni parametri geometrici. Il teorema acquista pertanto una caratteristica metodologica importante il cui messaggio è che se si desidera calcolare il campo elettrico è necessario procedere, con metodo, applicando il calcolo matematico ad alcune tipologie di localizzazione di carica elettrica e di distribuzione delle posizioni lungo cui le cariche si trovano.